1. 플라즈마 상태가 맞다. 형광등 내부에는 낮은 밀도의 기체가 주입되어 있는데,
이들은 중성 입자와의 collision 보다 양 극단에 인가되는 전기장에 의한 진동이 더 자주(빈번하게)
일어난다. $(\omega\tau \gg 1)$ 또, 밀도가 낮긴 하지만 collective behavior를 보일 정도로 입자수는 충분하며
$(N_D \gg 1)$ Lamp의 크기는 통상 수 mm 정도인 λ_D 에 비해 훨씬 크므로 $(\lambda_D \ll L)$
Lamp 내부의 빛은 플라즈마 상태라고 할 수 있다.
(또한, 램프를 전자레인지로 가열하거나, 플라즈마 볼에 가져다 대면 lamp 내에도 빛이 발생하는 것을 통해
lamp 내의 bright gas는 플라즈마 임을 알 수 있다. → 전자기파와 conductivity 사이에 가열, 빛이 발생 → ionization
을 의미 + 추가 정보 및 마지막 장에

2. (1) 자기력에 의한 운동방정식은, $\vec{F} = v \times B$ $(B = B_z \hat{k})$ 에서,

$$m\frac{dv_x}{dt} = q v_y B_z \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -q v_x B_z$$ 이고, 이들은

$$\ddot{v}_{x,y} = -\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_{x,y}$$ 의 미분 방정식으로 표현 된다. 해를 구하면 이들은 다음의

원 운동을 한다.

$$v_x = v_\perp \cos(\omega_c t + \delta) \qquad v_y = \mp v_\perp \sin(\omega_c t + \delta)$$ (각각 양이온, 전자)

$$x(t) = r_L \sin(\omega_c t + \delta) = r_L \cos(\omega_c t + \delta - \tfrac{\pi}{2}) \qquad y(t) = r_L \cos(\omega_c t + \delta) = -r_L \sin(\omega_c t + \delta - \tfrac{\pi}{2})$$

(양이온 가정) $(\omega_c = |q|B/m)$

따라서 한 바퀴 gyromotion 하는데에 드는 시간은,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{|q| B_z} = \frac{2\pi m}{|q| B_z}$$ 이다. z축으로는 초기 속력 그대로 움직이므로, (∇B) 가 없다면,

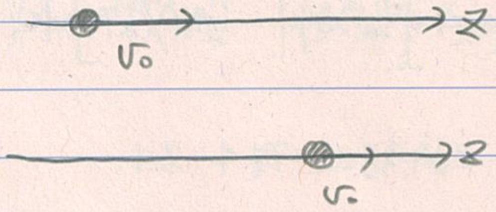
$$\Delta z = T \cdot v_\parallel = \frac{2\pi m v_\parallel}{|q| B_z}$$ 이다. ($|q|$ 이므로 Δz의 방향은 전자/양이온에 따라

달라지지만, 거리 변화 Δz에 $\pm e$는 차이를 주지 않는다 (m은 영향을 준다))

(2)

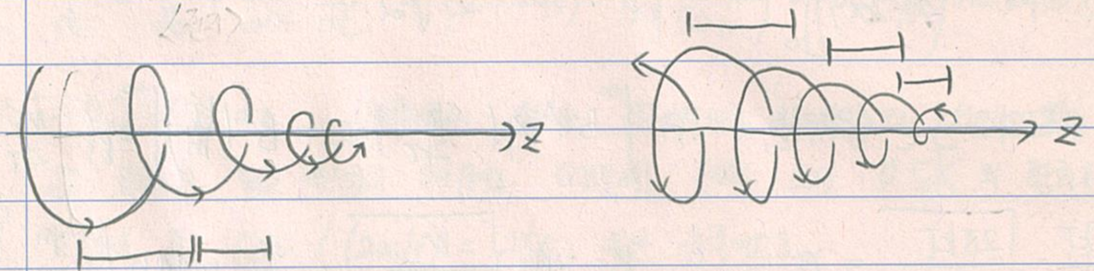
(경우1 : v_0가 오로지 z-direction 이며, thermal motion 에 의한 $v_\perp$ 이 0 일때)

이 경우, $v_\perp = 0$ 이기 때문에 $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} - \mu\nabla|B|$ 에서 $v\times B = 0$ 이고, $\mu = 0$ 이다. ($\mu = mv_\perp^2/2B$) 따라서, 입자는 net Force가 0 이므로, 초기속력 v_0로 진행한다.



(경우2: $v_{\perp 0}$가 존재할 때) (조교님이 '경우1'의 상황이라고 하셨으나, 혹시 몰라 추가작성함)

이 경우, B_r 커짐에 따라 μ는 일정하므로, $v_\perp^2 \propto B$ 이기 때문에 $r_L = mv_\perp/|q|B$ 는 z축 방향으로 이동함에 따라 작아진다. ($v_\parallel$은 $+\hat{z}$ 방향임 − 조교님 제공) 또, $\omega_c = |q|B/m$ 가 증가하고, 에너지보존에 의해 $v_\parallel$이 줄어드므로 pitch 역시 줄어든다.



reflected 전 (전자일때 임. 양이온은 회전방향 반대)   reflect 후. (전자일때, 양이온은 회전 방향 반대)

(3) 위 (2)의 '경우1' 에서 다음 것처럼, $\vec{v} = v_\parallel \hat{z} = |\vec{v}_0|\hat{z}$ 이라면, 입자는 아무런 힘도 받지 않는다. ($\vec{F} = 0$) 만일 $v_\perp$이 존재한다면, 입자가 받는 힘은 다음과 같다

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} - \mu\nabla|B| = q\left(v_y B_z \hat{i} - v_x B_z \hat{j} - \mu\nabla|B|\hat{k}\right)$$

(magnetic force, gradient B force $\nabla|B| \parallel B$)

(4) 에너지 보존과 first adiabatic invariant 조건에서, 초기위치를 0, $v_\parallel$이 0이되는 위치를 r로 표기하면,

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel 0}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2 = \frac{1}{2}mv_{\perp r}^2, \quad \mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp r}^2}{B_r}$$

이다. 정리하면, $\frac{B_0}{B_r} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp r}^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2} = \sin^2\theta$ 이다. 이때, θ는 속도 위상공간에서 $v_\perp$와 $v_\parallel$이 이루는 각도이다 ($|v_{\perp 0}| = |v|\sin\theta$ $|v_{\parallel 0}| = |v|\cos\theta$) 따라서 trapped 되기위해선 $B_r < B_m$ 이어야 하므로

$\frac{B_0}{B_r} = \sin^2\theta > \frac{B_0}{B_m}$ $\therefore \sin^2\theta > \frac{2T}{4T} = \frac{1}{2}$ 을 만족할 때,

charged particle 은 trapped 될 수 있다 (θ는 $\vec{v}^{\perp}$와 $\vec{v}_{\parallel}$가 이루는 각도)

($\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ or $\sin\theta < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 와 같음, 두 경우는 각각 $v_{\parallel}$ 이 $\underset{(방향)}{+, -}$ 인 두 경우를 의미)

3. (1)

$$n = \int_0^{\infty} f(c)\,dc = \int_0^{\infty} Bc^2 \exp\left[-\tfrac{1}{2}mc^2/kT\right] dc \quad (f : \text{speed distribution},\ A \propto c^2)$$

해당 적분은 다음의 오일러 적분으로 구할 수 있다.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)\,dx, \quad I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(x^2+y^2))\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp(-\alpha r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \left[\exp(-\alpha r^2)/(-2\alpha)\right]_0^{\infty} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{\alpha} \quad \therefore I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

범위가 다르므로, $\frac{1}{2}$번 곱해주면, $n = \int_0^{\infty} Bc^2 \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right)dc = B \cdot \left(\frac{kT}{m}\right)\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right)dc$

$$= \frac{BkT}{2m} \cdot \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} = n, \quad \therefore B = 2n \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot \frac{m}{kT} = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

따라서, $A = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot c^2$ 이다.

(2) 운동에너지 평균은, $\frac{1}{2}m\overline{c^2}$ 을 통해 구할 수 있다. 따라서,

$$\sqrt{\overline{c^2}} = (\text{rms 속력}) = \left(\int_0^{\infty} Ac^2 \exp(-\tfrac{1}{2}mc^2/kT)\,dc \Big/ \int_0^{\infty} A\exp(-\tfrac{1}{2}mc^2/kT)\,dc\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\int_0^{\infty} Bc^4 \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right)dc\right)^{1/2} = \left(\frac{B}{n}\left(\frac{kT}{m}\right)\int_0^{\infty} 3c^2 \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right)dc\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{B}{n}\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \cdot 3\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right)dc\right)^{1/2} = \left(\frac{3B}{2n}\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\right)^{1/2} = \left(6\pi\left(\frac{kT}{m}\right)^2\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right)^{1/2}$$

$= \left(3 \cdot \frac{kT}{m}\right)^{1/2}$ 이다. 따라서 평균 에너지 $E_{av} = \frac{1}{2}m\overline{c^2} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{3kT}{m} = \frac{3}{2}kT$ 이다.

(3) kinetics 의 대원리로부터, $pV = nRT = \frac{1}{3} N m \bar{c^2}$ 이다.

$\therefore \frac{1}{2} m \bar{c^2} = \frac{3}{2N} \cdot \frac{1}{3} N m \bar{c^2} = \frac{3}{2N} nRT = \frac{3}{2N} \cdot \frac{N}{N_A} \cdot RT = \frac{3}{2} kT$ 이므로,

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{N}{V} \cdot \frac{R}{N_A} T = nkT = n \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} m \bar{c^2}\right) = \frac{1}{3} n m \bar{c^2}$$ 에서,

$$p = \frac{1}{3} \cdot (1 \times 10^{-3}\ kg) \cdot (1 \times 10^{+20}/m^3) \cdot (3 \times 10^5\ m^2/s^2) = 1 \times 10^{-5}\ kg/m \cdot s^2$$

4. Convective derivative $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) T$ 에서,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} = (0.1\ K/s) + \left(\frac{10\ K}{50\ m}\right) \cdot (2\ m/s) = 0.1\ K/s + 0.4\ K/s$$

$= 0.5\ K/s$ 이다. 왜냐하면, 센서는 시간에 의한 온도 변화와 소년의 위치 이동에 의한 온도 변화의 합을 측정하기 때문이다. 때문에, 센서는 초당 $0.5K$ 의 변화를 감지하고, 소년이 총 $50m/(2m/s) = 25(s)$ 동안 움직이므로,

$$\Delta K = 0.5\ K/s \cdot 25\ s = 12.5K$$ 이다.

($25(s) \cdot 0.1\ K/s + 10K = 12.5K$ 이므로, 결과는 직관적인 답과 동일하다)

*1.번 추가 점. Plasma의 정의는 A Plasma is a Quasineutral gas of charged and neutral particles which exhibits collective behaviour 에서, lamp는 ~~잔속~~ ~~자속에서~~ 자속을 가리더라도 빛나는 변화가 없는 것을 알수있다. 하지만 전기장에 의한 가속으로 ~~충돌과~~ 충돌을 통해 빛을 내고있다. 이는 Quasineutrality를 의미하므로, bright gas inside a fluorescent lamp는 plasma 상태라고 할 수 있다.