7. 시변자계와 멕스웰 방정식

패러데이(Faraday) 법칙

❖**1831년 Michael Faraday**는 실험적으로 루프에 결합되는 자속이 변할때 도체 루프에 전류가 유도된다는 사실을 밝혀 내었다. 유도 기전력과 결합자속간의 정량적 관계를 규명한 것이 **Faraday** 법칙이다.

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

- 우변의 자장 시간변화가 영이 아니라면 비 보존장이고, 따라서 전장을 scalar potential로 표현할 수 없다.
- Stoke's 정리에 의하여 면적분을 취하면

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

1. 시변 자계 내의 정지 회로(A Stationary Circuit in a Time-Varying Magnetic Field)

$$\underline{\underline{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} = \underline{\underline{-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}}}$$

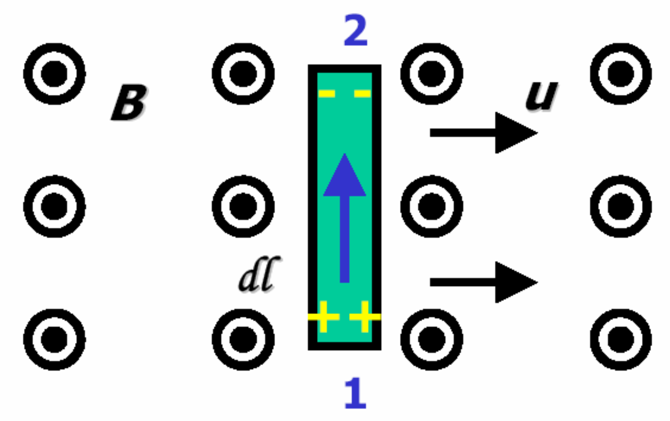
V : EMF induced in circuit with contour C Φ : Magnetic flux crossing surface S

$$\boxed{\therefore\ V=-\frac{d\Phi}{dt}}$$

: 변압기 기전력**(Transformer EMF)**

패러데이(Faraday) 법칙

2. 정자계에서의 이동 도체(A Moving Conductor in a Static Magnetic Field)



-정자장 ***B*** 내에서 도전체가 속도 ***u*** 로 움직인다면 $F_m = q\,u \times B$ 의 힘이 발생한다.

-이 힘은 도체 내의 자유 전자를 도체의 한 쪽 끝으로 움직이게 하고, 다른 한쪽은 양으로 대전된다.

-이러한 양전하와 음전하의 분리는 쿨롱의 힘을 발생시킨다.

-자기력과 전기력은 순간적으로 평형을 이루고, 움직이는 도전체에 미치는 알짜 힘은 영이 된다.

-단위 전하당 가해지는 자기력 $\boldsymbol{F_m / q = u \times B}$ 는 도체를 따라 작용하는 유기 전기장으로 간주할 수 있으며 다음과 같은 전압을 발생시킨다..

$$V_{21} = \int_1^2 (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

-만일 이동 도체가 폐회로 C의 일부분이라면 회로 주위에 발생된 기전력은

$$V' = \oint_C (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (V)$$

: 속도 기전력 **(Speed EMF)**

패러데이(Faraday) 법칙

3. 시변자계 내의 이동 회로(A Moving Circuit in a Time-Varying Magnetic Field)

- 전계 ***E*** 와 자계 ***B*** 가 모두 존재하는 영역에 전하 q 가 속도 ***u*** 로 움직이고 있을 때, 전하 q 에 가해지는 전자기력 ***F*** 는 Lorentz's force equation에 의해 표현된다.

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right) \qquad (N) \qquad \text{(Lorentz's force eq.)}$$

- 전하 q에 가해지는 힘은 전기장 ***E'*** 으로 표현된다.

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}}$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_c \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_c (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

: 패러데이 법칙의 일반형

움직이는 계에서 유기된 **emf**

시변 자장에 의한 **transformer emf**

이동 도체에 의한 **speed emf**

맥스웰 방정식(Maxwell's Equations)

❖패러데이 법칙에 의해 시변 자계가 전계를 일으킨다는 사실을 알게 되었다.
이런 시변 장의 개념을 정전장의 기본 가정에 도입하면,

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\qquad\nabla\cdot\vec{D}=\rho\qquad\nabla\cdot\vec{B}=0$$

❖전하보존의 법칙을 암페어 법칙에 적용하면 전류의 발산이 **0**이 된다.

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\quad\Rightarrow\quad\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=0=\nabla\cdot\vec{J}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$ 전하보존의 법칙

❖이는 전하보존의 법칙에 위배된다. 따라서, 암페어의 법칙에 새로운 항을 도입하게 된다.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=0=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial(\nabla\cdot\vec{D})}{\partial t}=\nabla\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

: 시변 전계가 자계를 발생시킨다.

변위전류밀도
(displacement current density)

맥스웰 방정식(Maxwell's Equations)

❖**James Clerk Maxwell은 변위 전류항을 추가하여 전자기학의 기초가 되는 Maxwell's equations를 정리하였다.**

	Differential form	**Integral form**
***Gauss* Law**	$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_v$	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=Q$
No isolated magnetic charge	$\nabla\cdot\vec{B}=0$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$
***Ampere*'s circuital law**	$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell}=I+\int_S \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$
***Faraday*'s law**	$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\int_S \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}=-\dfrac{d\Phi}{dt}$

Poynting theorem

$$\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \bullet (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \bullet (\nabla \times \vec{H})$$

$$= -\vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \bullet \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) - \sigma E^2$$

$$\therefore \underbrace{\oint_s (\vec{E} \times \vec{H}) \bullet d\vec{s}}_{\mathbf{1.}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) dv}_{\mathbf{2.}} \underbrace{- \int_V \sigma E^2 \, dv}_{\mathbf{3.}}$$

$\vec{\mathrm{P}} = \vec{E} \times \vec{H}$: Poynting Vector (전자계의 전력밀도벡터: a power density vector)

1. 어느 순간 닫힌 표면안으로 흘러들어오는 전체 전력

2. 저장된 전계 및 자계 에너지의 증가율

3. 닫힌 체적 내에서 소모되는 저항성 전력의 합

준정적인 계(Quasi-Static Field)에서의 방정식

$$\boxed{\frac{\omega l}{c} << 1} \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3\times 10^8 \ m/\sec \right)$$

❖**준정적인 시스템** : 전기기계계에서 파동이 전파하는데 걸리는 시간이 매우 짧다면 준정적인 전자기식으로 전계와 자계를 구해도 무방하다.

Quasi-static magnetic field

(변위전류에 의하여 발생하는 자계 무시)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Quasi-static electric field

(패러데이 법칙에 의하여 발생하는 전계 무시)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$