AHP (Analytic Hierarchy Process)

산업공학과 인간공학연구실

AHP 개요

- AHP (Analytic Hierarchy Process) : 계층분석적 의사결정
- Pennsylvania Wharton School의 Thomas L. Satty가 1971년 제안한 다기준 의사결정 모형
- 인간의 의사결정에서 두뇌가 단계적 또는 위계적 분석과정을 활용한다는 사실에 착안
- 복잡한 의사결정 문제의 속성을 체계적(Systematic), 계층적(Hierarchy)으로 규명하여 결론을 도출

➔ 정성적인 대안을 정량적인 방법으로 해석 : 가중치의 산출

Ex) 미·러간 핵무기 감축 협상과 관련하여 최초로 사용

60여 개국 20,000여 정부, 기업, 개인에 의해서 광범위하게 활용

AHP 개요

▣ 의사결정의 3요소

- ➢ 목적(Goal), 대안(Alternatives), 판단기준(Criteria)

▣ 논리적 분석에 의한 문제해결의 원칙

- ➢계층적 구조의 설정(Hierarchies)
- ➢상대적 중요도의 설정(Priorities)
- ➢논리적 일관성의 유지(Consistency)

▣ AHP의 주요기능

- ➢복잡한 상황의 구조화
- ➢비율척도를 통한 우선순위(가중치)의 도출
- ➢통합 및 논리적 일관성 검증

AHP 절차

1. 의사결정 문제의 구조화 – Decision Hierarchy
2. 각 요소들간의 쌍대비교 (Pairwise Comparison)
3. 상대적 중요도(우선순위)의 도출
4. 상대적 가중치를 통합하여 대안의 종합적 평가

AHP 절차

1.의사결정 문제의 구조화
– Decision Hierarchy

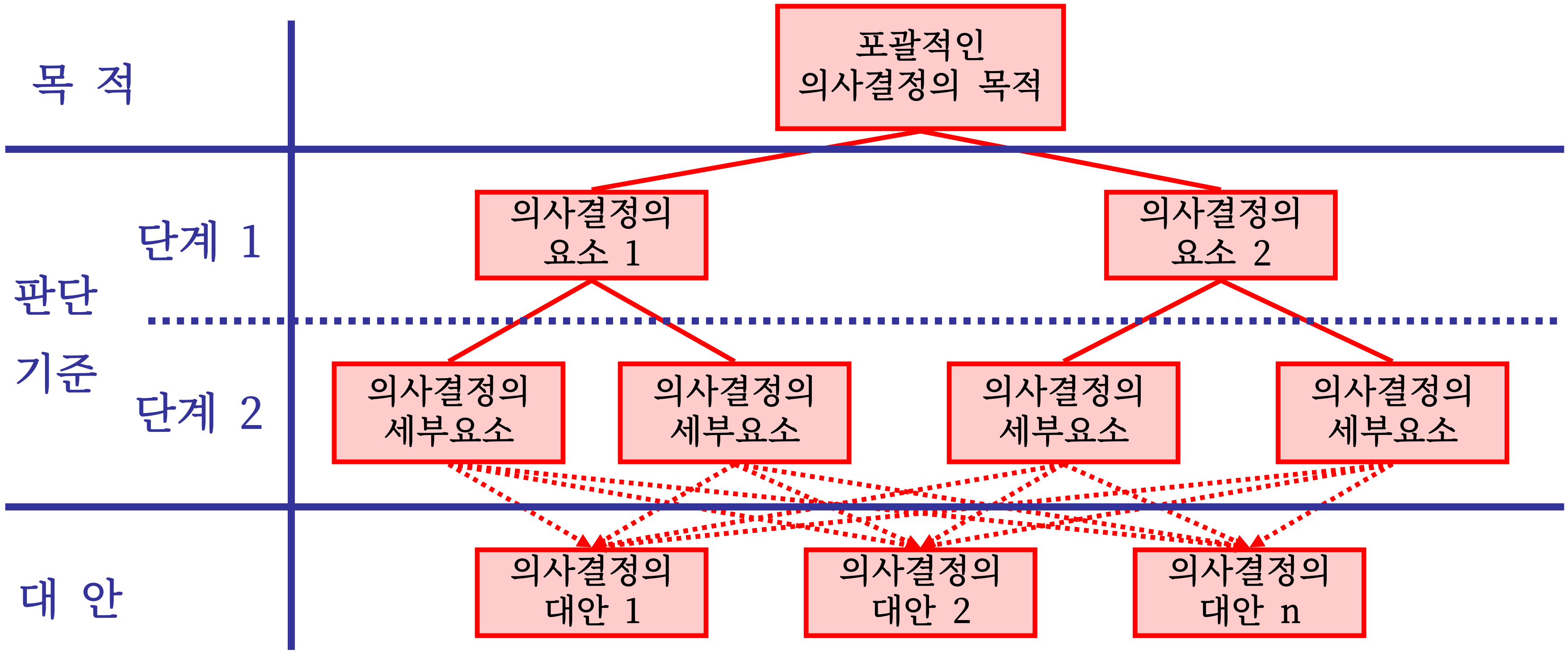
2.각 요소들간의 쌍대비교
(Pairwise Comparison)

3.상대적 중요도(우선순위)
의 도출

4.상대적 가중치를 통합하
여 대안의 종합적 평가

AHP 절차

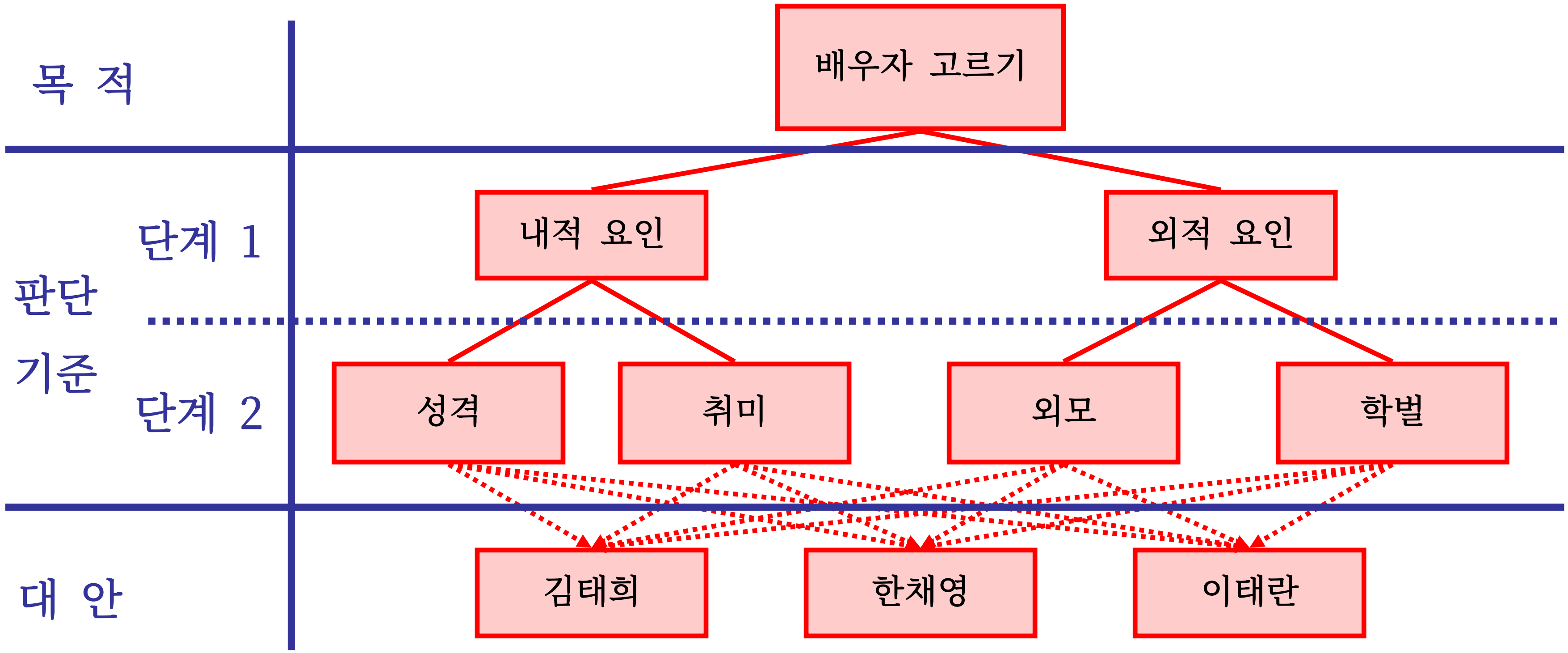
1. 의사결정 문제의 구조화 – Decision Hierarchy



- 한 계층에서의 요소는 서로 비교 가능해야만 함
- 정형화된 이론적 틀 없음 - Brainstorming

AHP 절차

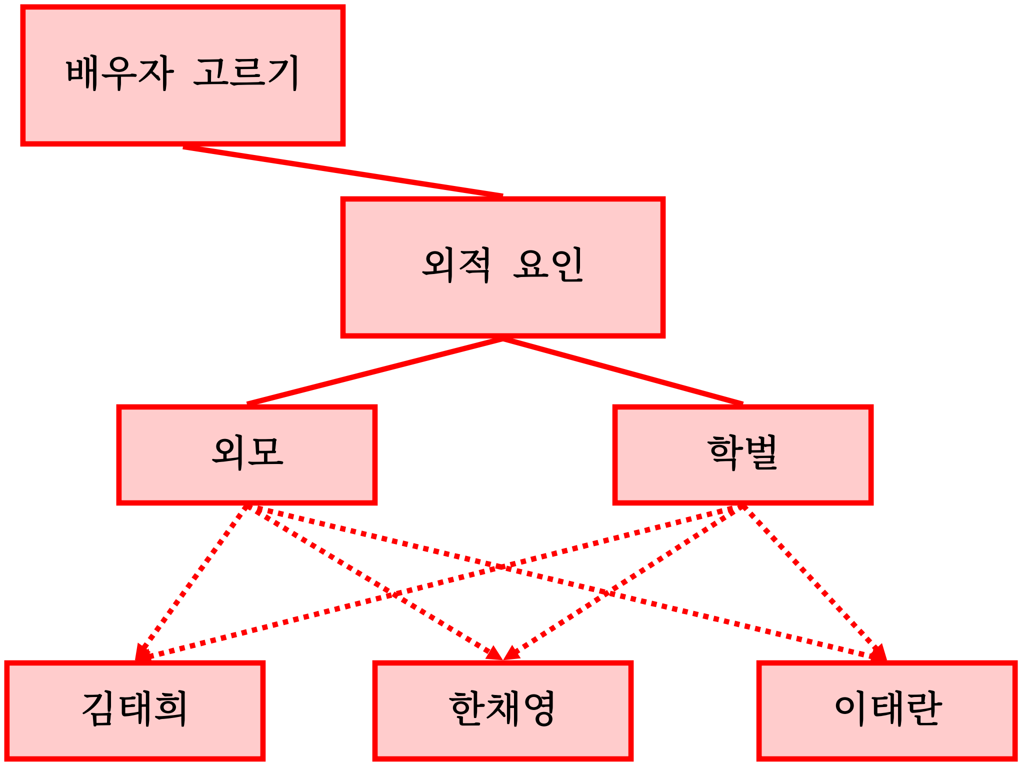
1. 의사결정 문제의 구조화 – Decision Hierarchy



- 한 계층에서의 요소는 서로 비교 가능해야만 함
- 정형화된 이론적 틀 없음 - Brainstorming

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

1. 의사결정 문제의 구조화 – Decision Hierarchy



AHP 절차

1.의사결정 문제의 구조화
– Decision Hierarchy

2.각 요소들간의 쌍대비교
(Pairwise Comparison)

3.상대적 중요도(우선순위)
의 도출

4.상대적 가중치를 통합하
여 대안의 종합적 평가

AHP 절차

2. 각 요소들 간의 1:1 쌍대비교

- 9 Point Likert Scale
- 매트릭스를 활용

중요도	정　의	설　명
1	비슷함 (Equal Importance)	두 요소가 비슷한 공헌도를 가짐
3	약간 중요함 (Moderate Importance)	한 요소가 다른 요소보다 약간 선호됨
5	중요함 (Strong Importance)	한 요소가 다른 요소보다 강하게 선호됨
7	매우 중요함 (Very strong Importance)	한 요소가 다른 요소보다 매우 강하게 선호됨
9	극히 중요함 (Extreme Importance)	한 요소가 다른 요소보다 극히 선호됨

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	a_{21}	1	a_{23}	a_{24}
A_3	a_{31}	a_{32}	1	a_{34}
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	1

중간값 사용 가능 : 2,4,6,8

$a_{ij} = 1/a_{ji}$,　$a_{ii} = 1$,　for all i

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

2. 각 요소들 간의 1:1 쌍대비교 ➢ 3개의 매트릭스 필요

판단기준의 쌍대비교

	외모	학벌
외모	1	2
학벌	1/2	1

외모 기준 하 각 대안의 비교

	김태희	한채영	이태란
김태희	1	2	4
한채영	1/2	1	2
이태란	1/4	1/2	1

학벌 기준 하 각 대안의 비교

	김태희	한채영	이태란
김태희	1	3	6
한채영	1/3	1	2
이태란	1/6	1/2	1

AHP 절차

1.의사결정 문제의 구조화 – Decision Hierarchy

2.각 요소들간의 쌍대비교 (Pairwise Comparison)

3.상대적 중요도(우선순위)의 도출

4.상대적 가중치를 통합하여 대안의 종합적 평가

AHP 절차

3. 상대적 중요도(우선순위)의 계산

➢ Eigenvalue Method

*n*개의 요소에 대한 상대적 중요도를 w_i 로 놓는다 : w_i (i = 1, · · · ,n)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{vmatrix}$$

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} \cdot w_j \cdot 1/w_i = n, \ (i, j = 1, \cdots, n) \rightarrow \sum_{j}^{n} a_{ij} \cdot w_j = n \cdot w_i, \ (i, j = 1, \cdots, n)$$

$A \cdot w = \lambda \cdot w$을 만족하는 λ이 존재(선형대수학의 **eigenvalue method)**

$(A - \lambda I) \cdot w = 0$ 을 만족하는 λ_{max} ***(eigenvalue)***와 ***w(eigenvector)*** 구할 수 있음

Ex) 외모대비 학벌의 상대적 중요도 ➔ 외모의 가중치 $W_{외모}$, 학벌의 가중치 $W_{학벌}$

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

3. 상대적 중요도(우선순위)의 계산

판단기준의 쌍대비교

	외모	학벌
외모	1	2
학벌	1/2	1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ ½ & 1 \end{vmatrix}$$

$A \cdot w = \lambda \cdot w$, $(A - \lambda I) \cdot w = 0$ 을 이용하여 풀면

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ ½ & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

w_1, w_2가 0이 아닌 해가 존재하기 위해서는 $\det(A - \lambda I)$ 이 0이 되어야 한다

$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 1 = 0$, $\lambda_{max} = 2$

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

3. 상대적 중요도(우선순위)의 계산

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\lambda_{max} = 2$ 이므로 ➡

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$-w_1 + 2\,w_2 = 0$

$\frac{1}{2}w_1 - w_2 = 0$ 의 연립방정식을 풀면

$w_1 = 0.667, \quad w_2 = 0.333,$

외모의 가중치 W외모 0.667, 학벌의 가중치 W학벌 0.333

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

3. 상대적 중요도(우선순위)의 계산

판단기준의 쌍대비교

	외모	학벌	가중치
외모	1	2	0.67
학벌	1/2	1	0.33

외모 기준 하 각 대안의 비교

	김태희	한채영	이태란	가중치
김태희	1	2	4	0.571
한채영	1/2	1	2	0.286
이태란	1/4	1/2	1	0.143

학벌 기준 하 각 대안의 비교

	김태희	한채영	이태란	가중치
김태희	1	3	6	0.667
한채영	1/3	1	2	0.222
이태란	1/6	1/2	1	0.111

AHP 절차

3. 상대적 중요도(우선순위)의 일관성 평가

전이적 일관성 (transitive consistency)	기수적 일관성 (cordial consistency)
$A_1>A_2$이고 $A_2>A_3$이면 $A_1>A_3$	$A_1=2A_2$이고 $A_2=3A_3$이면$A_1=6A_3$

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

일관성 유지 실패에 관한 예

외모 기준 하 각 대안의 비교

	김태희	한채영	이태란
김태희	1	2	4
한채영	1/2	1	1/2
이태란	1/4	2	1

한채영 < 이태란 ??

김태희 > 한채영 , 김태희 >> 이태란 ➔ 한채영 > 이태란

➔일관성 유지 점검을 위하여 일관성 지수(Consistency Index), 일관성 비율(Consistency Ratio)를 계산함

AHP 절차

3. 상대적 중요도(우선순위)의 일관성 평가

전이적 일관성
(transitive consistency)
$A_1 > A_2$이고 $A_2 > A_3$이면 $A_1 > A_3$

기수적 일관성
(cordial consistency)
$A_1 = 2A_2$이고 $A_2 = 3A_3$이면 $A_1 = 6A_3$

일관성 지수**(Consistency Index),** 일관성 비율**(Consistency Ratio)**

CI = $(\lambda_{max} - n)/(n-1)$ **,** n = 계층 요소의 수
CR = CI/RI
CR < 0.1 → 일관성 있음

RI: 난수지수 **(Random Index)**
1에서 **9**까지의 숫자를 임의로 배열한
역수행렬의 일관성지수의 평균을 산출한 값

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
난수지수	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

적용 예제의 경우 : $n=2$, $\lambda_{max} = 2$ 이므로 $CI=0$, $CR=0$

AHP 절차

1. 의사결정 문제의 구조화 – Decision Hierarchy
2. 각 요소들간의 쌍대비교 (Pairwise Comparison)
3. 상대적 중요도(우선순위)의 도출
4. 상대적 가중치를 통합하여 대안의 종합적 평가

AHP 절차

4. 상대적 중요도를 통합하여 대안의 종합순위 평가

종합중요도벡터 : 계층의 최하위에 있는 대안들의 우선순위를 결정

$$C[1,k] = \prod_{i=2}^{k} B_i$$

- $C[1,k]$: 첫번째 계층에 대한 k번째 요소의 종합가중치
- B_i: 추정된 w벡터를 구성하는 행을 포함하는 $n_{i-1} \times n_i$ 행렬
- n_i: i번째 계층의 요소 수

전체 계층이 세 개의 계층레벨로 구성되어 있고, $n_1=2$, $n_2=3$이면 대안의 종합중요도는 **C[1,3]**으로 표시. $C[1,3]=B_3 \times B_2$으로 구한다.

B_2:2X1 행렬, B_3:3X2 행렬이므로 **C[1,3]: 3X1** 행렬 세 번째 계층(대안)에 대한 종합중요도를 얻을 수 있다.

AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

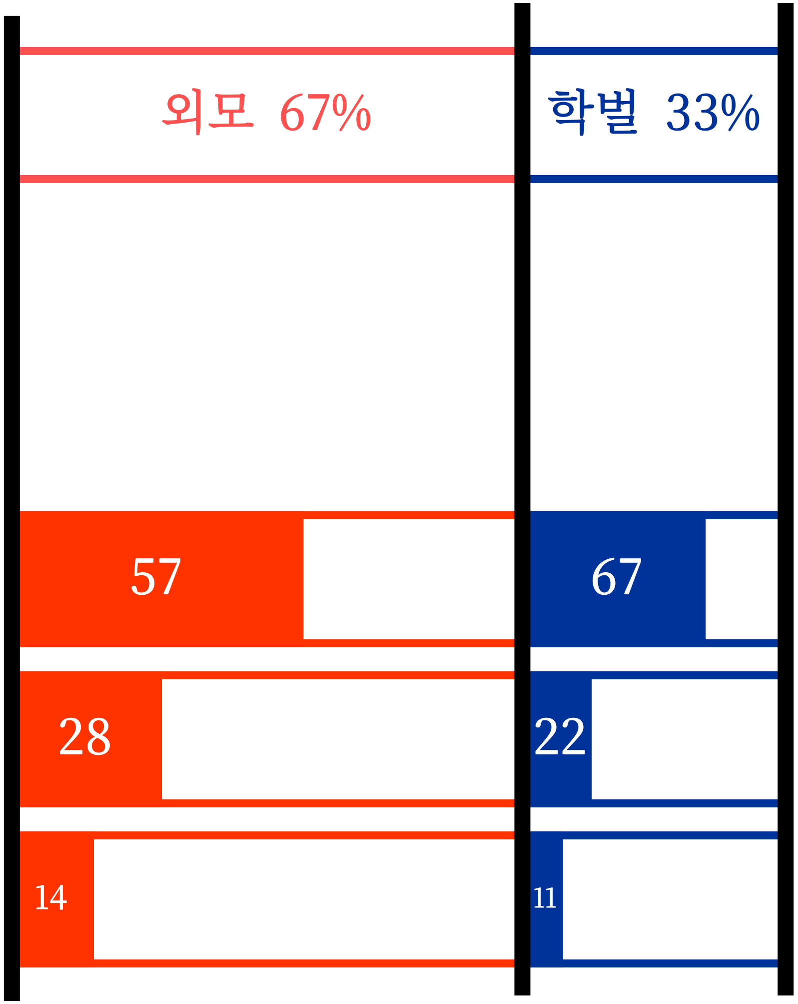
4. 상대적 중요도를 통합하여 대안의 종합순위 평가

기준별 가중치

	가중치
외모	0.67
학벌	0.33

대안별 기준별 중요도

	외모	학벌
김태희	0.571	0.667
한채영	0.286	0.222
이태란	0.143	0.111



AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

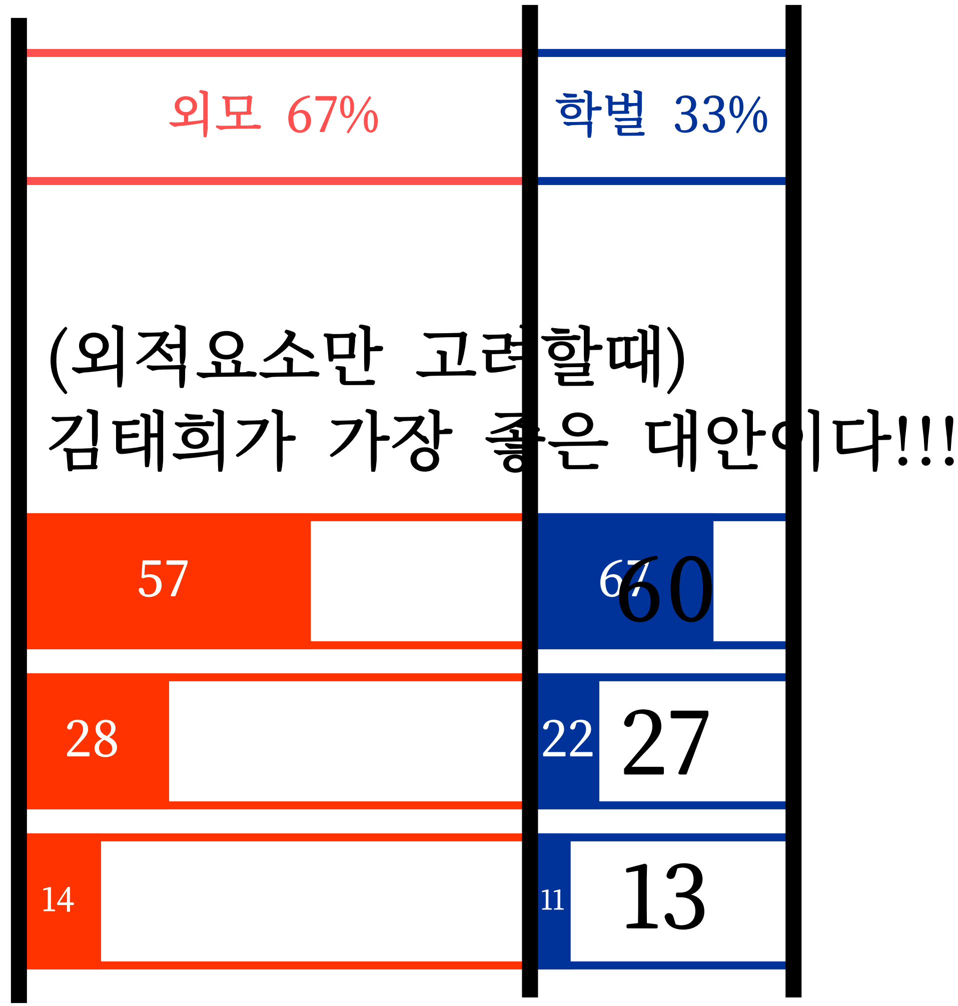
4. 상대적 중요도를 통합하여 대안의 종합순위 평가

기준별 가중치

	가중치
외모	0.67
학벌	0.33

대안별 기준별 중요도

	외모	학벌
김태희	0.571	0.667
한채영	0.286	0.222
이태란	0.143	0.111



AHP 절차 (적용 예 – 배우자 고르기)

4. 상대적 중요도를 통합하여 대안의 종합순위 평가

$$B_3 = \begin{vmatrix} 0.571 & 0.667 \\ 0.286 & 0.222 \\ 0.143 & 0.111 \end{vmatrix}$$

	외모	학벌	
B_3 =	0.571	0.667	김태희
	0.286	0.222	한채영
	0.143	0.111	이태란

$$B_2 = \begin{vmatrix} 0.667 \\ 0.333 \end{vmatrix}$$

0.667: 평가 기준에서 외모의 상대적 중요도
0.333: 평가 기준에서 학벌의 상대적 중요도

$$C[1,3] = \begin{vmatrix} 0.571 & 0.667 \\ 0.286 & 0.222 \\ 0.143 & 0.111 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0.667 \\ 0.333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.600 \\ 0.276 \\ 0.133 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{김태희} \\ \text{한채영} \\ \text{이태란} \end{matrix}$$

(외적요소만 고려할 때)김태희가 가장 좋은 대안이다!!!

AHP의 장점

비구조화 되어 있는 의사결정 문제를 계층적으로 표현

정량적인 요소와 정성적인 요소를 고려(무형의 요소를 측정)

우선순위 결정에 대한 논리적 일관성을 검증

정보의 변화에 따른 민감도 분석(평가기준의 가중치 이용)

다수평가자의 다양한 의견을 수치적 통합으로 표현