

Quiz #1 Solution

1.

(1) $\omega^2 = gk \tanh kh$

$$\omega_A^2 = gk_A \tanh k_A h_A \rightarrow k_A = 0.1615$$

$$V_A = \frac{\omega_A}{k_A} = \boxed{7.78 \text{ m/s}}$$

<채점기준>

Total: 7 points

* 부분점수 설명

- Dispersion relation 적용한 경우 +2 points
- Wave number k를 정확히 구한 경우 +1 point
- 속도 관계식을 잘 적용한 경우 +2 points
- 최종 답안을 적절히 구한 경우 +2 points

(2) $\omega_B^2 = gk_B \tanh k_B h_B \rightarrow k_B = 0.2073$

$$V_B = \frac{\omega_B}{k_B} = \boxed{6.06 \text{ m/s}}$$

<채점기준>

Total: 7 points

* 부분점수 설명

- 1.(1)과 동일

(3) $P_{dynamic} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho g \eta_0 \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t)$

$$\left| P_{dynamic} \right|_{z=-h_A} = \left| \rho g \eta_0 \frac{1}{\cosh k_A h_A} \right| \approx \boxed{1589 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}}$$

<채점기준>

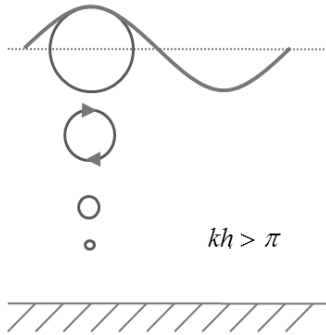
Total: 7 points

* 부분점수 설명

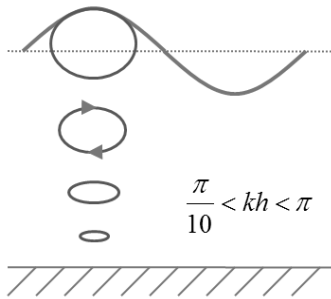
- Dynamic pressure 개념 도입 +2 points
- Dynamic pressure 식 +1 point
- 'magnitude' 도입 +2 points
- 최종 답안을 적절히 구한 경우 +2 points

(4)

Section A: $k_A h_A = 3.23 > \pi$: *Deep water*



Section B: $\frac{\pi}{10} < k_B h_B = 1.04 < \pi$: *Finite Depth*



<채점기준>

Section A, Section B 각각 3.5 points 만점

- Deep water / Finite depth 특징이 뚜렷하게 그리거나, 부연설명을 정확히 한 경우 3.5 points
- 꺾은 그렸으나, 특징이 불분명한 경우 2 points

2.

(1)

i) Kinematic F.S.B.C. (K.F.S.B.C.)

No change in K.F.S.B.C.

Let $F = z - \eta = 0$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = \eta$$

Linearization discarding the quadratic terms lead

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = 0}$$

ii) Dynamic F.S.B.C. (D.F.S.B.C.)

Approach 1) Bernoulli equation can be modified to include spring:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \rho g \eta + K \eta + P_{atm} = C(t) \text{ on } z = \eta$$

As $x \rightarrow \infty$, $C(t) \rightarrow P_{atm}$

$$\therefore \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \rho g \eta + K \eta = 0 \text{ on } z = \eta$$

Linearization discarding the quadratic terms lead

$$\boxed{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g \eta + K \eta = 0 \text{ on } z = 0}$$

Approach 2) Since $K \eta$ is linear, spring can be included directly into the linear D.F.S.B.C. as external force or restoring force, i.e.

$$\boxed{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g \eta + K \eta = 0 \text{ on } z = 0}$$

<채점기준>

Total: 15 points

i) Kinematic F.S.B.C 유도 적절하게 완료한 경우

5 points (만점)

- $z=0$ 언급 없이 유도 완료한 경우

4 points

ii) Dynamic F.S.B.C. 유도 적절하게 완료한 경우

10 points (만점)

- 식이 정확히 맞았으나 유도 과정에서 자세한 설명이 없는 경우

9 points

- ΔP 항을 고려하였고 η 에 비례한 양의 힘이라고 했으나,

계산과정 실수가 있는 경우

8 points

- ΔP 항을 고려하였고 η 에 비례한 힘이라고 했으나 음수로 적은 경우

7 points

- ΔP 항을 고려하였으나 식이 틀린 경우

5 points

- ΔP 항을 제외하고 유도 완료

2 points

(2)

Approach 1) From K.F.S.B.C. and D.F.S.B.C.,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z = 0$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g \eta + K \eta = 0 \text{ on } z = 0$$

Assume $\phi \propto \cosh k(z+h) \sin(kx - \omega t)$, then the dispersion relation becomes

$$\omega^2 = \left(g + \frac{K}{\rho} \right) k \tanh kh$$

Approach 2) If we put $g' = g + \frac{K}{\rho}$, the dispersion relation becomes

$$\omega^2 = g' k \tanh kh = \left(g + \frac{K}{\rho} \right) k \tanh kh$$

<채점기준>

Total: 15 points

* 다음은 ΔP 항을 η 에 비례한 힘으로 가정한 경우에 한함

- ΔP 항을 적절히 고려하였으나 증명 과정에서 단순 계산 실수가 있는 경우 13 points
- ΔP 항을 η 에 음수로 비례한 힘으로 계산했을 때 끝까지 유도한 경우 10 points
- 대입에 성공하였으나 적절히 발전시키지 못한 경우 7 points

* 이외의 경우

- 위의 시도와 ϕ 를 적절한 가정을 통해 대입한 경우 5 points
- D.F.S.B.C를 t 로 미분하여 K.F.S.B.C.를 도입하는 시도만 한 경우 2 points

(3)

For deep water, $\omega^2 = \left(g + \frac{K}{\rho} \right) k$: $K \uparrow \Rightarrow k \downarrow \Rightarrow \lambda \uparrow$ and $V_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow V_p \propto \lambda$

$$\lambda(K > 0) > \lambda(K = 0)$$
$$V_p(K > 0) > V_p(K = 0)$$

<채점기준>

Total: 10 points

* 다음은 ΔP 항을 η 에 양수로 비례한 힘으로 가정한 경우에 한함

- 모두 적절히 구한 경우 10 points
- λ, V_p 들 중 하나만 맞은 경우 5 points
- ΔP 항을 잘 고려하였으나, (2)문제를 제대로 거치지 않은 상태에서 맞은 경우 2 points

* 다음은 ΔP 항을 η 에 음수로 비례한 힘으로 가정한 경우에 한함

- 적절한 계산을 통해 그에 맞는 답이 나왔다면 5 points

* 다음은 ΔP 항을 η 에 비례하지 않은 힘으로 가정한 경우에 한함

- Phase velocity를 도입한 경우 2 points

3.

(1)

In deep water, $\omega^2 = gk$

$$\therefore \lambda = g \frac{2\pi}{\omega^2} = \frac{gT^2}{2\pi} = \boxed{243.95m}$$

(If choose $k=0.026$, then $\lambda = 241.67m$)

<채점기준>

Total: 8 points

* 부분점수 설명

- Deep water 가정하여, 식까지 맞은 경우 +5 points
- 최종 정답을 적절히 구한 경우 +3 points

(2)

$$u_{\max} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\max} = \omega A e^{kz}$$

At $z = -20 \text{ m}$, $u_{\max} = 3 \text{ m/s}$

$$\therefore A = \frac{u_{\max}}{\omega e^{kz}} \approx \boxed{10 \text{ m}}$$

It doesn't hit the deck. (<15m)

<채점기준>

Total: 8 points

* 부분점수 설명

- 속도 포텐셜 대입하여 속도 공식 구한 경우 +4 points
- 깊이 등 조건 적절히 대입한 경우 +1 points
- Wave amplitude 정확히 구한 경우 +1 points
- * 다음은 wave amplitude 정확히 구한 경우에 한함
- Deck hit 여부 +2 points

(3)

$$w_{\max} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{\max} = \omega A e^{kz} = \boxed{3 \text{ m/s}}$$

($w_{\max} = u_{\max} = \omega A e^{kz} = 3 \text{ m/s}$ in deep water)

<채점기준>

Total: 8 points

* 부분점수 설명

- 속도 포텐셜 대입하여 속도 공식 구한 경우 +5 points
- 속도 정확히 구한 경우 +3 points

(4)

Approach 1)

To minimize surge force, $d = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$

Shortest distance $d = \frac{\lambda}{2} \approx 122 \text{ m}$

Approach 2) To minimize roll motion of the platform, $d = \lambda, 2\lambda, \dots$ Therefore, shortest distance $d = \lambda$.

Approach 3) To avoid standing waves between column legs, distance should not be $d = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$

<채점기준>

Total: 8 points

* 부분점수 설명

- 근거를 제시한 경우 (기술 정도에 따라 차등 배점) +4/+2/+1 points
- (적절한 근거를 바탕으로) 적절하게 모델링을 한 경우 +2 points
- 위의 근거와 모델링에 적합하게 답을 도출한 경우 +2 points