공학수학2 기말고사 (풀이집)	날짜	2008. 12. 16

문제 1. 다음의 주어진 Differential Equation 에 대해 보기 1을 참고하여 물음에 답하시오.

$$2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$$

1) x=0는 어떤 종류의 Point인지 판별하고 답을 쓰시오.

[답]

Standard for으로 바꾸면 $y''+\dfrac{7(x+1)}{2x}y'+\dfrac{-3}{2x^2}y=0$

$P(x)=\dfrac{7(x+1)}{2x}\quad ,Q(x)=\dfrac{-3}{2x^2}$ **는 x=0에서 singular point 이다.**

$(x-0)^2$ **을 곱하면** $x^2y''+x\left[\dfrac{7(x+1)}{2}\right]y'+\left[\dfrac{-3}{2}\right]y=0$

$p(x)=\dfrac{7(x+1)}{2}\quad ,q(x)=\dfrac{-3}{2}$ **는 x=0에서 analytic 하다.**

∴x=0은 regular singular point이다

2) 해의 형태를 가정하고 그 이유를 1)의 결과와 연관하여 설명하시오.

[답]

$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r},\ or\quad x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

Regular Singular point에서 해를 이렇게 가정할 경우 linearly independent한 해를 적어도 하나 구할 수 있다.

3) 2)에서 사용한 theorem의 명칭을 영문으로 쓰시오.

[답]

Frobenius

4) 가정한 해를 주어진 문제에 대입하여 최종 정리한 식을 쓰시오.

[답]

$$x^r\left\{c_0x^0\left[2r^2+5r-3\right]+x^k\left[\sum_{k=1}^{\infty}7(k+r-1)c_{k-1}+\left[2(k+r)-1)\right]\left[(k+r)+3\right]c_k\right]\right\}$$

5) indicial equation을 쓰시오.

[답]

$2r^2+5r-3=0$

6) Recurrence formula를 쓰시오.

[답]

$$c_k = \frac{-7(k+r-1)}{\left[2(k+r)-1)\right]\left[(k+r)+3\right]} c_{k-1} \ , k=1,2,3...$$

7) x=0부근에서 general solution을 구하시오. (<u>단, series는 처음 세 번째 항까지 표시하고 약분된 분수의 형태를 유지하시오)</u>

$$r = \frac{1}{2},$$

$$c_k = -\frac{7(2k-1)}{(2k)(2k+7)} c_{k-1} \ , (k=1,2,3,..)$$

$$c_1 = -\frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 9} c_0 = -\frac{7}{18} c_0$$

$$c_2 = -\frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 11} c_1 = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 11} \cdot \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 9} c_0 = \frac{49}{264} c_0$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y_1 = x^{1/2} \left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots \right)$$

$$= c_0 x^{1/4} \left(x^0 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{49}{264} x^2 + \cdots \right)$$

$$r = -3,$$

$$c_k = -\frac{7(k-4)}{k(2k-7)} c_{k-1} \ , (k=1,2,3,..)$$

$$c_1 = -\frac{7 \cdot (-3)}{1 \cdot (-5)} c_0 = -\frac{21}{5} c_0$$

$$c_2 = -\frac{7 \cdot (-2)}{2 \cdot (-3)} c_1 = \frac{7 \cdot (-2)}{2 \cdot (-3)} \cdot \frac{7 \cdot (-3)}{1 \cdot (-5)} c_0 = \frac{49}{5} c_0$$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y_2 = x^{-3} \left(c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots \right)$$

$$= c_0 x^{-3} \left(x^0 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 + \cdots \right)$$

$$\therefore y = C_0 y_1 + C_1 y_2$$

$$y_1 = x^{1/2} \left(x^0 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{49}{264} x^2 + \cdots \right), \ y_2 = x^{-3} \left(x^0 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 + \cdots \right)$$

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \cdots (1)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \cdots (2)$$

Definition — **Ordinary and Singular Points**

A point x_0 is said to be an ordinary point of the differential equation (1) If both $P(x)$ and $Q(x)$ in the standard form (2) are analytic at x_0.

A point that is not an ordinary point is said to be a singular point on the equation

Definition — **Regular/Irregular Singular Points**

A singular point x_0 is said to be a regular singular point of the differential equation (1) if the functions $p(x) = (x - x_0)P(x)$ and $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ are both analytic at x_0.

A singular point that is not regular is said to be an irregular point of the equation

보기 1

문제 2. 다음 각 삼각함수를 x=0 점을 중심으로 보기 2과 같은 형식의 Taylor Series로 전개하시오.

1) $\sin x$

[답]

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

2) $\cos x$

[답]

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}, \ (B : Bernouill\ No.)$$

보기 2

문제 3. 보기 3의 설명을 참고하여 다음 주어진 Difference Equation의 해를 구할 때 다음 물음에 답하시오.

$$x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

1) 식 (4)의 J_p, J_{-p} 의 명칭을 정확히 영어로 쓰시오.

[답]

Bessel functions of the first kind of order p,- p

2) a ,b, c, d에 해당하는 값을 각각 구하시오

[답]

$$y'' + (4/x)y' + (1 + 2/x^2)y = 0$$

$$1 - 2a = 4 \quad \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$2c - 2 = 0 \quad \Rightarrow c = 1$$

$$b^2c^2 = 1 \quad \Rightarrow b = 1$$

$$a^2 - p^2c^2 = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

3) General Solution을 구하시오. 필요할 경우 문제 2)의 결과와 의 보기 4의 식을 사용하시오.

[답]

$$y = x^{-3/2}[c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)] = x^{-3/2}\left[c_1\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x + c_2\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\right] = C_1\frac{1}{x^2}\sin x + C_2\frac{1}{x^2}\cos x$$

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + (b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2})y = 0,\ p \ge 0,\ b > 0 \cdots (1)$$

$$z = bx^c,\ y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z) \cdots (2)$$

$$z^2\frac{d^2w(z)}{dz^2} + z\frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \cdots (3)$$

$$y = x^a\left[c_1 J_p(bx^c) + c_2 J_{-p}(bx^c)\right] \cdots (4)$$

식 (1)은 식 (2)와 같이 치환하여 (3)과 같은 형식으로 변형할 수 있다.

이 때 general solution은 식(4) 와 같다.

보기 3

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \quad , J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

Gamma function

Definition: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

Recurrence relation: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\Gamma(1 + \frac{1}{2} + n) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi} \quad ,\Gamma(1 - \frac{1}{2} + n) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}$$

보기 4

문제 4. 다음 각 theorem의 명칭을 영어로 쓰시오.

1) $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})ds = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$

[답]

Stoke's Theorem

2) $\iiint_T \text{div}\mathbf{F}dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$

[답]

Divergence Theorem

3) $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$

[답]

Green's Theorem

문제 5. 다음의 xy평면상에 주어진 Force Vector Field F에 대해 물음에 답하시오.

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = (x^4 - 2y^3)\mathbf{i} + (2x^3 - y^4)\mathbf{j}$$

1) 그림 1의 경로 C를 따라 Force 가 한 일을 구하시오. 단, 문제 4의 식 중 알맞은 것을 사용하고 극좌표계를 사용하시오.

[답]

Green Theorem을 이용하여

$P = x^4 - 2y^3,\ P_y = -6y^2,\ Q = 2x^3 - y^4,\ Q_x = 6x^2$

$\oint_C (x^4 - 2y^3)dx + (2x^3 - y^4)dy = \iint_R (6x^2 + 6y^2)dA$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 6r^2 r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}r^4\right)\Bigg|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 24 d\theta = 48\pi$

2) 이 힘은 보존장인가? 답에 대한 근거를 간단히 답하시오.

[답]

경로를 따라 한 일이 0이 아니므로 보존장이 아니다.

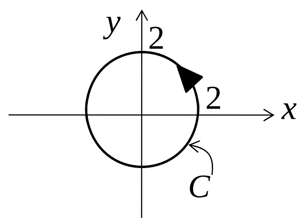


그림 1

문제 6. 공간상에 주어진 Vector Field A에 대해 물음에 답하시오.

$$\mathbf{A} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$$

1) 그림 2와 같은 경로 C에 대한 선적분 $\oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r}$ 을 구하시오. 단 문제 4의 식 중 알맞은 것을 사용하고, S는 곡면 z=2에서 곡선 C로 둘러싸인 곡면 $2z = x^2 + y^2$ 이다.

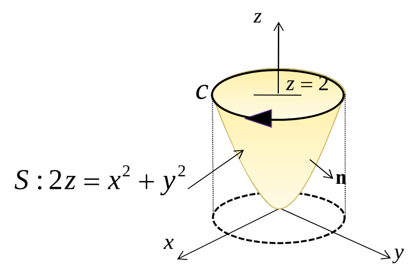
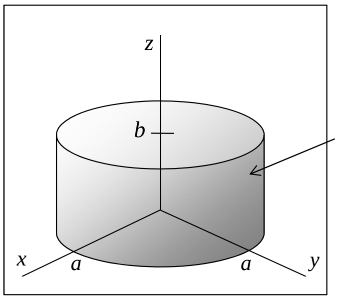


그림 2

[답]

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \left[3ydx - xzdy + yz^2 dz \right]$$
$$= \int_{2\pi}^{0} \left[3(2\sin t)(-2\sin t)dt - (2\cos t)(2)(2\cos t)dt \right]$$
$$= \int_0^{2\pi} (12\sin^2 t + 8\cos^2 t)dt = 20\pi$$

문제 7. 그림 3과 같은 Cylinder 형상에 대해 물음에 답하시오.



$$S: x^2+y^2=a^2 (0 \le z \le b)$$
$$z=0 \;\; and \;\; z=b\,(x^2+y^2 \le a^2)$$

그림 3

1) Cylinder surface S 에 대해 다음 적분 값을 구하시오. 힌트 : 적분에 cylindrical coordinates를 이용하시오.

$$I=\iint_S \left(x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy\right)$$

[답]

$$I=\iint_S \left(x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy\right)$$
$$S: x^2+y^2=a^2 (0 \le z \le b)$$
$$z=0 \;\; and \;\; z=b\,(x^2+y^2 \le a^2)$$
$$F_1=x^3, F_2=x^2 y, F_3=x^2 z$$
$$\operatorname{div}\mathbf{F}=3x^2+x^2+x^2=5x^2$$
in polar coordinates:
$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$$
$$I=\iiint_T 5x^2 dxdydz=\int_{z=0}^{b}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\left(5r^2\cos^2\theta\right) r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$=5\int_{z=0}^{b}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{a^2}{4}\cos^2\theta d\theta\,dz=5\int_{z=0}^{b}\frac{a^4\pi}{4}dz=\frac{5\pi}{4}a^4 b$$

문제 8. 매년 California시 밖의 인구의 1/10 이 California 안으로, California시 안의 인구의 2/10 이 California 밖으로 이사를 한다고 한다. 이 때 다음 물음에 답하시오.

1) 매년 인구의 변화에 대한 매트릭스 'A'를 구하시오.

[답]

$$\begin{bmatrix} out' \\ in' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} out \\ in \end{bmatrix}$$

2) A의 Eigenvalues를 구하시오.

[답]

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0.9-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = (0.9-\lambda)(0.8-\lambda) - 0.2\cdot 0.1 = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = (\lambda-1)(\lambda-0.7) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1, \lambda = 0.7$$

3) A의 Eigenvectors를 구하시오.

[답]

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\text{choose } x_1 = 2$$

$$\therefore \mathbf{x}_1 = [2,1]^{\mathbf{T}}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

$$\lambda = 0.7$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{choose } x_1 = 1$$

$$\therefore \mathbf{x}_2 = [1,-1]^{\mathbf{T}}$$

4) A의 Eigenvector Matrix ‘S’를 쓰시오.

[답]

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5) A의 대각행렬 (Diagonal Matrix) ‘Λ’를 쓰시오.

[답]

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

6) k년이 지난 후의 **California** 밖의 인구와 안의 인구를 각각 y_k, z_k 라 하고 초기 인구를 y_0, z_0 라 한다.

이때 인구 변화의 관계는 $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$와 같다. $\mathbf{A}^k$ 를 ‘Λ’와 ‘S’로 나타내시오.

[답]

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^2 = (\mathbf{S\Lambda S}^{-1})(\mathbf{S\Lambda S}^{-1}) = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}\mathbf{S\Lambda S}^{-1} = \mathbf{S\Lambda}^2\mathbf{S}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \mathbf{S\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

7) **California** 안의 인구를 300만, 밖의 인구를 600만 이라고 할 때 **California** 안의 인구는 시간이 지나면서 얼마로 수렴하는지 계산과정과 답을 쓰시오.

[답]

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \mathbf{S\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 + z_0 \\ y_0 - 2z_0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^k \cdot (y_0 + z_0) \\ 0.7^k \cdot (y_0 - 2z_0) \end{bmatrix} = 1^k \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y_0 + z_0) + 0.7^k \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(y_0 - 2z_0)$$

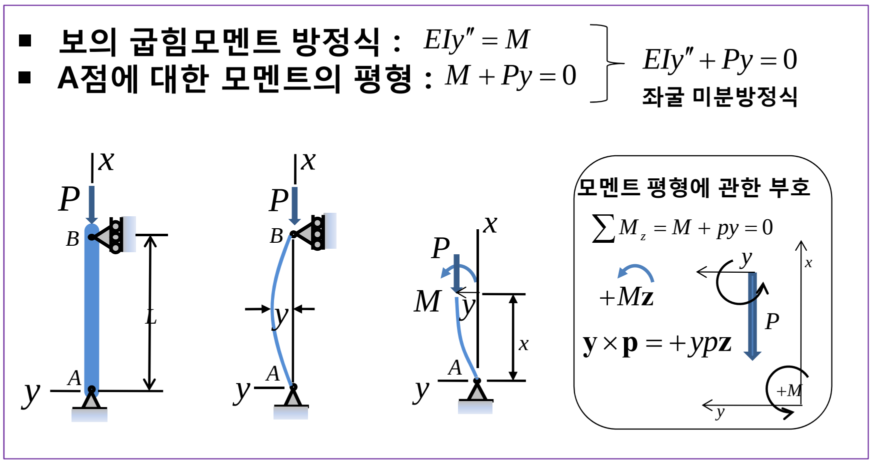
$$\therefore \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = 1^k \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y_0 + z_0) + 0.7^k \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(y_0 - 2z_0)$$

$$as\ k \to \infty$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = 1^k \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y_0 + z_0) + \underline{0.7^k \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}(y_0 - 2z_0)}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y_0 + z_0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(600 + 300) = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \end{bmatrix}$$

문제 9. 좌굴(Buckling)은 기둥의 길이가 그 단면의 치수에 비해 클 때, 그림과 같이 기둥의 끝단에 압축하중이 가해졌을 경우 하중이 어느 크기에 이르면 내력과 외력의 평형이 무너져 기둥이 휘는 현상을 말한다. 좌굴된 기둥은 마치 보(Beam)인 것 처럼 굽어지기 때문에, 보의 처짐 곡선을 적용하여 보기 5와 같이 유도 할 수 있다.



보기 5

1) 기둥의 양 끝단에서 조건 $y(0)=0,\ y(L)=0$을 적용하여 좌굴 방정식의 해를 구하고자 한다. 의미있는 해가 존재하기 위한 Eigenvalue의 부호를 판정하시오.

[답]

Case I : $\lambda = 0$

$$y'' = 0$$

$$y = c_1 x + c_2$$

integral

From boundary condition:

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0$$

$\therefore y = 0$ (trivial solution)

Case II : $\lambda < 0$ Write $\lambda = -k^2,\ k > 0$

$$y'' - k^2 y = 0$$

Let: $y = e^{mx}$

$$\rightarrow (m^2 - k^2)e^{mx} = 0$$

$$\rightarrow m_1 = k,\ m_2 = -k$$

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

From boundary condition:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0, c_2 = -c_1$$

$$y(L) = c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL}$$

$$= c_1(e^{kL} - e^{-kL}) = 0$$

If $(e^{kL} - e^{-kL}) = 0$

$$\rightarrow e^{2kL} = 1,$$

$$\rightarrow k = 0\ (\because L \neq 0)$$ Case I : trivial sol.

If $c_1 = 0 \rightarrow c_2 = 0$ trivial sol.

Case III : $\lambda > 0$ **Write** $\lambda = k^2,\ k > 0$

$$y'' + k^2 y = 0$$

Let: $y = e^{mx}$

Then roots of auxiliary equation is

$$\longrightarrow \quad (m^2 + k^2)e^{mx} = 0$$

$$\longrightarrow \quad m_1 = ik,\ m_2 = -ik$$

$$\therefore y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y(L) = \underline{C_2}\, \underline{\sin kL} = 0$$

If $c_2 = 0 : y = 0$ **이므로 trivial solution.**

$$\therefore c_2 \neq 0\ , \sin kL = 0$$

$$\therefore kL = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots$$

If $kL = 0 : k = 0\ (\because L \neq 0)$ ⇨ **Case I : trivial sol.**

$$\therefore kL = n\pi,\ n = 1, 2, 3\ldots$$

$$\therefore y_n = C_2 \sin kx = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L},\ n = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

2) 해가 존재할 때 Eigenvalues를 쓰시오.

[답]

$$\lambda_n = k_n^{\ 2} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

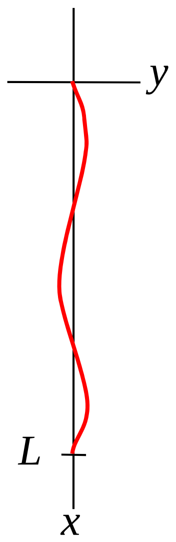
3) 해가 존재할 때 Eigenfunctions를 쓰시오.

[답]

$$y_n = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L},\ n = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

4) 제 3 좌굴모드 (Third Buckling Model)에 대한 그래프의 개형을 그리시오.

[답]



n=3

5) 4)에서 변위(y)가 발생하지 않는 지점 x를 모두 구하시오.

[답]

$$x = \frac{1}{3}L, \frac{2}{3}L$$

문제 10. 보기 6은 1변수 함수의 최소값을 구할 때 과정과 조건에 관한 설명이다. 설명을 읽고 물음에 답하시오.

변수가 하나일 때, 극값을 가질 필요 조건 : $f'(x^*) = 0$

주어진 점 x^* 에서 $f(x)$ 의 테일러 급수는 다음과 같다.

$$f(x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2}(x - x^*)^2 + \boxed{R}$$

나머지항(Remainder)
: x가 x^* 에 충분히 가까우면 그 값이 매우 작음

$x - x^* = d$ 라고 놓으면

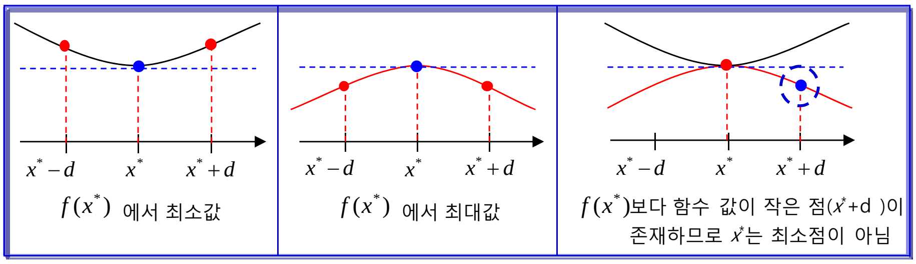
$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)d + \frac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R$$

함수 값의 변화량 $f(x) - f(x^*) = \Delta f(x)$

$$\Delta f(x) = f'(x^*)d + \frac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x^*) = f'(x^*)d + \frac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R$$ ➡ 의미 : x^*에서의 함수 값이 $x^*\pm d$에서의 함수 값보다 작으면 x^*는 국부적 후보 최소점이 될 가능성이 있음

$x = x^*$ 에서 국부적 후보 최소점이기 위해서는 $\Delta f \geq 0$



따라서, $d(= x - x^*)$ 의 부호에 상관없이 $\Delta f \geq 0$ 를 만족하려면 $f'(x^*) = 0$ 이어야 함

이와 유사한 개념으로 $x = x^*$에서 국부적 후보 최대점이 되기 위해서는 $\Delta f \leq 0$ 이어야 하며,

$d(= x - x^*)$ 의 부호에 상관없이 $\Delta f \leq 0$ 를 만족하려면 $f'(x^*) = 0$이어야 함

cf) $f'(x^*) = 0$ 를 만족하는 점 : 국부적으로 최소, 최대, 또는 변곡점, 총칭하여 상점(Stationary point)이라고 함

상점 중 어느 점이 최소점인지 결정하는 방법

상점이므로, $f'(x^*) = 0$. 따라서, $\Delta f(x) = \frac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R$

2차항이 다른 모든 고차항에 비해 지배적인 항이므로 $d\neq0$에 대하여 다음 조건을 만족하면 항상 $\Delta f \geq 0$

$f''(x^*) > 0$ (충분 조건(Sufficient condition))

보기 6

1) 2변수 함수 $f(x_1, x_2)$에 대한 점 (x_1^*, x_2^*)에서의 테일러 전개식을 쓰시오.

[답]

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*)^2\right) + R$$

2) 테일러 전개식의 일차 미분항과 2차 미분항을 각각 매트릭스 형식으로 나타내시오.

단, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ 이며, 매트릭스 기호와 elements를 모두 쓰시오.

[답]

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) + R$$

$$\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2-x_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1-x_1^*) \\ (x_2-x_2^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1-x_1^* \\ x_2-x_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_2-x_2^*)\right)(x_1-x_1^*) + \left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)\right)(x_2-x_2^*)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_2-x_2^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-x_1^* \\ x_2-x_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1-x_1^* & x_2-x_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-x_1^* \\ x_2-x_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)$$

3) 보기 6의 설명을 참고하여 함수 $f(x_1, x_2)$ 가 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ 에서 최소이기 위한 충분 조건을 쓰시오.

[답]

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) + R$$

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}^*) + \boxed{\nabla f(\mathbf{x}^*)^T}\,\mathbf{d} + \boxed{\frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}} + R$$

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}^*)^T = 0,\ \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} > 0} \Rightarrow$$ **$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$에서 최소이기 위한 충분 조건**

문제 11. 보기 7은 행렬의 SVD (Singular Value Decomposition) 과정을 보여주고 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \sigma_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{A}\mathbf{V} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{-1} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$\text{rank } \mathbf{A} = r \le \min(n, m) \qquad cf.\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_m$ in $\mathbf{U}$ are eigenvectors of $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,

$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ in $\mathbf{V}$ are eigenvectors of $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$

$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r \mathbf{u}_{r+1} \cdots \mathbf{u}_m \end{bmatrix}$:orthonormal

$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_r \mathbf{v}_{r+1} \cdots \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$:orthonormal

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ & & \end{bmatrix} : \text{diagonal}(m \times n)$$

보기 7

1) 다음 주어진 A에 대해 SVD를 수행하시오.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[답]

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \therefore \lambda = 3, 2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}$$

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,\ x_2 = 0, \text{choose } x_1 = 1, \therefore \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,\ x_1 = 0, \text{choose } x_2 = 1, \therefore \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\because \mathbf{u}_3 \perp \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \perp \mathbf{u}_1)$$

$$\begin{cases} u_{31} + u_{32} - u_{33} = 0 \\ \quad u_{32} + u_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{choose } u_{33} = 1, \text{then} \quad u_{32} = -1, u_{31} = 2$$

$$\therefore \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

문제 12. 함수 $f(x)=e^x$ 를 다음의 Boundary Value Problem의 Eigenfunctions을 이용하여 전개하려고 한다. $y''+\lambda y=0 \quad ;\lambda>0,\ y'(0)=0,\ y(\pi)=0$

1) 주어진 Boundary Value Problem을 무슨 problem 이라고 하는지 명칭을 영어로 쓰시오.

[답]

Sturm-Liouville problem

2) Eigenvalues λ_n 를 구하시오.

[답]

$$
\begin{aligned}
& y''+\lambda y=0 \quad ;\lambda>0,\ y'(0)=0,\ y(\pi)=0 \\
& \text{when } \lambda>0, \text{ write } \lambda=\alpha^2,\ \alpha>0 \\
& \text{let, } y=e^{mx} \\
& (m^2+\alpha^2)e^{mx}=0 \\
& \therefore m=\pm i\alpha \\
& \to y=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x \\
& y'(0)=c_2=0 \\
& y(\pi)=c_1\cos\alpha\pi=0 \\
& \therefore \alpha=\frac{(2n-1)}{2}, \quad \lambda_n=\alpha_n{}^2=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2, n=1,2,3,\dots
\end{aligned}
$$

3) Eigenfunctions e_n 를 구하시오.

[답]

$$e_n=c_1\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\ , n=1,2,3,\dots$$

4) 주어진 문제를 다음과 같은 Self-adjoint 형식과 비교할 때 weight function을 구하시오.

$$\frac{d}{dx}[r(x)y']+[q(x)+\lambda p(x)]y=0$$

[답]

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}[1\cdot y']+[0+\lambda\cdot 1]y=0 \\
& r(x)=1 \\
& q(x)=0 \\
& p(x)=1 \\
& \text{Weight functions : } p(x)=1
\end{aligned}
$$

5) 주어진 함수를 3)의 Eigenfunctions을 이용하여 전개할 때 c_n 을 구하시오.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n(x)$$

[답]

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)w(x)e_n(x)dx}{\int_a^b w(x)e_n^2(x)dx}$$

$$\int_a^b f(x)w(x)e_n(x)dx=\int_0^{\pi} e^x\cdot 1\cdot\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx\cdots(1)$$

$$\int_a^b w(x)e_n^2(x)dx=\int_0^{\pi} 1\cdot\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)^2 dx\cdots(2)$$

(1)

$$\int_0^{\pi} e^x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx=\left[\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\cdot e^x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)e^x dx$$

$$=\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\cdot e^{\pi}-\frac{2}{2n-1}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)e^x dx$$

$$=\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\cdot e^{\pi}-\frac{2}{2n-1}\left\{\left[-\frac{2}{2n-1}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\cdot e^x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{2}{2n-1}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)e^x dx\right\}$$

$$\therefore\int_0^{\pi} e^x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx=\frac{-1}{\left(1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^n\cdot e^{\pi}+1\right\}$$

$$=\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\cdot e^{\pi}-\frac{2}{2n-1}\left\{\left(\frac{2}{2n-1}\right)+\frac{2}{2n-1}\int_0^{\pi} e^x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx\right\}$$

$$=\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\cdot e^{\pi}-\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\int_0^{\pi} e^x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx$$

$$\left(1+\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\right)\int_0^{\pi} e^x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx=\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\cdot e^{\pi}-\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2$$

$$\int_0^{\pi} e^x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)xdx=\frac{\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\right)}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}\cdot e^{\pi}-1\right\}$$

(2)

$$\int_0^{\pi}\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos 2\left(n-\frac{1}{2}\right)x+1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x+x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\pi$$

$$\therefore C_n=\frac{2}{\pi}\frac{-1}{\left(1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^n\cdot e^{\pi}+1\right\}=-\frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$$

6) 최종적으로 전개된 $f(x)$ 을 쓰시오.

[답]

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e_n(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

$$or,\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e_n(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n e^{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

문제 13. 보기 8은 Fourier Series의 정의이다. 이것을 이용하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$$

보기 8

1) 보기 8의 Fourier Series를 complex 형식으로 바꾸어 $f(x), C_n$ 의 식을 모두 쓰시오.

[답]

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi x/p}\quad ,c_n=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)e^{-in\pi x/p}dx\ \ ,n=0,\pm1,\ \pm2,...$$

2) Complex 형식을 이용하여 $f(x)=e^{-x},\ -\pi<x<\pi$ 을 전개할 때 C_n 을 구하시오.

[답]

with $p=\pi$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-(in+1)x}dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi(in+1)}[e^{-(in+1)\pi}-e^{(in+1)\pi}]$$

since $\cos n\pi=(-1)^n$ *and* $\sin n\pi=0$

$$c_n=(-1)^n\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2(in+1)\pi}=(-1)^n\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2}\frac{1}{\pi}\frac{1}{(in+1)}=(-1)^n\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1-in}{n^2+1}$$

3) Fourier Complex 형식으로 전개한 $f(x)$ 식을 쓰시오.

[답]

$$f(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1-in}{n^2+1}e^{inx}$$

4) Fundamental angular frequency ω를 구하시오.

[답]

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2p}=\frac{\pi}{p}=\frac{\pi}{\pi}=1$$

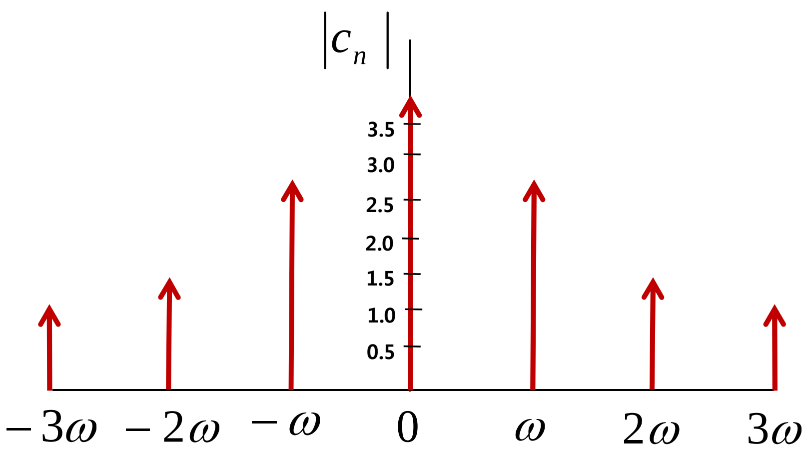
5) $n=0,\pm1,\pm2,\pm3$ 일 때 $|C_n|$의 값을 구하시오.

[답]

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert c_n\rvert$	1.162	1.644	2.599	3.676	2.599	1.644	1.162

6) Frequency Spectrum을 그래프로 표시하시오.

[답]



문제 14. 보기 9는 Fourier Cosine Transform 과 Sine Transform이다. 이것을 이용하여 다음 주어진 $f(x)$ 에 대한 Fourier Transform을 수행할 때 물음에 답하시오.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x| < 1 \\ 0, & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

보기 9

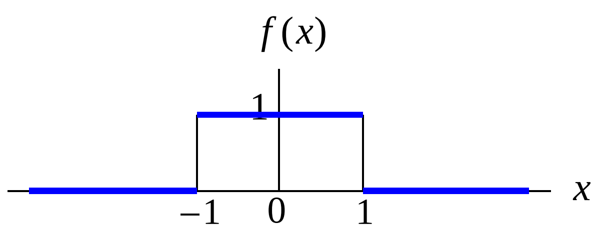
1) 보기 9에서 어떠한 식을 사용해야 하는지 답하고 그 이유를 쓰시오.

[답]

주어진 함수가 우함수(even function) 이므로 Fourier Cosine Transform을 사용한다.

2) $f(x)$ 를 그래프를 그리시오

[답]



3) $\hat{f}(\omega)$ 를 구하시오.

[답]

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \cos \omega x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left. \frac{\sin \omega x}{\omega} \right|_0^1 \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$$

4) Fourier Transform을 수행한 $f(x)$ 식을 쓰시오.

[답]

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega$$

5) Fourier Transform 결과를 이용하여 다음 적분 값을 구하시오.

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

[답]

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega$$

$$\frac{\pi}{2}f(x)=\int_0^\infty \frac{\cos\omega x\sin\omega}{\omega}d\omega=\begin{cases}1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ , & |x|<1\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}, & x=1\\ 0\cdot\frac{\pi}{2}=0, & x>1\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}\ (x=0)$$

문제 15. 다음의 보기 10은 시간 영역에서 이산(discrete) 신호를 주파수 영역에서 스펙트럼으로 표현하는 Discrete Fourier Transform (DFT)의 정의이다. 이것을 매트릭스 형태로 표현하면 보기 11과 같다. 많은 양은 DFT 신호를 계산하기 위해서는 보기 11의 매트릭스를 빠르게 계산하는 알고리듬이 필요하다. 이 알고리듬을 Fast Fourier Transform (FFT) 라고 하며 계산 과정은 보기 12와 같다. 보기 13은 4개의 이산 신호에 대해 FFT를 수행하는 예를 보여준다.

$$f(x) \to q(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{inx}$$

where, $f(x_k) = q(x_k)$

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-inx_k}$$

$$\hat{f}_n = N c_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-inx_k}$$

Discrete Fourier Transform

보기 10

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{nk}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_N \mathbf{f}$$

where $n, k = 0, 1, \cdots, N-1$

$$w = w_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

$$e_{nk} = e^{-inx_k} = e^{-\frac{2\pi i}{N}nk} = w^{nk}$$

보기 11

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{nk}$$

Divide even and odd $\quad M = \frac{N}{2}$

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kn} f_{\mathrm{ev},k} + w_N^n \sum_{k=0}^{M-1} w_M^{kn} f_{\mathrm{od},k}$$

find even and odd solution

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{ev}} = \mathbf{F}_M \mathbf{f}_{\mathrm{ev}} \qquad \hat{\mathbf{f}}_{\mathrm{od}} = \mathbf{F}_M \mathbf{f}_{\mathrm{od}}$$

find original solution

$$\text{(22a)}\cdots \quad \hat{f}_n = \hat{f}_{\mathrm{ev},n} + w_N^n \hat{f}_{\mathrm{od},n}$$

$$\text{(22b)}\cdots \quad \hat{f}_{n+M} = \hat{f}_{\mathrm{ev},n} - w_N^n \hat{f}_{\mathrm{od},n}$$

$$0 \le n < \frac{N-1}{2}$$

보기 12

Divide even and odd

$$\mathbf{f} = [0\ 1\ 4\ 9]^{\mathrm{T}}$$

find even and odd solution

$$\hat{\mathrm{f}}_{\mathrm{ev}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{ev,0} \\ \hat{f}_{ev,1} \end{bmatrix} = \mathrm{F}_2 \mathrm{f}_{\mathrm{ev}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + (-1)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

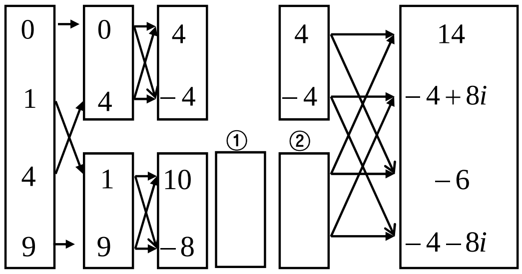
$$\hat{\mathrm{f}}_{\mathrm{od}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{od,0} \\ \hat{f}_{od,1} \end{bmatrix} = \mathrm{F}_2 \mathrm{f}_{\mathrm{od}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 9 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

find original solution

$$\begin{aligned}
\hat{f}_0 &= \hat{f}_{\mathrm{ev},0} + w_N^0 \hat{f}_{\mathrm{od},0} = 4 + 1\cdot 10 &&= 14 \\
\hat{f}_1 &= \hat{f}_{\mathrm{ev},1} + w_N^1 \hat{f}_{\mathrm{od},1} = -4 + (-i)\cdot(-8) &&= -4 + 8i \\
\hat{f}_2 &= \hat{f}_{\mathrm{ev},0} - w_N^0 \hat{f}_{\mathrm{od},0} = 4 - 1\cdot 10 &&= -6 \\
\hat{f}_3 &= \hat{f}_{\mathrm{ev},1} - w_N^1 \hat{f}_{\mathrm{od},1} = -4 - (-i)\cdot(-8) &&= -4 - 8i
\end{aligned}$$

보기 13

1) FFT 알고리듬을 적용한 보기 13의 계산 과정을 다음과 같이 표현할 때 ①과 ②에 해당하는 값을 각각 쓰시오



[답]

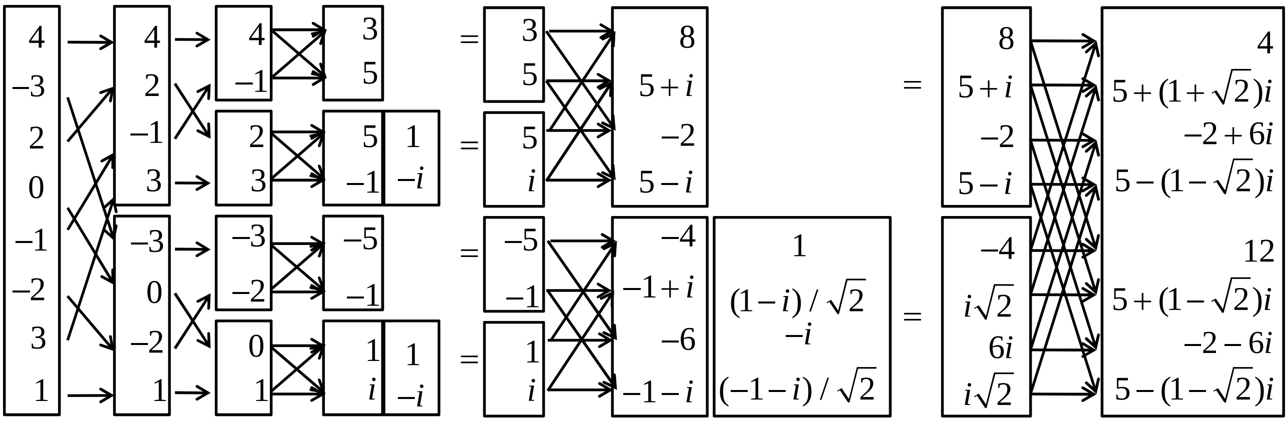
①$1,\ -i$

②$10,\ 8i$

2) 다음의 8개의 입력 신호에 대해 FFT 알고리듬을 적용하는 계산 과정을 1)과 같은 형식으로 보이시오.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

[답]



문제 16. 그림 4와 같이 가장자리가 고정되어 있는 반지름이 c 인 원형 막(circular membrane)이 있다. 초기 변위와 초기 속도가 각각 $f(r), g(r)$ 로 주어질 때, 변위 $u(r,t)$ 를 구하고자 한다. 다음 물음에 답하시오.

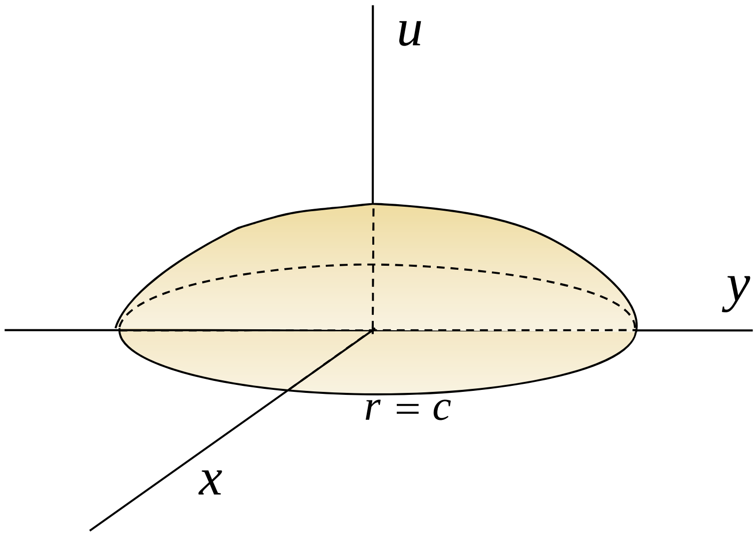


그림 4

1) 이 문제의 지배 방정식(governing equation)은 직교 좌표계(Cartesian coordinates)로는 $a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 와 같다. 이 Equation의 명칭을 쓰고, 극 좌표계(polar coordinates)로 바꾸어 나타내시오. (이하 극 좌표계를 사용하시오)

[답]

위의 Equation은 2-D Wave equation 이며 polar coordinate로 나타내면 다음과 같다.

$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x}$ 이므로,

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \cdots (a) \\
u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\
&= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\
&= (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + u_\theta \theta_{xx} \quad \cdots (b)
\end{aligned}
$$

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \theta_x=\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{r^2}$$

$r_{xx}=\frac{r-xr_x}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}=\frac{y^2}{r^3},\quad \theta_{xx}=-y\left(-\frac{2}{r^3}\right)r_x=\frac{2xy}{r^4}$ 를 식 (b)에 대입하면,

$$u_{xx}=\frac{x^2}{r^2}u_{rr}-2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta}+\frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta}+\frac{y^2}{r^3}u_r+2\frac{xy}{r^4}u_\theta$$

마찬가지 방법으로 u_{yy} 를 구하면 다음과 같다.

$$u_{yy}=\frac{y^2}{r^2}u_{rr}-2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta}+\frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta}+\frac{c^2}{r^3}u_r+2\frac{xy}{r^4}u_\theta$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\therefore a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ "2-D wave equation in polar coordinate"

2) 경계 조건(boundary condition)과 초기 조건(initial condition)을 식으로 나타내시오.

[답]

$u(c,t)=0,\ t>0$: boundary condition

$u(r,0)=f(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r),\ 0<r<c$: initial condition

3) 구하고자 하는 해 $u(r,t)$ 의 형태를 어떻게 가정하는가? (Hint : product method)

[답]

$u=R(r)\Theta(\theta)T(t)$

4) 3)의 해의 형태를 가정할 때 angular coordinate θ 는 생략할 수 있다. 그 이유를 간단히 설명하시오.

[답]

u 가 같은 반지름에서는 모두 같은 값을 가지기 때문에(반지름 방향으로 대칭) θ 에 독립인 함수이다.

5) 3)의 해를 형태를 가정하면 지배 방정식으로부터 식(1), 식(2)와 같은 두 개의 2계 상미분 방정식을 얻는다. 그 과정을 유도 하시오. (단, $\lambda=\alpha^2>0$)

$$rR''+R'+\lambda rR=0 \quad \cdots(1)$$

$$T''+a^2\lambda T=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

[답]

반지름 방향으로 대칭이므로, $u=R(r)T(t)$ 로 가정할 수 있다.

Separation of variable을 이용하면

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda$$

각각 R 과 T 에 대해서 정리하면

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$$

$$rR'' + R' + r\lambda R = 0 \cdots (1)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \cdots (2)$$

6) 식(1)은 Parametric Bessel Differential Equation의 형태이고 일반 해는 보기 14와 같다. 이 때 Boundary condition을 적용하여 해의 계수를 평가하고 결과에 따라 해를 다시 쓰시오.

$$R = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r)$$

$$J_0(\alpha r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+n)} \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{2n}$$

$$Y_0(\alpha r) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(\alpha r)\left(\ln\frac{\alpha r}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2}(\alpha r)^{2m} \right] (h_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m})$$

보기 14

[답]

$u(r,t)$ 는 r=0에서 정의 되어야 한다.

$\lim_{r \to +0} Y_0(\alpha r) = -\infty$ 이므로 $c_2 = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore R = c_1 J_0(\alpha r)$$

7) J_0 가 0이 되는 값을 x_n 이라고 할 때, 6)의 해가 trivial solution이 되지 않는 Eigenvalues λ 를 구하시오.

[답]

Boundary condition에 의해 $c_1 J_0(\alpha c) = 0$ 이고 $c_1 = 0$ 이면 trivial solution이므로,

$$J_0(\alpha c) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{x_n}{c}, \ \lambda_n^{\ 2} = \alpha_n^{\ 2} = \frac{x_n^{\ 2}}{c^2}$$

8) 7)의 결과로부터 Eigenfunctions을 쓰시오.

[답]

Eigenfunction은 $c_1 J_0(\alpha_n r) = c_1 J_0(\frac{x_n}{c} r)$ 이다.

9) 7)의 결과를 이용하여 식 (2)의 일반 해를 구하시오

[답]

$\lambda = \alpha^2$ 로 놓으면, 특성방정식 $m^2 + (a\alpha)^2 m = 0$ 이 허근을 가지므로 general solution은 다음과 같다.

$T = c_3 \cos a\alpha t + c_4 \sin a\alpha t$

10) 8)과 9)의 결과를 이용하여 $u(r,t)$ 의 일반해를 쓰시오.

[풀이]

$$u_n = R(r)T(t) = (A_n \cos a\alpha_n t + B_n \sin a\alpha_n t) J_0(\alpha_n r)$$

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\alpha_n t + B_n \sin a\alpha_n t) J_0(\alpha_n r)$$

11) Initial condition을 적용하여 $u(r,t)$ 의 계수를 구하시오. 필요하면 보기 15중 해당되는 식을 사용하시오.

[답]

주어진 initial condition($t = 0,\ u(r,0) = f(r)$)에 의해

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)$$

$$A_n = \frac{2}{c^2 J_1^{\,2}(\alpha_n c)} \int_0^c r J_0(\alpha_n r) f(r) dr$$

$t = 0,\ u_t(r,0) = g(x)$ 에 의해

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a\alpha_n B_n J_0(\alpha_n r)$$

$$B_n = \frac{2}{a\alpha_n c^2 J_1^{\,2}(\alpha_n c)} \int_0^c r J_0(\alpha_n r) g(r) dr$$

Fourier-Bessel Series

The Fourier-Bessel series of a function f defined on the interval $(0,b)$ is given by

1) α_i are defined by $J_n(\alpha_i b)=0$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \qquad ,c_i=\frac{2}{b^2 J^2{}_{n+1}(\alpha_i b)}\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)f(x)dx$$

2) α_i are defined by $hJ_n(\alpha b)+\alpha bJ_n'(\alpha b)=0$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \qquad ,c_i=\frac{2\alpha_i^2}{(\alpha_i^2 b^2-n^2+h^2)J_n^2(\alpha_i b)}\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)f(x)dx$$

3) α_i are defined by $J_n'(\alpha b)=0$

$$f(x)=c_1+\sum_{i=2}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \qquad ,c_1=\frac{2}{b^2}\int_0^b xf(x)dx$$

$$,c_i=\frac{2}{b^2 J_0^2(\alpha_i b)}\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)f(x)dx$$

보기 15

12) 이 원형 막이 그림 5와 같은 standing wave의 진동을 할 때 (n=3), J_0의 그래프를 이용하여 막의 중심부터 점 P까지의 거리를 구하시오.

.

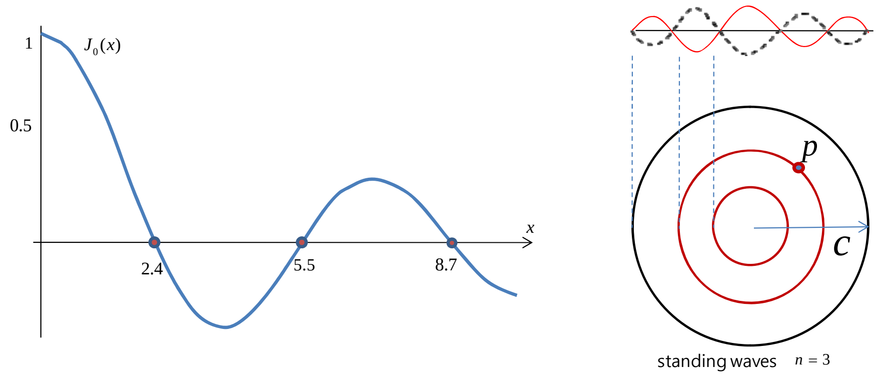


그림 5

[답]

$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos a\alpha_n t+B_n\sin a\alpha_n t)J_0(\alpha_n r)$ 이고 $J_0(\alpha_n r)$ 는 시간에 따라 변하는 Amplitude $A_n\cos a\alpha_n t+B_n\sin a\alpha_n t$ 를 가진 Standing wave로 나타난다.

$J_0(\alpha_n r)=0$ 이 되는 부분을 Nodal line이라고 하는데 이는 standing wave의 motion이 없는 부분이다.

$J_0(\alpha_n c)=0$ 이 되는 양의 근 $\alpha_n c = x_n$ 로 놓으면 $\alpha_n = \dfrac{x_n}{c}$ 이다.

따라서 $J_0(\alpha_n r) = J_0\left(\dfrac{x_n}{c} r\right) = 0$

그래프에 의하면 $x_1 = 2.4,\ x_2 = 5.5,\ x_3 = 8.7$ 이다.

$n=3$ 일 때 $J_0\left(\dfrac{x_3}{c} r\right) = 0$ 인 nodal line은 $r = \dfrac{x_1 c}{x_3} = \dfrac{2.4c}{8.7}$, $r = \dfrac{x_2 c}{x_3} = \dfrac{5.5c}{8.7}$ 에 해당하는 원이다.

p점은 $r = \dfrac{x_2 c}{x_3} = \dfrac{5.5c}{8.7}$ 에 해당한다.

문제 17. 보기 16은 Residue의 정의를 설명하고 있다. Residue를 이용하여 보기 17과 같은 적분값을 구할 수 있다.

The purpose of Cauchy's residue integration: the evaluation of integrals

$$\oint_C f(z)dz$$

If $f(z)$ has a singularity at a point $z = z_0$ inside C, but is otherwise analytic on C and inside C, then $f(z)$ has a Laurent series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

that converges for all points near $z = z_0$ (except at $z = z_0$ itself), in some domain of the form $0 < |z - z_0| < R$

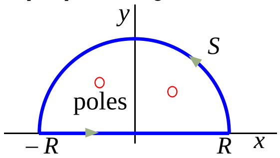
Now comes the key idea. The coefficient b_1 of the first negative power $1/(z - z_0)$ of this Laurent series is given by the integral formula (2) with $n = 1$, namely,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz.$$

The coefficient b_1 is called the residue of $f(z)$ at $z = z_0$.

보기 16

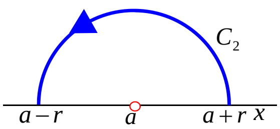
Improper Integral



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

Simple Poles on the Real Axis

If $f(z)$ has a simple pole at $z = a$ on the real axis, then



$$\lim_{r \to 0} \int_{C_2} f(z)dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

보기 17

1) 보기 16과 17을 이용하여 다음 적분 값을 구하시오.

$$\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)}$$

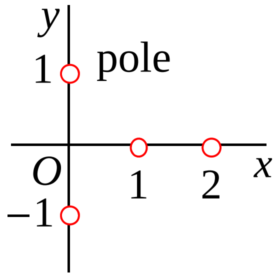
[답]

Since $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x+i)(x-i)}$,

$z=1$, $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\left[\dfrac{1}{(z-2)(z^2+1)}\right]_{z=1}=-\dfrac{1}{2}$:real axis

$z=2$, $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\left[\dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}\right]_{z=2}=\dfrac{1}{5}$:real axis

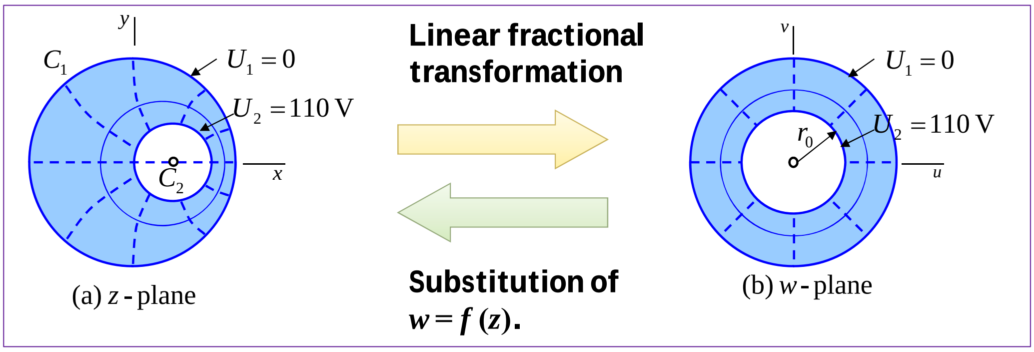
$z=i$, $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\left[\dfrac{1}{(z^2-3z+2)(z+i)}\right]_{z=i}=\dfrac{1}{6+2i}=\dfrac{3-i}{20}$:upper half-axis



from pr.v.$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z)+\pi i\sum \operatorname{Res} f(z)$

$\therefore$ pr.v.$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}=2\pi i\left(\dfrac{3-i}{20}\right)+\pi i\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{\pi}{10}$

문제 18. 보기 18의 (a)와 같은 단면을 가진 전도체 내부의 전압 분포를 Conformal Mapping을 이용하여 구하고자 한다. 물음에 차례대로 답하시오.



보기 18

1) 원판의 영역을 원판의 영역으로 매칭하는 관계식은 $w = \dfrac{z-b}{bz-1}$ 와 같다. z-plane에서의 경계 $C_1 = |z| = 1,\ C_2 : |z - 2/5| = 2/5$를 각각 $|w| = 1,\ |w| = r_0$로 매핑할 때 r_0, b의 값을 구하시오.

[답]

0 and 4/5 should be mapped onto r0 and –r0, respectively. This gives by $w = \dfrac{z-b}{bz-1}$,

$$r_0 = \frac{0-b}{0-1} = b,\ -r_0 = \frac{4/5-b}{4b/5-1} = \frac{4/5-r_0}{4r_0/5-1}$$

$$-r_0(4r_0/5-1) = 4/5 - r_0$$

$$2r_0^{\ 2} - 5r_0 + 4 = 0$$

$$(2r_0-1)(r_0-2) = 0$$

$$\therefore r_0 = 2,\ \frac{1}{2}$$

단위 원 내의 값을 가져야 하므로 $r_0 = b = \dfrac{1}{2}$

2) 복소 평면에서 해석적인 포텐셜 함수는 라플라스 방정식을 만족하고, 보기 18의 (b)와 같이 동심원을 경계로 하는 단면에서 극좌표계로 표현된 라플라스 방정식은 다음과 같다. 문제와 같이 각도에 대해 해가 대칭일 경우 라플라스 방정식을 다시 쓰시오.

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0$$

[답]

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \ \because \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0$$

3) 라플라스 방정식을 풀고 경계 조건을 사용하여 w-plane에서 포텐셜 $\Phi^*(w)$ 을 구하시오.

[답]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0$$

$$\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' = 0$$

$$\int \frac{\Phi''}{\Phi'}dr = -\int \frac{1}{r}dr$$

$$\int \frac{d\Phi'}{\Phi'} = -\int \frac{1}{r}dr \left(\because \Phi'' = \frac{d\Phi'}{dr}\right)$$

$$\ln\Phi' = -\ln r + \tilde{a} = -\ln r + \ln a$$

$$e^{\ln\Phi'} = e^{-\ln r + \ln a} = e^{\ln\frac{a}{r}} = \frac{a}{r}$$

$$\Phi' = \frac{a}{r}$$

$$\int \Phi' dr = \int \frac{a}{r}dr$$

$$\therefore \Phi = a\ln r + b$$

$$\to \Phi^*(w) = a\ln r + b = a\ln|w| + b$$

$$\Phi^*(w) = a\ln r + b = a\ln|w| + b$$

if $|w| = 1$, then

$$\Phi*(1) = a\ln 1 + k = 0, \therefore k = 0$$

if $|w| = r_0 = 1/2$, then

$$\Phi*(1/2) = a\ln\frac{1}{2} = 110$$

$$a = \frac{110}{\ln(1/2)} = -\frac{110}{\ln 2} = -158.7$$

$$\therefore \Phi*(w) = -158.7 \ \ln\ |w|$$

4) 매핑 관계식을 사용하여 z-plane에서의 포텐셜 $\Phi(z)$ 를 구하시오.

[답]

$$\Phi(z) = \Phi*\left(\frac{2z-1}{z-2}\right) = -158.7 \ \ln\ \left|\frac{2z-1}{z-2}\right|$$

문제 19. 다음은 베이징 대학 부설 '디테일경영연구소' 왕중추 소장의 인터뷰 내용 중 일부를 발췌한 것이다.(조선일보 2008년 12월 13일자). 글을 읽고 200자 미만으로 소감을 쓰시오.

현재 베이징(**北京**)대 부설 디테일경영연구소(**精細化管理研究中心**) 수석컨설턴트(연구소장 격)로 일하고 있는 그를 지난 8일 오후 베이징에서 만났다. 한국 언론과 갖는 인터뷰는 이번이 처음이라고 했다. 스포츠형으로 짧게 깎은 머리와 형형한 눈빛에서 강인함이 느껴졌다. 그는 "100 빼기 1은 99가 아니라 0"이라고 말했다. "100가지를 잘 해도 단 하나를 실수하면 전체가 실패할 수 있기 때문이지요." —디테일 문제를 집요하게 파고들게 된 이유는 무엇인지요? "중국 사람들은 일을 대충대충 하는 경우가 많아요. 예전에 데리고 있던 비서는 제가 가져오라는 서류를 한 번도 제대로 가져온 적이 없었습니다. 부하 직원이 적당히 한 일이 잘못돼 제가 다시 고치느라 시간을 허비한 적도 한두 번이 아닙니다. 어떤 회사에서는 중요한 협상 내용이 담긴 팩스를 보내야 하는데, 실수로 단축번호를 잘못 눌러 경쟁업체에 정보를 고스란히 갖다 바친 적도 있었어요. 그로 인한 손실은 그 직원의 몇 년치 연봉보다 더 컸죠. 이래서는 도저히 안 되겠다는 생각에 디테일에 관한 책을 여러 권 쓰고 강연도 하게 됐습니다. 유능한 사원과 무능한 사원, 초일류 기업과 아닌 기업, 선진국과 후진국의 차이는 모두 디테일에서 비롯됩니다. '대충대충 적당히'는 절대 안 됩니다." —'작은 일에 충실하라'는 평범한 말이 이렇게 큰 화제가 된 이유는 무엇일까요? "큰 성공을 이루기 위한 열쇠는 디테일(중국어로는 '시제'·**細節**)에 있습니다. 이 세상에 큰일을 할 수 있는 사람은 소수입니다. 대부분은 자잘하면서 단순한 일을 반복하며 살아가죠. 그것이 생활이고 일입니다. 지금 같은 치열한 경쟁 시대는 웅대한 지략을 품은 전략가보다는 작고 평범한 일도 꼼꼼하게 처리하는 관리자가 필요하다고 봅니다." 무조건 일만 열심히 할 것이 아니라 우선 전략과 방향을 제대로 잡은 다음에 움직여야 하지 않나요? "원대한 전략도 결국 세세한 디테일에서 시작됩니다. 혁신적인 기업으로 유명한, 중국 최대의 전자회사 하이얼그룹의 장루이민(**張瑞敏**) 회장도 '혁신은 기업의 모든 디테일한 부분에서 나온다'고 강조합니다. 저는 '닭 잡을 때도 소 잡는 칼을 쓰라'고 합니다. 그만큼 정성을 기울여야 한다는 말이죠. 사람들의 태도와 정신을 바꾸는 것이 제일 중요합니다. 처음에는 불편해도 스스로에게 강제하고 단계적으로 반복 훈련을 하면 습관이 됩니다. 습관은 한 번 들이기는 어렵지만 나중에는 자연스럽고 편안해지죠. 개인뿐 아니라 조직이나 기관도 이런 식으로 변해야 합니다."

■'대충대충, 적당히'는 망하는 지름길 그러나 왕중추(**汪中求**) 소장은 "대장부는 사소한 일에 신경 쓰지 않는다"는 식의 중국인의 전통적인 사고 방식을 신랄히 비판했다. 1%만 어긋나도 전체 일을 망칠 수 있다는 것이다. "하이얼그룹의 장루이민 회장은 이렇게 말한 적이 있습니다. 일본인 직원에게 하루에 책상을 6번씩 닦으라면 그대로 하는데, 중국인 직원은 처음 이틀간은 6번 닦고 다음 날부터는 5번, 4번으로 차츰 횟수가 줄어든다고요. 중국산 제품이 해외에서 비싼 값에 팔리지 못하는 것은 다 이런 디테일이 부족하기 때문입니다."

.■위대한 전략도 세세한 디테일을 챙기는 것에서 시작된다 —요즘 경영자들은 창의성과 혁신을 강조하는 추세입니다. 디테일을 지나치게 강조하면 창의성을 억압하지 않을까요? "아주 좋은 질문입니다. 모든 일에는 정도(**程度**)가 있어요. 작고 사소한 부분까지 모두 완벽한 사람은 이 세상에 없습니다. 모든 고객을 만족시키기도 불가능하죠. 하지만 디테일은 태도에 관련된 문제입니다. 일을 잘 해내고 싶은 욕구, 완벽함을 추구하는 마음이 있어야 합니다.

■왕중추에 귀 기울이는 한국 경영자들 '대충대충'과 '적당주의'가 지배해온 한국에서도 왕중추 소장의 '디테일 경영론'에 귀를 기울이는 경영자가 많다. 이웅열 코오롱장세주 동국제강 회장도 올 초 신입사원 94명 전원에게 이 책을 선물했다. 권영수 LG디스플레이 사장은 이 책에 대해 "지위가 올라가다 보면 '큰 그림을 본다'는 미명 아래 자꾸 작은 것을 놓치기 시작하는데, 그러면 매사에 정성이 없어져 결국은 큰 그림마저 놓치게 된다"는 소감을 밝혔다. "위대한 전략도 세세한 디테일에서 시작된다"는 왕중추 소장의 말에 중국 기업과 정부, 13억 인구가 귀를 기울이고 있다. 2시간에 걸친 인터뷰를 마치면서 가슴이 답답해졌다. 거대한 스케일의 중국, 디테일에 강한 일본 사이에 끼어있는 우리나라의 장래가 걱정됐기 때문이다. 중국이 스케일에 디테일까지 더한다면 우리는 과연 무엇으로 경쟁할 것인가? 그동안 우리는 너무 대범하게 살아온 것이 아닐까? 바둑 격언 중에 '착안대국, 착수소국(**着眼大局**, **着手小局**)'이란 게 있다. 대국적으로 생각하고 멀리 보는 것도 중요하지만, 실행할 때는 한 수 한 수 집중해 세세한 부분까지 놓치지 말아야 한다는 것이다.

문제 20. 다음의 보기 19는 선박의 운동방정식을 구하는 과정을 설명한 것이다.

뉴턴의 제 2법칙에 따라 선박의 운동방정식을 세우자. 이때, 선박에 작용하는 힘을 Body force와 Surface force로 나타내면 아래 식과 같다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{Body} + \mathbf{F}_{Surface}$$

문제 2-A)에서 구한 선박에 작용하는 유체력 $(\mathbf{F}_{Surface} = \mathbf{F}_{Fluid})$ 이 다음과 같다고 하자.

$$\mathbf{F}_{Fluid} = \mathbf{F}_{static} + \mathbf{F}_{F.K} + \mathbf{F}_{D} + \mathbf{F}_{R}\,.$$

이를 선박의 운동방정식에 대입하자.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} &= \sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{Body} + \mathbf{F}_{Surface} \\ &= \mathbf{F}_{gravity} + \mathbf{F}_{Fluid} \quad ,(F_{Body} = F_{gravity}) \\ &= \underbrace{\mathbf{F}_{gravity} + \mathbf{F}_{static}} + \underbrace{\mathbf{F}_{F.K} + \mathbf{F}_{D}} + \underbrace{\mathbf{F}_{R}} \\ &= \quad \mathbf{F}_{restoring} \quad + \quad \mathbf{F}_{exciting} \quad - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_{gravity}$ 와 $\mathbf{F}_{static}$ 의 합은 선박의 복원력 $\mathbf{F}_{restoring}$ 로 작용한다. $\mathbf{F}_{F.K}$ 와 $\mathbf{F}_{D}$ 는 해양파에 의한 외력 $\mathbf{F}_{exciting}$ 이다. $\mathbf{F}_{R}$ 은 선박의 운동에 의한 방사력(Radiation Force)으로써 선박의 가속도에 비례하는 $-\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}$ 와 선박의 속도에 비례하는 $-\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}$ 로 표현할 수 있다.

이제 선박의 Roll 운동 방정식을 고려해 보자.

$$\begin{aligned}I\ddot{\phi} &= \sum M = M_{body} + M_{surface} \\ &= M_{gravity} + M_{Fluid} \\ &= \underbrace{M_{gravity} + M_{static}} + \underbrace{M_{F.K} + M_{D}} + \underbrace{M_{R}} \\ &= \quad M_{restroing} \quad + \quad M_{exciting} \quad - I_A\ddot{\phi} - b\dot{\phi}\end{aligned}$$

$$,\begin{pmatrix} I_A : \text{added Mass moment of inertia} \\ \text{b:damping coeff.} \end{pmatrix}$$

보기 19

1) 보기 19의 설명에 이어서 그림 6을 참고하여 복원모멘트 복원모멘트 $M_{restoring}$ 을 유도 하시오.

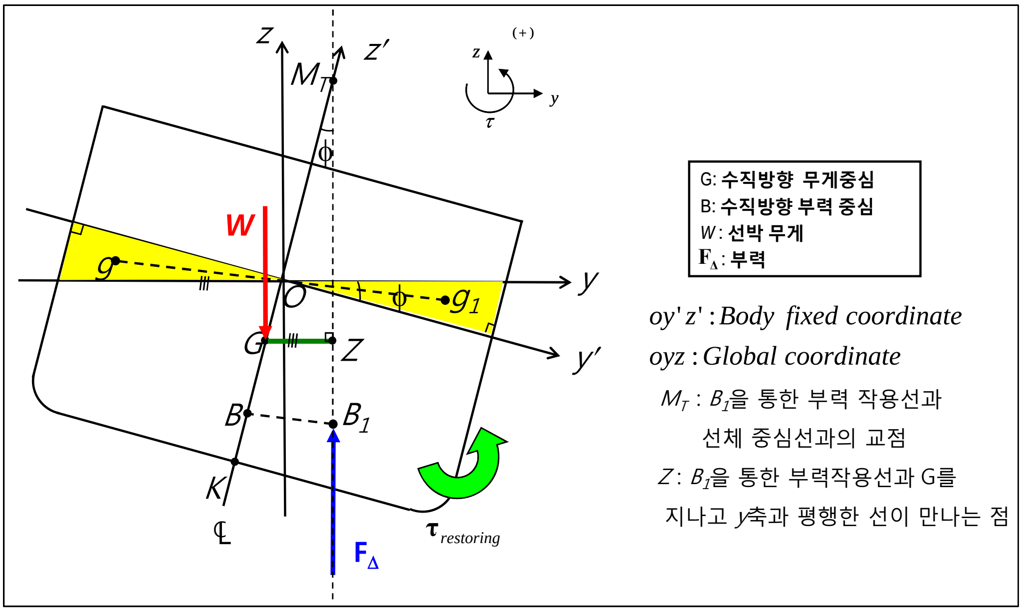


그림 6

[답]

부력과 중력에 의한 횡 복원 모멘트는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{restoring} = \Delta \cdot \overline{GZ}$$

만약, 경사 각도가 미소한 범위에서 메타센서(M_T)의 위치가 변하지 않는다고 하면 GZ는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{GZ} = \overline{GM_T} \cdot \sin|\phi|$$

따라서 위 식을 대입하면,

$$M_{restoring} = -\Delta \cdot \overline{GM_T} \sin\phi$$

여기서 (–)부호는 선박이 좌현으로 기울었을 때$(\phi < 0)$, 횡 복원 모멘트 $M_{restoring}$ 가 양수임을 의미한다.

경사각도가 미소하므로 $\sin\phi \approx \phi$로 가정하면, $M_{restoring}$ 은 다음과 같이 유도된다.

$$M_{restoring} = -\Delta \cdot \overline{GM_T}\phi$$

2) 1)의 과정 중에 선형화 (linearization)과정을 찾아서 Taylor Series 전개의 관점으로 설명하시오.

[답]

경사각도가 미소하다는 가정에서 Taylor 전개식의 첫 번째 항까지만 선택하여 sine 함수를 선형화한다.

$$\sin\phi = \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots \cong \phi$$

문제 21. 유체의 운동을 Eulerian 방법으로 기술할 때 속도는 다음과 같이 위치와 시간에 대한 함수로 표현된다.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$$

1) Taylor Series 전개를 이용하여 가속도 $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ 를 구하시오.

[답]

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$$

$$\mathbf{V}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) = \mathbf{V}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}dz + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}dt + H.O.T.$$

$$\mathbf{V}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) - \mathbf{V}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}dz + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}dt + H.O.T.$$

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}dz + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}dt + H.O.T$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + H.O.T$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + z\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + H.O.T$$

문제 22. 동역학, 유체역학, 재료역학의 차이를 Newton의 제 2법칙을 이용하여 비교하시오.

[답]

동역학, 유체역학, 재료역학은 모두 Particle의 운동을 기술하는 Newton의 제 2법칙이 적용된다. 을 기본으로 한다.

재료역학에서는 대상의 물체가 운동을 하지 않기 때문에 가속도 항이 0이고 대신 가해지는 외력에 의해 내부 particle의 위치가 변하면서 내부 에너지의 변화를 가져온다. 이에 비해 동역학은 외력에 의해 대상 물체가 가속도 운동을 하는 것으로, 대상 물체는 서로 간의 거리가 고정되어 있어서 자유도가 제한되어 있는 무수히 많은 particle의 집합으로 작용한다(rigid body). 유체 역학은 각 유체 입자의 운동에 Newton의 제 2법칙을 적용하면 가속도의 항이 시간에 대한 전미분 형태로 나타난다.

문제 23. 다음 문장 중 괄호에 알맞은 단어를 쓰시오.

사회 철학적 문제나 자연현상을 수학적으로 표현하면 (① **대수**)방정식 이나 (② **미분**)방정식 형태로 표현된다.

(② **미분**)방정식은 1차 또는 2차의 형태로 표현되는데 1차인 경우는 (③ **변화율**)을 다루는 것으로 대표적인 예로는 (④ 뉴톤의 **냉각법칙**)이나 (⑤ 맬서스의 **인구론**)을 들 수 있다.

2차인 경우는 (⑥ **역학**) 계를 다루는 문제로써 (⑦ **뉴톤의 제2**)법칙으로부터 유도된다.

-(끝. 수고하셨습니다.)-