3. 정전계 II

정전계 내의 도체

도체(Conductor)의 기본 성질

도체내에서는 $\mathbf{E} = 0$ 이다.

도체 내부에 전하가 유입되면 도체 내부에 전계가 형성된다. 이로 인해 전하는 힘을 받게 되고 내부의 전계가 0이 될 때까지 스스로 재배치된다.(도체 표면에 도착)

도체내에서는 전하밀도는 0이다.

앞서 도체 내부에 전계는 0이므로 가우스 법칙에 의해 도체 내부의 전하밀도도 0이 된다.

알짜 전하는 표면에만 있다.

전하가 있을 수 있는 곳은 이곳 밖에 없다.

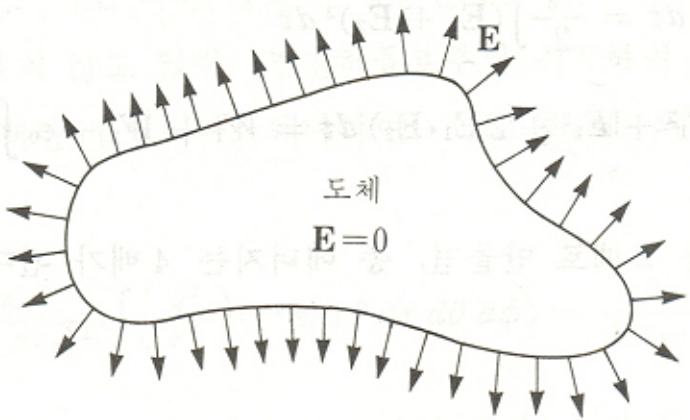
도체내에서는 V가 항상 일정하다.

경우 V(b) = V(a) 이다.

도체 바로 밖에 $V(b) - V(a) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 이면

E의 접선 성분이 존재 한다면 전하들은 평형 상태에 어질 때까지 표면 주위를

a와 b가 도체내의 두 점임

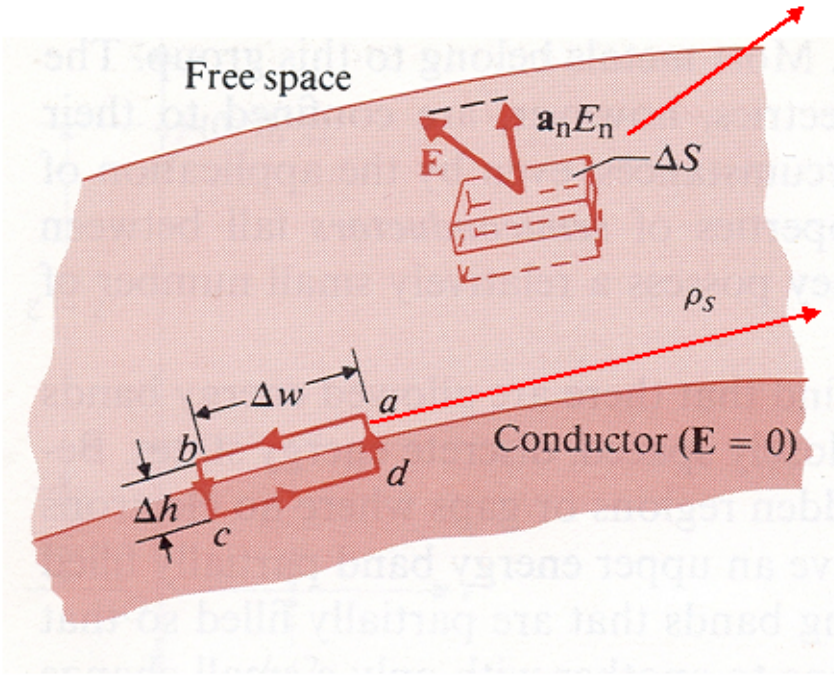


정전계 내의 도체

도체 내에서,

$$\rho_v = 0 \quad , \quad \vec{E} = 0$$

도체와 자유 공간의 경계면에서,



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s \Delta S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

: 도체와 자유공간의 경계에서 전계 E의 법선 성분은 도체에서의 면 전하밀도를 자유공간의 유전율로 나눈 것과 같다..

$$\oint_{abcda} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_t \Delta w = 0 \quad \Rightarrow E_t = 0$$
$$(\Delta h \to 0)$$

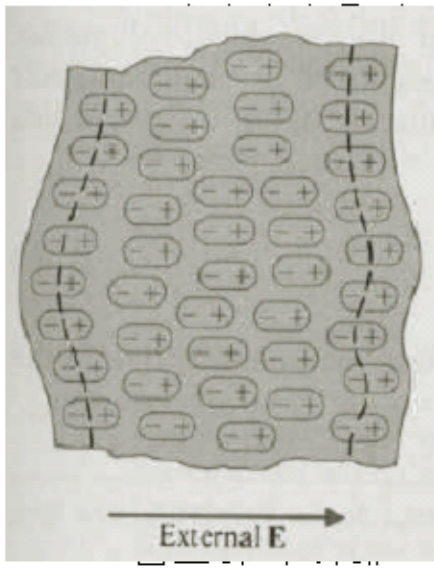
: 도체 표면에서 전계 E의 접선 성분은 정적 상태에서 0이다.

$$E_t = 0 \quad , \quad E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

정전계에서의 유전체

유전체(Dielectrics)

도체 : 자유 전자가 존재(특정한 핵 주위에 갇혀 있지 않고 일 수 있음)
유전체 : 전자들이 분자 구조 내에서 움직일 수 있으나 로부터 떨어져 나갈 수 없다.
원자의 크기보다 작은 이동이지만 유전체는 분극 게 되고 전기 쌍극자(electric dipole)가 생긴다.
이러한 전기 쌍극자는 0이 아닌 전계 강도 E를 가지므로 외부에서의 전계를 변화 시킨다.



분극 벡터(Polarization Vector)

유전체에 유도된 쌍극자의 거시적 효과를 분극벡터를 다음과 같이 정의

$$\Longrightarrow \quad \vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{p}_k}{\Delta v} \left(C/m^2\right)$$

n : 단위체적당 분자수
Δv : 미소체적
$\vec{p}_k$: 전기쌍극자 모멘트

등가 분극 면 전하 밀도.

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n \ \left(C/m^2\right)$$

등가 분극 체적 전하 밀도

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \ \left(C/m^3\right)$$

전속밀도와 유전 상수

전속밀도(electric flux density) 또는, 전기 변위(electric displacement)

앞서 언급했듯이 분극된 유전체는 등가 체적 전하 밀도 ρ_{pv} 를 갖기 때문에 전계 강도는 자유 공간에서와는 다르다.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v + \rho_{pv}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_v - \nabla \cdot \vec{P}) \quad ==> \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v \quad (1)$$

이제 전속밀도 또는, 전기 변위인 D를 아래와 같이 정의하자.

식 (1)과 (2)를 결합하게 되면 $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (C/m^2)}$ (2)

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (C/m^3) \qquad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \qquad (C)}$$

임의의 폐표면을 통과하는 외부로의 총 전속(total outward electric flux)은 폐표면 안에 포함되어 있는 총 자유 전하와 같다.

일반화된 가우스 법칙

전속밀도와 유전 상수

전기 감수율(electric susceptibility)

매질의 유전체 성질이 선형(linear)이고 등방성(isotropic)이며 균질(homogeneous)일 때, 분극은 전계 강도에 비례하고 비례 상수는 전계의 방향과 무관

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$ 여기서, χ_e 는 전기 감수율

유전 상수(dielectric constant)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

: 매질의 비유전율(relative permittivity) 또는 유전 상수 ε_r (공기는 1.00059)

: 절대 유전율 (absolute permittivity), 또는 간단히 유전율

ε_r

ε

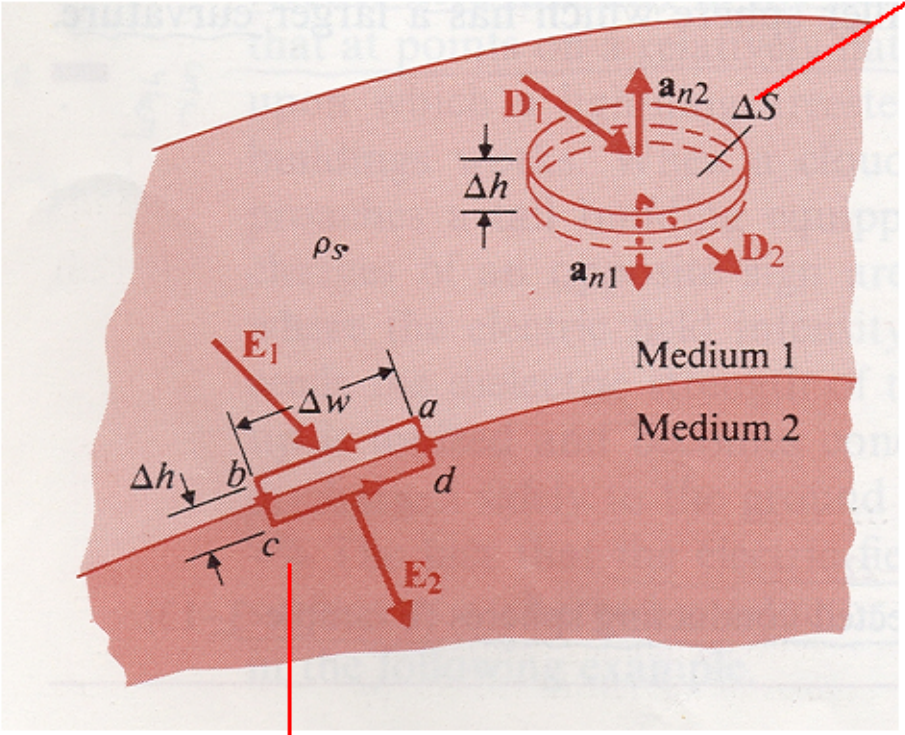
$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

이방성 매질(anisotropic medium)

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

단순매질(simple medium) : 선형, 균질, 등방성

정전계의 경계 조건



D의 법선 성분에 대한 경계 조건

→ 매질 1에 윗면을, 매질 위에 밑면을 갖는 작은 상자(면적은 ΔS 높이는 Δh)를 그리고 가우스 법칙을 적용.

$$\oint_S \vec{D}\cdot ds = \left(\vec{D}_1\cdot\vec{a}_{n2}+\vec{D}_2\cdot\vec{a}_{n1}\right)\Delta S$$

$$= \vec{a}_{n2}\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)\Delta S = \rho_s\Delta S$$

$$\vec{a}_{n2}\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\rho_s \quad \textbf{or,}$$

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \quad \left(C/m^2\right)$$

E의 접선 성분에 대한 경계 조건

→ 작은 경로 abcda를 그려 선적분을 수행. Δh 를 0으로 접근시켜 E의 선적분에 대한 영향을 무시한다.

$$\oint_{abcda}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{w}+\vec{E}_2\cdot\left(-\Delta\vec{w}\right)$$

$$= E_{1t}\cdot\Delta w - E_{2t}\cdot\Delta w = 0$$

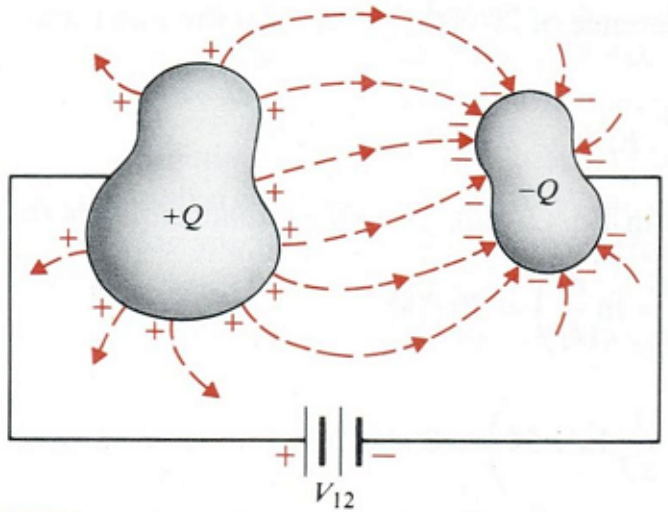
$$E_{1t}=E_{2t} \quad \left(V/m\right)$$

정전용량과 커패시터

정 전 용량(capacitance)

$$Q = CV$$

Capacitance of the isolated conducting body



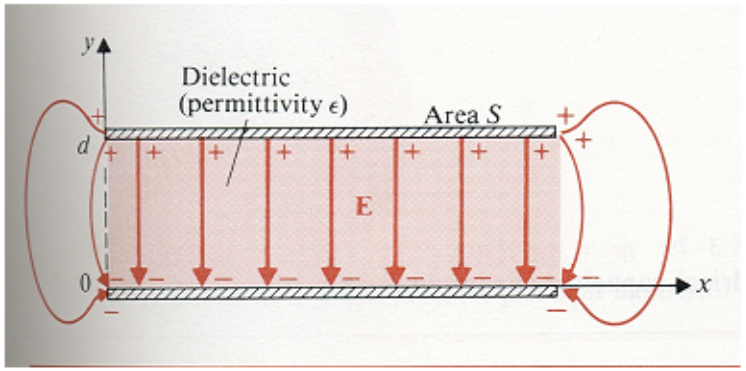
커패시터 또는 콘덴서

→ 자유공간 또는 유전체로 분리된 두도체

$$C = \frac{Q}{V_{12}} \quad (\mathrm{F})$$

정전용량 계산 예 (평행판 커패시터)

상하 도체판에 각각 +Q, −Q가 대전 되어 있다면 면 전하밀도는 ==> $\rho_s = \dfrac{Q}{S}$



따라서 전계 강도 E는 ==> $\vec{E} = -\hat{y}\dfrac{\rho_s}{\varepsilon} = -\hat{y}\dfrac{Q}{\varepsilon S}$

$$V_{12} = -\int_{y=0}^{y=d} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_0^d \left(-\frac{Q}{\varepsilon S}\right)dy = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon S} = \varepsilon\frac{S}{d}$$

Poisson과 Laplace 방정식

전하분포에 의한 전계의 해석은 Coulomb의 법칙이나 Gauss의 법칙 및 전위개념을 도입하여 풀이하였으나,실제에서는 매우 복잡한 전하 분포인 경우가 많으므로 미분방정식에서 도출한 전위 함수로부터 전계를 구하는 방법 이용

Poisson 방정식

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v,$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0,$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$ (선형, 등방성 매질)

$$\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho_v \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\varepsilon \nabla V) = -\rho_v$$

단순 매질(simple medium)에서 ε은 ∇ 연산자 바깥으로 나올 수 있다.

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \qquad (\mathrm{V/m^2})}$$

Laplacian operator

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

Laplace 방정식(자유 전하가 없는 단순 매질에서)

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$