제3편 경영 과학적 방법론

9. 선형 계획법

선형계획모형 (1)

- 선형계획모형
  - 목적함수와 제약식이 모두 선형으로 수식화될 수 있는 경우
  - 일정한 제약조건 하에서 목적하고자 하는 값을 최대화(최소화)하고자 하는 수리적 방법

- 선형계획모형의 예제
  - 제품배합문제
    - ✓ 한정된 자원을 이용하여 최대 이익을 내는 제품 배합을 결정
  - 수송문제
    - ✓ 여러 공급원에서 여러 목적지로 최소 비용으로 제품 수송 방법 결정
  - 배정문제
    - ✓ 여러 작업을 여러 기계에게 최소 작업 비용으로 작업 할당

선형계획모형 (2)

선형 계획 문제의 특징

[1] **목적 함수와 제약 조건들이 변수의 선형 관계로 표현된다.**

- ✓ 1개의 목적 함수와 다수의 제약식으로 구성
- ✓ 목적함수는 최대화 혹은 최소화가 목표

cf) 2차 계획법, 비선형 계획법, 동적 계획법…

[2] **각 제약 조건들은 등식(=) 혹은 부등식(≥, ≤)으로 표현된다.**

[3] **모든 선형 계획 문제의 변수들은 음수가 될 수 없다.**

- ✓ 음수인 경우는 적절한 변형을 통해 양수화 시킴
- ✓ 제약공간 상의 모든 실수값을 가질 수 있다.

cf) 정수계획법

Ref) 기타모형

- 2차계획법 : 목적함수가 2차식, 제약식은 1차식인 문제
- 비선형계획법

  [1] 목적함수나 제약식이 1차식이 아닌 함수(비선형함수)로 표시되는 수리계획법

  [2] 현실의 비선형성 ➔ 선형계획법(민감도 분석 이용하여 보완)

  [3] 선형계획의 Simplex method(단체법)과 같은 효율적인 해가 존재하지 않는다.

  [4] Solution : 편미분, 라그랑지 승수법, 쿤-터커 정리
- 정수계획법

  [1] (IP ; Integer Programming)
  : 의사결정변수가 정수의 값만을 갖는 수리계획법

  [2] 정수계획법의 모형화는 변수가 정수이어야 한다는 조건만 추가하면 선형계획법과 같다.

Ref) 기타모형

■ 동적계획법

[1] **의사결정상황을 시간적 · 공간적으로 여러 단계로 나누어 취급 (결정변수의 값도 한꺼번에 결정하는 것이 아니라 각 단계마다 결정) ➔ '단계적 결정'이라는 특성 때문에 다단계계획법**(multistage programming) **이라고도 함**

[2] **최적성의 원리**(principle of optimality)

: **동적계획법은 선형계획법에 비해 현실을 더 잘 반영할 수 있는 반면에 뚜렷한 해법이 없다. 따라서 문제에 따라 해법이 서로 다른데, 모든 경우에 적용되는 개념이 최적성의 원리이다. 즉, 주어진 문제에 대한 최적해가 소문제에 대한 최적해로 구성되는 경우 그 문제는 최적성의 원리가 성립한다고 함**

[3] **순환식**(recursive equation)

: **최적성의 원리가 반영되어 모형의 해를 단계적으로 구할 수 있게 하는 수식**

[예] 제품배합 문제의 기하학적 접근

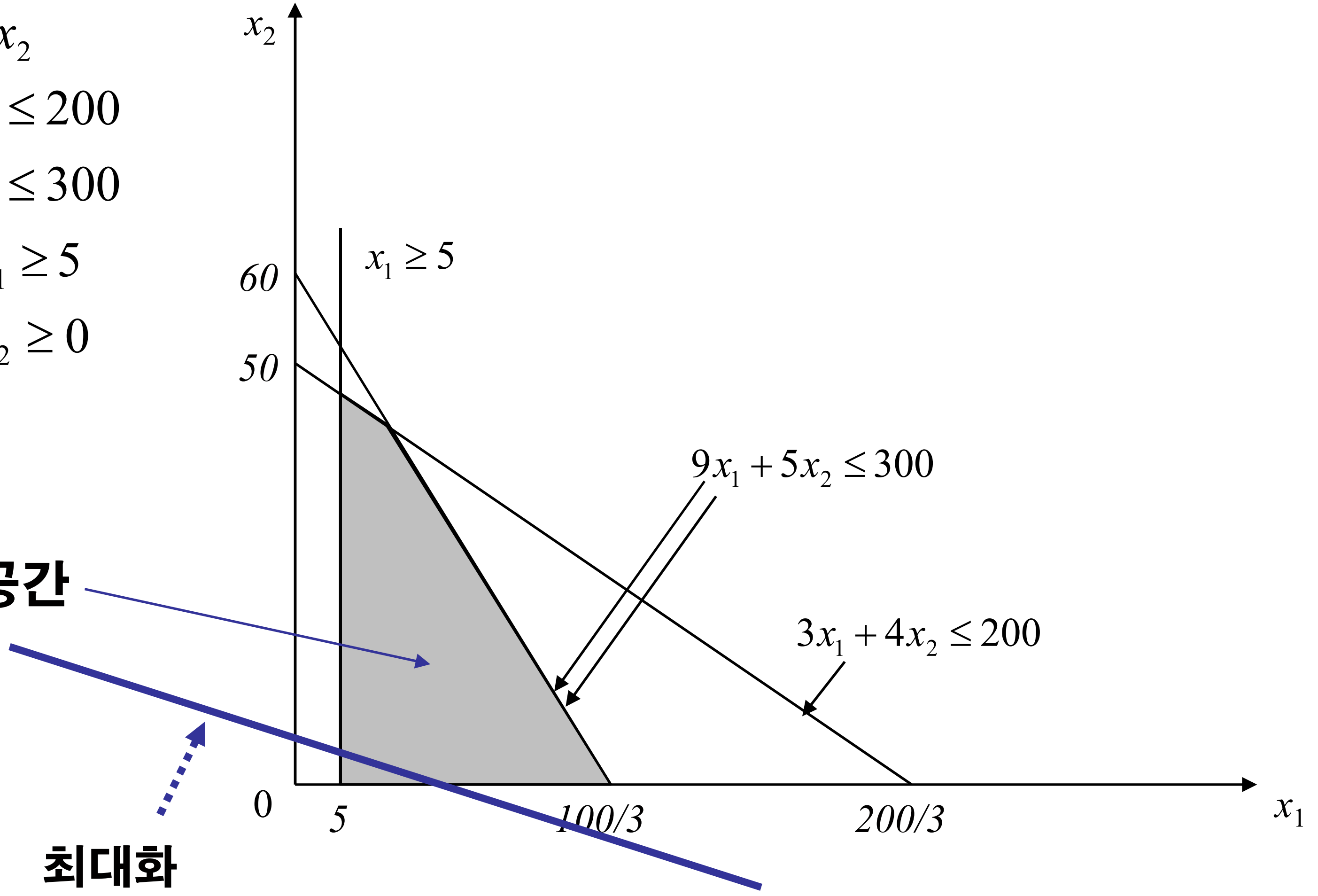
A,B 두 상품을 생산하는데 상품 A는 개당 2원의 이익이 나고, B는 개당 5원의 이익이 발생한다. 상품 A를 생산하는 데 9개의 재료와 3시간 동안 기계를 사용해야 하며, B는 5개의 재료와 4시간의 기계를 사용해야 한다. 이때 재료는 총 300개를 사용할 수 있으며, 기계 가동 시간은 최대 200시간이라고 한다. 또 상품 A는 최소 5개 이상을 생산해야만 한다고 한다. 이때 최대의 이익을 산출해 내는 상품 A와 B의 생산량을 결정하라.

결정 변수: 제품 A의 생산량 => x_1
제품 B의 생산량 => x_2

목적함수	$Max\ \ 2x_1 + 5x_2$ ←	**이익의 최대화**
제약식	$s.t.\ \ 3x_1 + 4x_2 \le 200$ ←	**기계 가동시간 제약**
	$9x_1 + 5x_2 \le 300$ ←	**재료 사용량 제약**
	$x_1 \ge 5$ ←	**A의 최소 생산량 제약**
	$x_2 \ge 0$ ←	**비음인 해만을 구함**

[예] 제품배합 문제의 기하학적 접근 – (계속)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + 5x_2 \\
&s.t.\ \ 3x_1 + 4x_2 \le 200 \\
&\qquad 9x_1 + 5x_2 \le 300 \\
&\qquad\qquad x_1 \ge 5 \\
&\qquad\qquad x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



가능해 공간

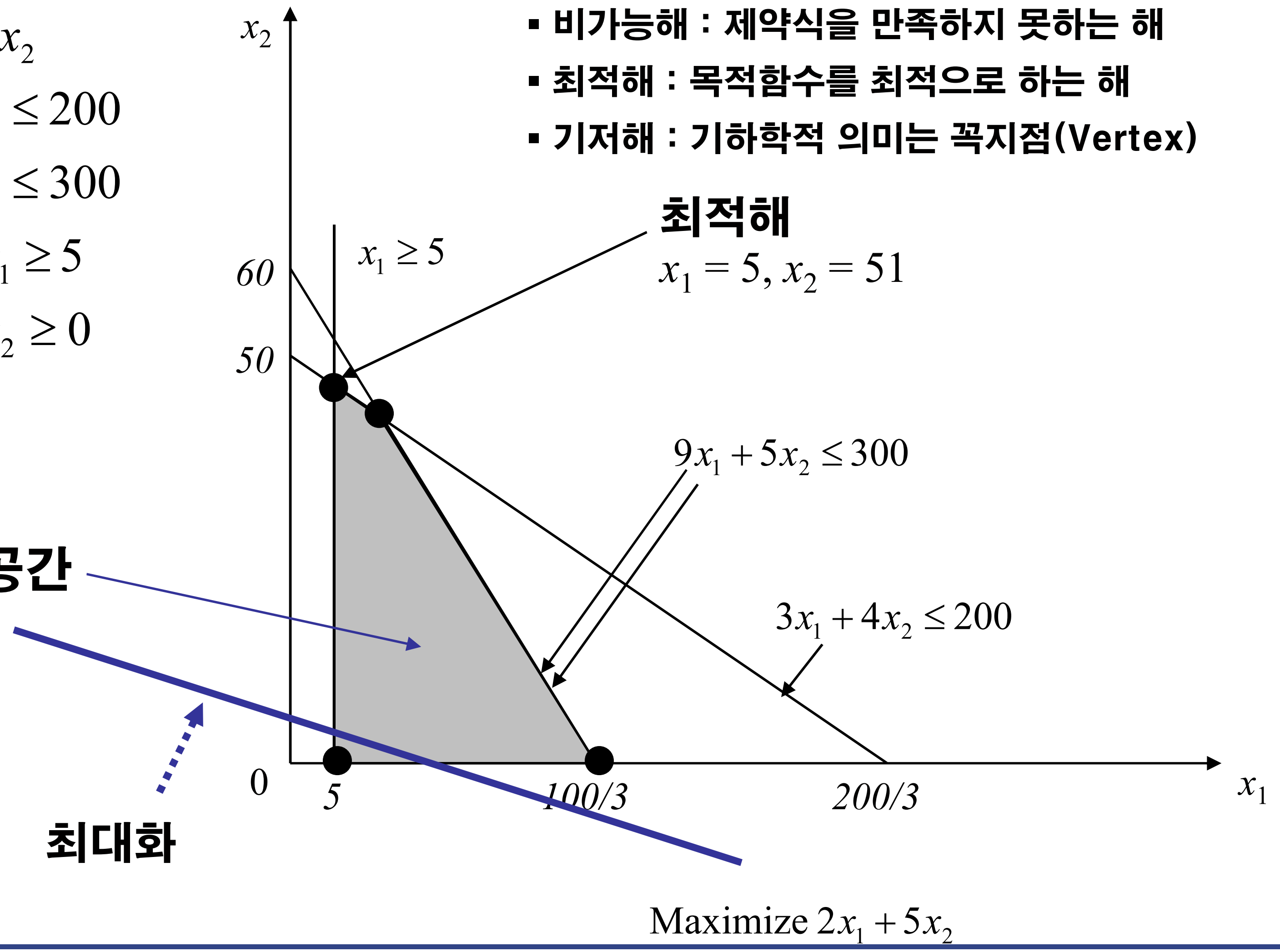
최대화

Maximize $2x_1 + 5x_2$

[예] 제품배합 문제의 기하학적 접근 – (계속)

- **가능해 : 제약식을 모두 만족하는 해**
- **비가능해 : 제약식을 만족하지 못하는 해**
- **최적해 : 목적함수를 최적으로 하는 해**
- **기저해 : 기하학적 의미는 꼭지점(Vertex)**

$$\begin{aligned} &Max\ \ 2x_1 + 5x_2 \\ &s.t.\ \ 3x_1 + 4x_2 \le 200 \\ &\qquad\ 9x_1 + 5x_2 \le 300 \\ &\qquad\qquad\quad x_1 \ge 5 \\ &\qquad\qquad\quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



최적해

$x_1 = 5, x_2 = 51$

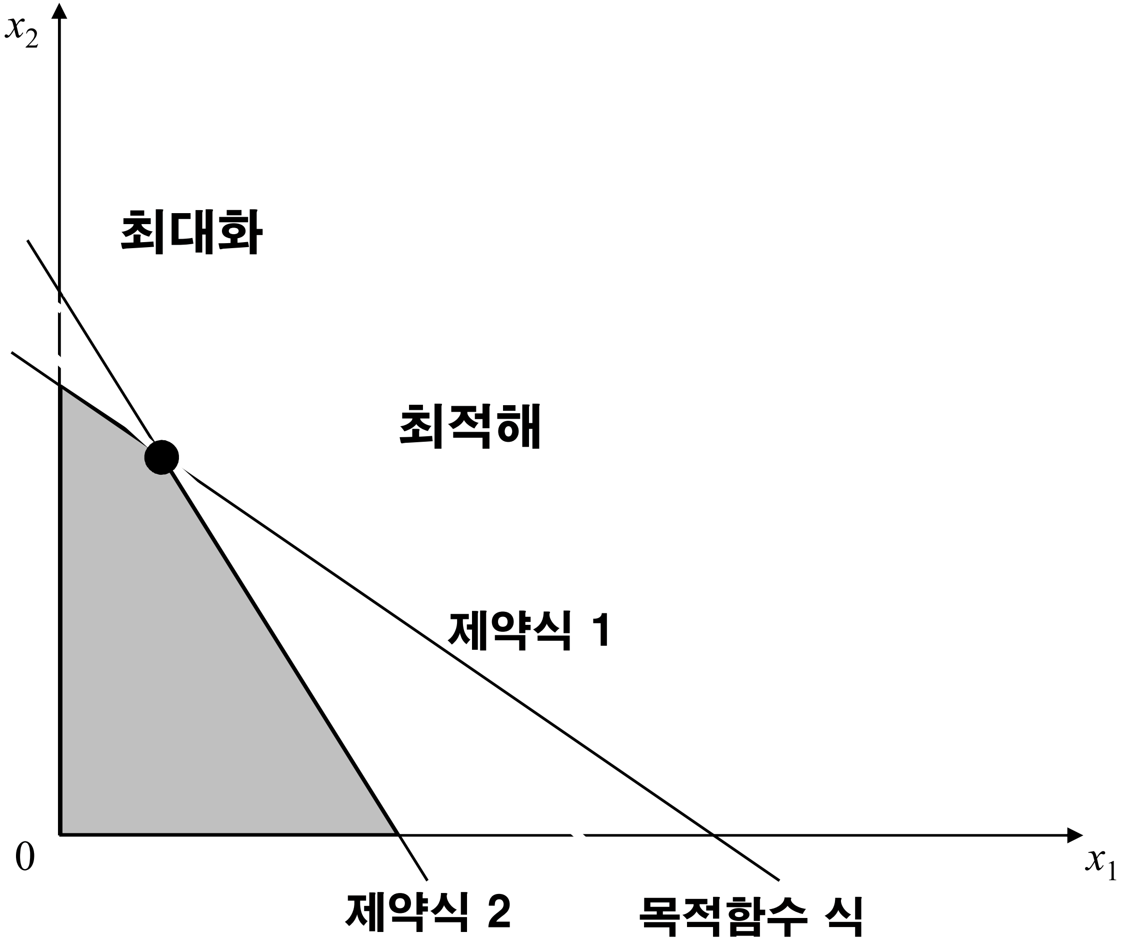
가능해 공간

최대화

Maximize $2x_1 + 5x_2$

※제품배합 문제의 기하학적 고찰

→ 최적해는 제약공간의 Vertex 중에서 얻을 수 있다!!



[예] 3개 제품의 배합 문제

A,B,C 세 상품을 생산하는데 상품 A의 1단위는 압연시간이 2.4분, 조립 공정에 5.0분이 필요하다. 이익은 600원이 발생한다. 상품 B의 1단위는 압연시간이 3.0분, 용접 공정에 2.5분이 필요하고, 이익은 700원이 발생한다. 상품 C의 1단위는 2.0분의 압연시간과 1.5분의 용접 시간, 2.5분의 조립 시간이 필요하고, 500원의 이익이 발생한다.

압연 공정의 생산 시간은 일주일에 1,200분이고, 용접 공정은 일주일에 600분, 조립 공정은 일주일에 1,500분이 가동될 수 있다.

최대의 이익을 발생시킬 수 있는 제품 A, B, C의 생산량은?

$$\begin{array}{lll}
Maximize\ \ 600x_1+700x_2+500x_3 & \longleftarrow & \text{이익의 최대화} \\
s.t.\ \ 2.4x_1+3.0x_2+2.0x_3\le 1200 & \longleftarrow & \text{압연 시간 제약} \\
\qquad 0.0x_1+2.5x_2+1.5x_3\le 600 & \longleftarrow & \text{용접 시간 제약} \\
\qquad 5.0x_1+0.0x_2+2.5x_3\le 1500 & \longleftarrow & \text{조립 시간 제약} \\
\qquad x_1,x_2,x_3\ge 0 & \longleftarrow & \text{비음인 해만을 구함}
\end{array}$$

선형계획모형

- **기하학적 접근** ?
  - **해가 제약공간상의 기저해**(Vertex) **중에서 얻어진다.**
  - 2,3**개 이내의 문제에서만 가시적인 풀이 가능**
    - ✓ 3**차원 이상의 문제에 적용이 어렵다.**
    - ✓ **제약식의 수가 많아도 해결이 어렵다.**

- **알고리즘적인 해법이 요구**

  => **단체법** (Simplex Method)
    - ✓ Dantzig
    - ✓ **제약식의 교점 중에서 최적해를 탐색**

[예] 기저해의 탐색

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Max} & 12x_1 + 15x_2 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right.$$

: 목적함수

제약식을 등식화

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Max} & 12x_1 + 15x_2 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 12 \\ & 2x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}\right.$$

Slack var.

제약식만을 이용한 연립방정식

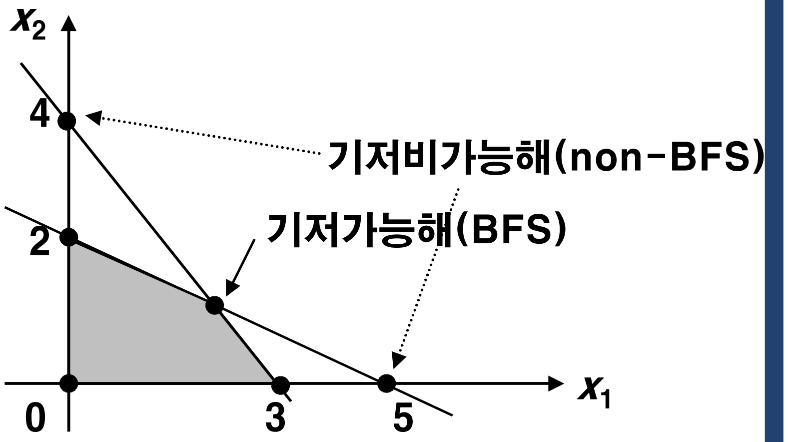
$$\left\{\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 = 10 \end{array}\right.$$

무수히 많은 해가 존재

두개의 변수 값만으로 연립방정식의 해를 찾는다면, 6개의 해가 얻어짐

기저변수	기저해 (x_1, x_2, x_3, x_4)	
(x_1, x_2)	(15/7, 8/7, 0, 0)	**BFS**
(x_1, x_3)	(5, 0, -8, 0)	**non-BFS**
(x_1, x_4)	(3, 0, 0, 4)	**BFS**
(x_2, x_3)	(0, 2, 6, 0)	**BFS**
(x_2, x_4)	(0, 4, 0, -10)	**non-BFS**
(x_3, x_4)	(0, 0, 12, 10)	**BFS**

⇔



[예] 기저해의 탐색 (계속)

- 기저해(basic solution) : 제약식의 개수(차수)만큼의 기저변수로 표현되는 해
  - 기저가능해(BFS: Basic Feasible Solution) : 양수로만 이루어진 기저해
  - 기저비가능해(non-BFS) : 음수가 포함된 기저해
- 최적해 : 목적함수를 최대화하는 가능해

목적식 반영 $\text{Max } 12x_1 + 15x_2$

기저변수	기저해 (x_1, x_2, x_3, x_4)	목적식의 값
(x_1, x_2)	(15/7,8/7,0,0)	300/7
(x_1, x_3)	(5, 0, -8, 0)	60
(x_1, x_4)	(3, 0, 0, 4)	36
(x_2, x_3)	(0, 2, 6, 0)	30
(x_2, x_4)	(0, 4, 0, -10)	60
(x_3, x_4)	(0, 0, 12, 10)	0

최적해

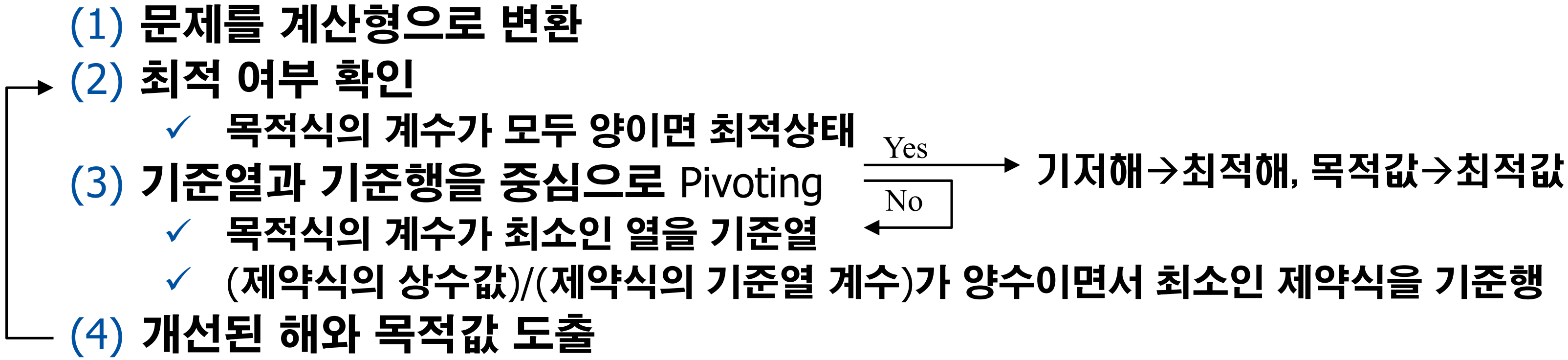
기저가능해 *기저비가능해*

➔비가능해는 탐색하지 않고, 가능해 내에서만 탐색을 하되, 목적함수 값을 꾸준히 증가 시킬 수 있도록 하는 방법이 필요.

단체법(Simplex Method)

- 단체법(單體法)
  - 1차 연립방정식 이론을 바탕으로 함
    - ✓ 행렬 연산: 가우스-조단 소거법
  - 이해가 쉽고 실용성도 높다.
  - 가능해 집합의 Vertex 중 하나를 최적해로 찾는다.
    - ✓ 초기 기저가능해 => 해의 개선 => 최적해

- 단체법 풀이 과정



(1) 문제를 계산형으로 변환

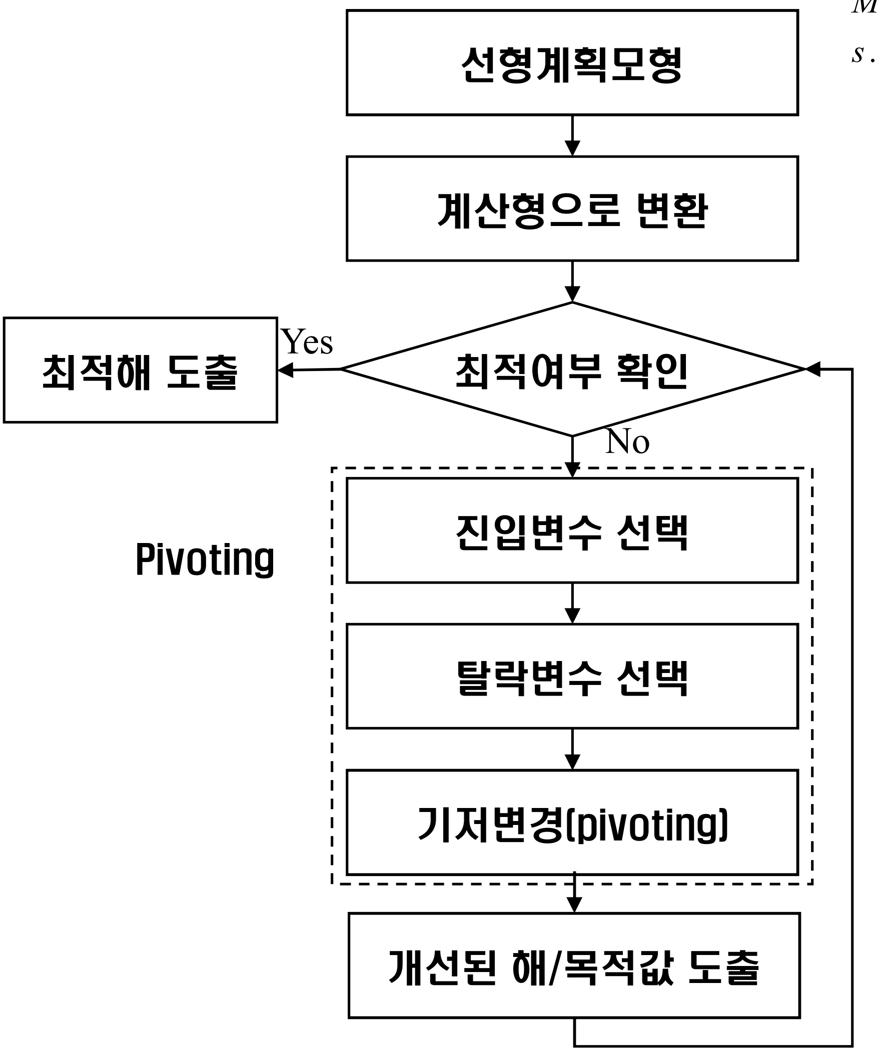
(2) 최적 여부 확인
  - ✓ 목적식의 계수가 모두 양이면 최적상태

기저해→최적해, 목적값→최적값

(3) 기준열과 기준행을 중심으로 Pivoting
  - ✓ 목적식의 계수가 최소인 열을 기준열
  - ✓ (제약식의 상수값)/(제약식의 기준열 계수)가 양수이면서 최소인 제약식을 기준행

(4) 개선된 해와 목적값 도출
  - ✓ 제약식의 상수값으로 표현되는 기저해 → 개선된 해
  - ✓ 목적식의 상수값 → 개선된 목적값

단체법 풀이과정 -개요



선형계획모형

계산형으로 변환

최적여부 확인

Yes

최적해 도출

No

Pivoting

진입변수 선택

탈락변수 선택

기저변경(pivoting)

개선된 해/목적값 도출

$$
\begin{aligned}
Max \quad & 2x_1 + 5x_2 \\
s.t. \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 200 \\
& 9x_1 + 5x_2 \le 300 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z - 2x_1 - 5x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\
3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 200 \\
9x_1 + 5x_2 \qquad\quad + 9x_4 &= 300 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 &
\end{aligned}
$$

- 목적식의 계수가 모두 양이면 최적해
  eg)-2,-5이므로 비최적임.
  기저해=(0,0,200,300), 목적값=0, 기저변수 x_3,x_4

- 진입변수: 추가될 기저변수
- 목적식의 음수계수 중에서 최소계수의 변수를 진입변수로 선택
  eg)-2,-5 중에서 -5의 변수인 x_2를 진입변수로 선택

- 탈락변수: 삭제될 기저변수
- 각 제약식에서 (상수항)/(진입변수의 계수)가 최소인 행의 기저변수를 탈락변수로 선택
  eg)200/4, 300/5 중 더 작은 첫번째 제약식의 기저변수인 x_3를 탈락변수로 선택

-기저변경: 탈락되는 행의 진입변수를 중심으로 pivoting을 함.
-기저변수 중에서 탈락변수는 빠지고, 진입변수가 새롭게 추가.
 eg)탈락되는 첫번째 제약식의 진입변수 x_2를 중심으로 pivoting
 → 기저변수가 x_3, x_4 → x_2, x_4 로 변경

-개선된 해/목적값 구한 후에, 다시 최적해 확인!!!

단체법 풀이과정 – 계산형으로 변형

계산형으로 변환 : 정규형→표준형→계산형

- 단체법 계산을 위해서는 선형계획 문제를 계산형으로 변환한다.

정규형

$$\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& ..... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1, x_2, ..., x_n \ge 0
\end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad & c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& ..... \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1, x_2, ..., x_n \ge 0
\end{aligned}$$

(제약식 상의 부등식을 등식화)

여유변수의 추가 : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i \quad \Rightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + s_i = b_i$

(Slack variable) $s_i \ge 0$

잉여변수의 추가 : $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \ge b_j \quad \Rightarrow \quad a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n - t_j = b_j$

(Surplus variable) $t_j \ge 0$

표준형

단체법 풀이과정 – 계산형으로 변형 (계속)

표준형

Maximize $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

s.t. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

.....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

또는

Minimize $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

s.t. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

.....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

(목적식을 등식화)

$$\begin{cases} Maximize: \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad \Rightarrow \quad z - c_1x_1 - c_2x_2 - ..... - c_nx_n = 0 \\ Minimize: \quad \text{-} z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad \Rightarrow \quad z + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0 \end{cases}$$

계산형

단체법 풀이과정 – 계산형으로 변형 (계속)

계산형

$$\begin{aligned} & z - c_1x_1 - c_2x_2 - ..... - c_nx_n = 0 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ & ..... \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} & z + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = 0 \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ & ..... \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{aligned}$$

⇕ ⇕

$$\begin{aligned} z - c^T x &= 0 \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} z + c^T x &= 0 \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{where} \quad x &= (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \\ c &= (c_1, c_2, ..., c_n)^T, \\ b &= (b_1, b_2, ..., b_m)^T, \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

단체법 풀이과정 - 가우스-조단 소거법

예제

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -3 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

연립방정식을 행렬 ***(A|b)***로 표현하여,
선형결합을 통하여 ***(I|b')***로 변형한다.
→ 해 ***x=b'***

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{(2)+(1)\rightarrow(2) \\ (3)-(1)\rightarrow(3)}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
\xrightarrow{(2)-(3)\rightarrow(2)}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{(3)/4\rightarrow(3)}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{(1)+3*(3)\rightarrow(1) \\ (2)+2*(3)\rightarrow(2)}}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{(1)-2*(2)\rightarrow(1)}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

[예] 단체법 풀이

정규형

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 105 \\ & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\ & x_j \ge 0,\ \forall j \end{aligned}$$

계산형

① 최소의 목적함수 계수(-11)를 갖는 4열 선택.

초기 기저해

$$\begin{aligned} z - 4x_1 - 5x_2 - 8x_3 - 11x_4 \qquad\qquad & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad & = 15 && \leftarrow 15/1 = 15 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \qquad + x_6 \quad & = 105 && \leftarrow 105/15 = 7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \qquad\qquad + x_7 & = 120 && \leftarrow 120/2 = 60 \\ x_j \ge 0,\ \forall j \end{aligned}$$

② 최소의 비율을 갖는 3행 선택.

③ 3행 4열을 기준으로 pivot을 실시

(1) 계산형으로 변형

(2) 최적해 여부 확인

: 목적식 계수가 음을 포함하므로 아님.

초기해 $\boldsymbol{x}$=(0, 0, 0, 0, 15, 105, 120)

목적함수값 z=0

$$\begin{aligned} z - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \qquad\qquad + \frac{11}{15}x_6 \qquad & = 77 \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \qquad + x_5 - \frac{1}{15}x_6 \qquad & = 8 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 \qquad + \frac{1}{15}x_6 \qquad & = 7 \\ \frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 \qquad\qquad - \frac{2}{15}x_6 + x_7 & = 106 \\ x_j \ge 0,\ \forall j \end{aligned}$$

(3) x_4를 기준으로 **Pivoting**

(1)+(3)*11/15→(1)
(2)−(3)/15 →(2)
(3)/15 → (3)
(4)−(3)*2/15→(4)

(4) 개선된 해 도출

개선된 해 $\boldsymbol{x}$= (0, 0, 0, 7, 8, 0, 106)

목적함수값 z=77

→ **goto (2)** 최적해 여부 확인

: 목적식 계수가 음이 남아있으므로 최적해 아님.

[예] 단체법 풀이 (계속)

① 최소의 목적함수 계수(-9/5)를 갖는 1열 선택.

② 최소의 비율을 갖는 2행 선택.

③ 2행 1열을 기준으로 pivot을 실시

$$
\begin{aligned}
&z-\frac{9}{5}x_1-\frac{4}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3+\frac{11}{15}x_6=77\\
&\boxed{\frac{4}{5}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3+x_5-\frac{1}{15}x_6=8}\\
&\frac{1}{5}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3+x_4+\frac{1}{15}x_6=7\\
&\frac{33}{5}x_1+\frac{13}{3}x_2+\frac{5}{3}x_3-\frac{2}{15}x_6+x_7=106\\
&x_j\geq 0,\ \forall j
\end{aligned}
$$

1행 1열 기준으로 Pivoting

목적함수의 모든 계수값이 0이상이므로 현재의 해가 최적해가 된다.

$$
\begin{aligned}
&\boxed{z+\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{12}x_3+\frac{9}{4}x_5+\frac{7}{12}x_6=95}\\
&x_1+\frac{5}{6}x_2+\frac{5}{12}x_3+\frac{5}{4}x_5-\frac{1}{12}x_6=10\\
&\frac{1}{6}x_2+\frac{7}{12}x_3+x_4-\frac{1}{4}x_5+\frac{1}{12}x_6=5\\
&-\frac{7}{6}x_2-\frac{13}{12}x_3-\frac{33}{4}x_5+\frac{5}{12}x_6+x_7=40\\
&x_j\geq 0,\ \forall j
\end{aligned}
$$

개선된 해 $x=(0, 0, 0, 7, 8, 0, 106)$
목적함수값 $z=77$

(1)+(2)*9/4→(1)
(2)/4/5 →(2)
(3)−(2)/4 → (3)
(4)−(2)*33/4→(4)

최적해 $x^*=(10, 0, 0, 5, 0, 0, 40)$
목적함수값 $z^*=95$

탐구 1) 진입변수 선택시, 최소의 목적함수 계수 이유? 빠르게 해를 개선하기 위하여

탐구 2) 탈락변수 선택시, 최소의 비율 선택 이유? 가능해 유지
(우변상수가 음이 되면 비가능해가 됨)

탐구 3) Pivoting의 의미? 또다른 Vertex(기저해)를 탐색

[예] 단체법 풀이 – 단체표 사용

- 단체법을 표로 압축
- 계산형 문제의 계수만 추출
- 프로그램화하기 용이

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 105 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
& x_j \ge 0,\ \forall j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& z - 4x_1 - 5x_2 - 8x_3 - 11x_4 && = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 && = 15 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_6 && = 105 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 && = 120 \\
& x_j \ge 0,\ \forall j
\end{aligned}
$$

단체표

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	-4	-5	-8	-11	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	15
0	3	5	10	15	0	1	0	105
0	7	5	3	2	0	0	1	120
1	-9/5	-4/3	-2/3	0	0	11/15	0	77
0	4/5	2/3	1/3	0	1	-1/15	0	8
0	1/5	1/3	2/3	1	0	1/15	0	7
0	33/5	13/3	5/3	0	0	-2/15	1	106
1	0	1/6	1/12	0	9/4	7/12	0	95
0	1	5/6	5/12	0	5/4	-1/12	0	10
0	0	1/6	7/12	1	-1/4	1/12	0	5
0	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	5/12	1	40

제 4 열의 목적함수 계수가 -11로 최소.
→ *진입변수* = x_4 가 된다.

min{ 15/1, 105/15, 120/2 } = 105/15 = 7.
→ 최소의 비율을 갖는 2행을 기준열로 Pivoting

최소의 목적함수 계수는 -9/5.
따라서 *진입변수* = x_1 이 된다.

min{ 8/(4/5), 7/(1/5), 106/(33/5) } = 8/(4/5) = 10.
→ 최소의 비율을 갖는 1행을 기준열로 Pivoting

목적함수의 모든 계수값이 0이상이므로
현재의 해가 최적해가 된다.

Shadow price : 여유변수들의 목적함수에 대한 계수
→우변 상수의 한 단위가 총 이익에 미치는 변화량

[예] 단체법 풀이 (최소화 문제)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
 & 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 105 \\
 & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
 & x_j \ge 0,\ \forall j
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & -4x_1 - 5x_2 - 8x_3 - 11x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
 & 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 105 \\
 & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
 & x_j \ge 0,\ \forall j
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
z + 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_6 = 105 \\
7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 120 \\
x_j \ge 0,\ \forall j
\end{array}
$$

(1) 계산형으로 변형

(2) 최적해 여부 확인

: 목적식 계수가 음을 포함하지 않음. → 이미 최적!!!

최적해 $\mathbf{x}$**=(0,0,0,0,15,105,120)**

목적함수값 z**=0**

[예] 단체법 풀이 (최소화 문제) (계속)

$$\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad & 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \boxed{-11x_4} \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 105 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
& x_j \ge 0,\ \forall j
\end{aligned}$$

(1) 계산형으로 변형

$$\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & -4x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 11x_4 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 105 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\
& x_j \ge 0,\ \forall j
\end{aligned}$$

(2) 최적해 여부 확인

: 목적식 계수가 음을 포함하므로 최적해가 아님.

$$\begin{aligned}
& z + 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_6 = 105 \\
& 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 120 \\
& x_j \ge 0,\ \forall j
\end{aligned}$$

단체표

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	4	5	8	-11	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	15
0	3	5	10	15	0	1	0	105
0	7	5	3	2	0	0	1	120
1	9/5	4/3	2/3	0	0	11/15	0	77
0	4/5	2/3	1/3	0	1	-1/15	0	8
0	1/5	1/3	2/3	1	0	1/15	0	7
0	33/5	13/3	5/3	0	0	-2/15	1	106

← **목적함수의 모든 계수값이 0 이상이므로 최적!!!**

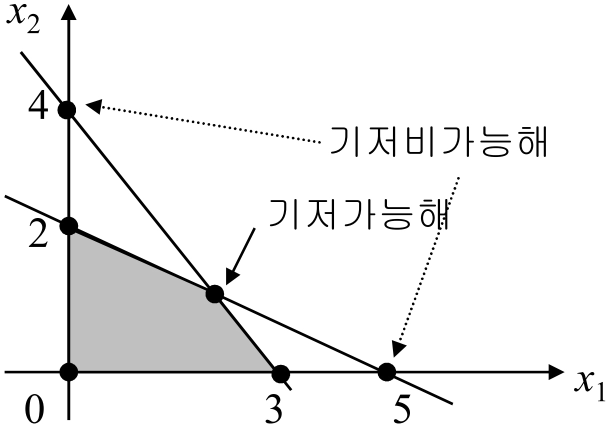
[예] 단체법 연습

(1) Max $12x_1 + 15x_2$ **(p.10의 예제)**

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$

$2x_1 + 5x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$



(2) Min $12x_1 + 15x_2$ → Max $-12x_1-15x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$

$2x_1 + 5x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

(3) Max $-2x_1 + x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$

$2x_1 + 5x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

(4) Min $-2x_1 + x_2$ → Max $2x_1 - x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$

$2x_1 + 5x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

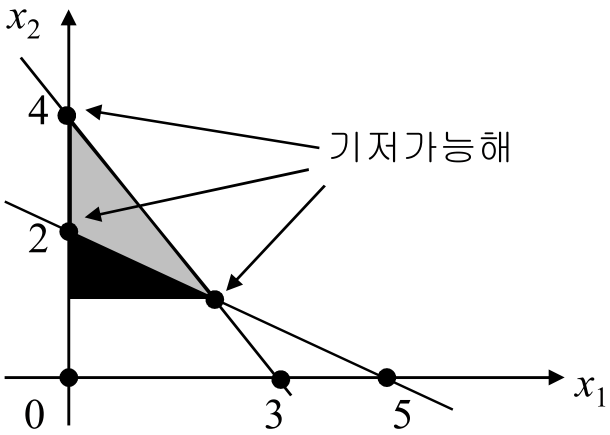
[예] 단체법 연습 (계속)

(5) Max $12x_1 + 15x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 \le 12$ → $4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 12$

$2x_1 + 5x_2 \ge 10$ → $2x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 = 10$

$x_1, x_2 \ge 0$ → $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$



(6) Max $12x_1 + 15x_2$

s.t. $4x_1 - 3x_2 \le$ -12 → $-4x_1 + 3x_2 \ge 12$

$2x_1 + 5x_2 \ge 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

(7) Max $12x_1 + 15x_2$

s.t. $4x_1 + 3x_2 = 12$ → $4x_1 + 3x_2 \ge 12$

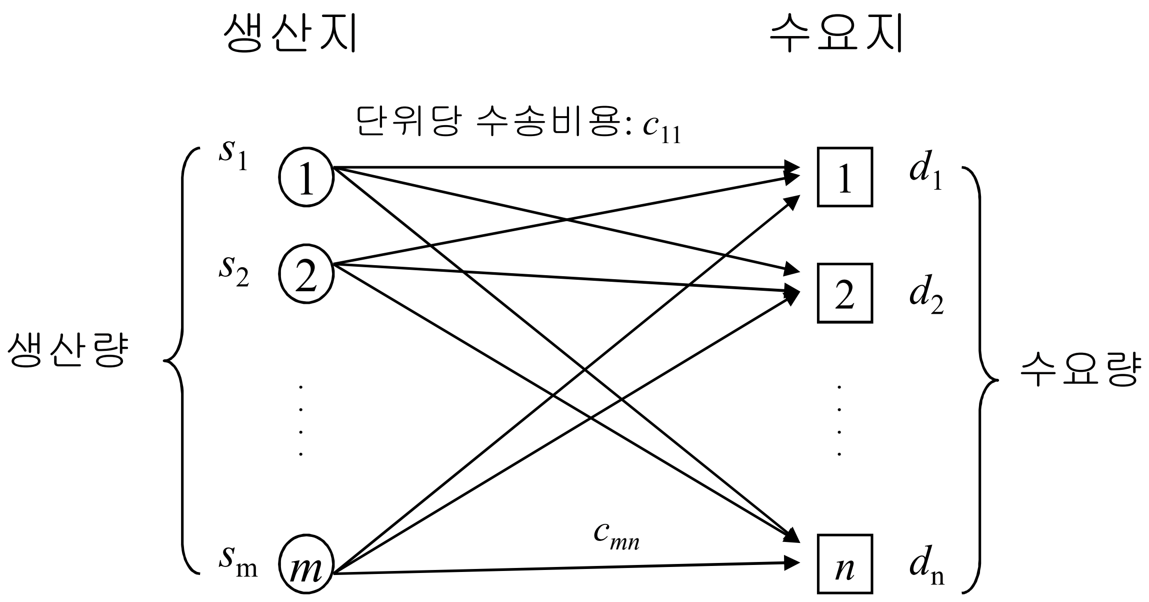
$4x_1 + 3x_2 \le 12$

$2x_1 + 5x_2 \ge 10$

$x_1, x_2 \ge 0$

대표적 선형계획법 문제들

- **수송 문제**(Transportation Problem)
  - **m개의 생산지로부터 n개의 수요지로 수요량을 만족시키면서, 최소의 비용으로 전달하는 문제**



대표적 선형계획법 문제들

모형화 결과

Minimize $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

s.t. $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le s_i , \quad i = 1,2,...., \ n$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge d_j , \quad j = 1,2,...., \ m$

$x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j$

Minimize $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{mn}x_{mn}$

s.t. $x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} \le s_1$

$.....$

$x_{m1} + x_{\mathrm{m}2} + ... + x_{mn} \le s_m$

$x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} \ge d_1$

$.....$

$x_{1n} + x_{2\mathrm{n}} + ... + x_{mn} \ge d_n$

$x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j$

[예] 수송 문제

A 건설회사에서 3곳의 야산으로부터 모래를 운반하여 4곳의 아파트 부지에 공급한다. 모래의 운반과 관련한 비용 및 생산량과 수요량이 다음의 행렬에 정리되어 있다. 최소의 운반 비용을 얻을 수 있는 수송 경로를 구하여라.

아파트 부지 / 야산	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	2	3	11	7	6
s_2	1	0	6	1	1
s_3	5	8	15	9	10
수요량	7	5	3	2	합: 17

단위: 100만원/톤

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le s_i, \quad i = 1,2,\ldots., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge d_j, \quad j = 1,2,\ldots., m$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j$$

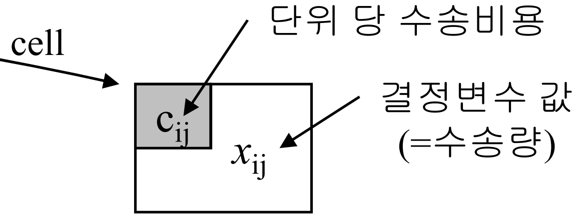
$$\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & 2x_{11} + 3x_{12} + 11x_{13} + 7x_{14} \\
& + x_{21} + 6x_{23} + x_{24} \\
& + 5x_{31} + 8x_{32} + 15x_{33} + 9x_{34} \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 6 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 10 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 7 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 5 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 3 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 2 \\
& x_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

[예] 수송 문제 – 환에 의한 해법

Step 1) 초기해를 하나 찾는다.(최소가법 이용)
Step 2) 초기해를 개선시킬 수 있는 수송비용의 음환(negative cycle)을 찾는다.
Step 3) 음환을 찾을 수 없으면 최적이다.

1) 최소가법을 이용하여 찾은 초기해

수요지 공급지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	2 6	3	11	7	6
s_2	1	0 1	6	1	1
s_3	5 1	8 4	15 3	9 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17



$$총비용 = 2\cdot6+0\cdot1+5\cdot1+8\cdot4+15\cdot3+9\cdot2 = 112$$

기저변수: $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$ (양수)
비기저변수: $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ (zero)
기저해: (6,0,0,0, 0,1,0,0, 1,4,3,2)

cf.기저변수의 개수 = m+n-1

- 다른 기저해(Vertex)를 찾는 방법?
zero인 비기저변수 중 하나를 양수로 증가시키고(진입변수), 기저해 중 하나를 zero으로 감소시킨다 (탈락변수).
-개선될 지 예상하는 방법?
단위당 증가비용과 단위당 감소비용을 비교하여, 총비용이 감소하도록 기저해를 변경시킨다.
➔ 음환(negative cycle)을 찾아서 기저를 변경한다.

[예] 수송 문제 – 환에 의한 해법 (계속)

2) 음환(negative cycle)을 찾는다.

- 환(cycle) : 비기저셀(cell)에서 출발하여 기저셀들을 연결하는 최소 고리.
- 모든 비기저셀(cell)에 대하여 각 음환의 비용변화량을 구한다.

$$\overline{c_{ij}} = \sum(\text{부호})\times(\text{셀의 수송비})$$

수요지 \ 공급지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	2 6 -	3 +	11	7	6
s_2	1	0 1	6	1	1
s_3	5 1 +	8 4 -	15 3	9 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17

환(cycle)	환의 비용변화량(cost)
$(x_{12}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{12})$	$x_{12}\uparrow\ \ \overline{c_{12}} = +3-2+5-8 = -2 < 0$ 최소 ←
$(x_{13}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{13})$	$x_{13}\uparrow\ \ \overline{c_{13}} = +11-2+5-15 = -1 < 0$ ←
$(x_{14}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{41}\rightarrow x_{44}\rightarrow x_{14})$	$x_{14}\uparrow\ \ \overline{c_{14}} = +7-2+5-9 = 1 > 0$
$(x_{21}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21})$	$x_{21}\uparrow\ \ \overline{c_{21}} = +1-5+8-0 = 4 > 0$
$(x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{33}\rightarrow x_{23})$	$x_{23}\uparrow\ \ \overline{c_{23}} = +6-0+8-15 = -1 < 0$ ←
$(x_{24}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{32}\rightarrow x_{34}\rightarrow x_{24})$	$x_{24}\uparrow\ \ \overline{c_{24}} = +1-0+8-9 = 0$

음환

- 음환: 비용변화량이 음(negative)인 환.
  해의 개선가능성이 존재한다는 의미. → 음환이 존재하지 않으면 최적해!!!

3) 해의 개선

- 환의 비용변화량이 최소인 환을 개선.
- 환에서 음수가 되지 않는 범위내에서
  그 비기저셀(진입변수)의 값을 최대한 증가시킨다.

e.g. 최소비용 음환인 x_{12} 값을 4만큼 증가

$(x_{12}, x_{11}, x_{31}, x_{32}) = (0,6,1,4) \rightarrow (4,2,5,0)$

진입 탈락

기저해: (2,4,0,0, 0,1,0,0, 5,0,3,2)

수요지 \ 공급지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	2 2	3 4	11	7	6
s_2	1	0 1	6	1	1
s_3	5 5	8	15 3	9 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17

$$\text{총비용} = 2\cdot 2 + 3\cdot 4 + 0\cdot 1 + 5\cdot 5 + 15\cdot 3 + 9\cdot 2 = 104$$

[예] 수송 문제 – 환에 의한 해법 (계속)

공급지 \ 수요지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	$\boxed{2}$ 6	$\boxed{3}$	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	6
s_2	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$	1
s_3	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{15}$ 3	$\boxed{9}$ 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17

기저해: (6,0,0,0, 0,1,0,0, 1,4,3,2)

목적값: 2*6+0*1+5*1+8*4+15*3+9*2=112

$\overline{c}_{12} = -2,\ \overline{c}_{13} = -1,\ \overline{c}_{14} = 1,\ \overline{c}_{21} = 4,\ \overline{c}_{23} = -1,\ \overline{c}_{24} = 0$

공급지 \ 수요지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	$\boxed{2}$ 2	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	6
s_2	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$ 1	$\boxed{6}$	$\boxed{1}$	1
s_3	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$ 3	$\boxed{9}$ 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17

기저해: (2,4,0,0, 0,1,0,0, 5,0,3,2)

목적값: 2*2+3*4+0*1+5*5+15*3+9*2=104

$\overline{c}_{13} = -1,\ \overline{c}_{14} = 1,\ \overline{c}_{21} = 2,\ \overline{c}_{23} = -3,\ \overline{c}_{24} = -2,\ \overline{c}_{32} = 2$

공급지 \ 수요지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	6
s_2	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{6}$ 1	$\boxed{1}$	1
s_3	$\boxed{5}$ 6	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$ 2	$\boxed{9}$ 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17

기저해: (1,5,0,0, 0,0,1,0, 6,0,2,2)

목적값: 2*1+3*5+6*1+5*6+15*2+9*2=101

$\overline{c}_{13} = -1,\ \overline{c}_{14} = 1,\ \overline{c}_{21} = 5,\ \overline{c}_{22} = 3,\ \overline{c}_{24} = 1,\ \overline{c}_{32} = 2$

공급지 \ 수요지	d_1	d_2	d_3	d_4	공급량
s_1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{11}$ 1	$\boxed{7}$	6
s_2	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{6}$ 1	$\boxed{1}$	1
s_3	$\boxed{5}$ 7	$\boxed{8}$	$\boxed{15}$ 1	$\boxed{9}$ 2	10
수요량	7	5	3	2	총합: 17

최적해

기저해: (1,5,0,0, 0,0,1,0, 6,0,2,2)

목적값: 2*1+3*5+6*1+5*7+15*1+9*2=100

$\overline{c}_{11} = 1,\ \overline{c}_{14} = 2,\ \overline{c}_{21} = 5,\ \overline{c}_{22} = 2,\ \overline{c}_{24} = 1,\ \overline{c}_{32} = 1$

모두 양이므로 최적!!

대표적 선형계획법 문제들

식단 문제

- 여러 가지 영양분을 지닌 음식들로부터 필수 영양분을 최소의 음식값으로 섭취하는 문제

[예] 주위에서 흔히 볼 수 있는 음식 재료에 포함된 영양분이 다음 표에 정리되어 있다. 최소의 비용으로 식단을 마련해 보고자 한다. 단 하루의 식단에서 쌀은 20포, 쇠고기는 1근, 우유는 2통, 계란은 3개, 배추는 3단을 넘지 않기로 한다.

재료 영양	쌀(포)	쇠고기(근)	우유(통)	계란(12 개)	배추(단)	1 일 필요량
열량(Kcal)	340	1080	362	1040	17	2200
단백질(g)	6.5	167	19	78	1.3	70
비타민(I.U)	0	97	758	7080	255	5000
철분(mg)	0.4	11	0.3	13	0.3	12.5
탄수화물(g)	52	30	25	0	5	
콜레스테롤(u)	0	22	11	120	0	
값(원)	75	1640	370	550	110	

대표적 선형계획법 문제들

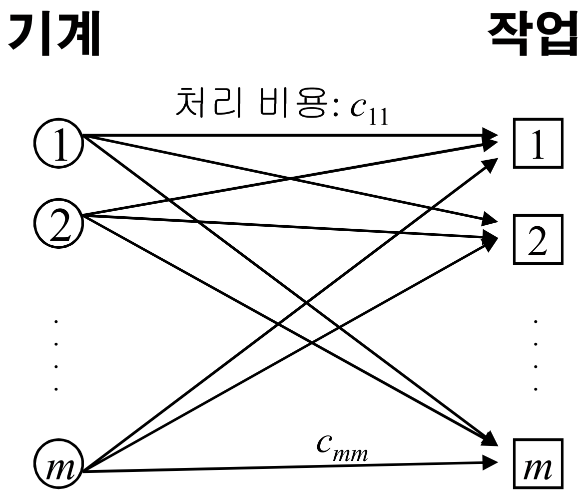
모형화 결과

$$\begin{aligned}
\text{Minimize}\quad & 75x_1 + 1640x_2 + 370x_3 + 550x_4 + 110x_5 \\
\text{s.t.}\quad & 340x_1 + 1080x_2 + 362x_3 + 1040x_4 + 17x_5 \ge 2200 \\
& 6.5x_1 + 167x_2 + 19x_3 + 78x_4 + 1.3x_5 \ge 70 \\
& 97x_2 + 758x_3 + 7080x_4 + 255x_5 \ge 5000 \\
& 0.4x_1 + 11x_2 + 0.3x_3 + 13x_4 + 0.3x_5 \ge 12.5 \\
& x_1 \le 20,\quad x_2 \le 1,\quad x_3 \le 2,\quad x_4 \le 0.25,\quad x_5 \le 3 \\
& x_{ij} \ge 0,\quad \forall i, j
\end{aligned}$$

대표적 선형계획법 문제들

배정문제(Assigning Problem)

- m개의 작업을 n개의 기계에 각기 하나씩 최소의 비용이 되도록 할당하는 문제
- 공급량과 수요량이 각기 1씩 발생하는 특별한 경우의 수송문제



만약 기계 i가 작업 j에 할당되면 $x_{ij}=1$

아니면 $x_{ij}=0$

$$\text{Minimize} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1, \quad i=1,2,....,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1, \quad j=1,2,....,m$$

$$x_{ij}=0 \ \ or \ \ 1, \quad \forall i,j$$

대표적 선형계획법 문제들

배낭 문제(Knapsack Problem)

- 한정된 배낭의 용량에 맞게 각각의 용량을 가지는 물건을 최대의 효용을 얻도록 채우는 문제
- 대표적인 정수계획법 문제 중의 하나

[예] 갑돌이는 등산을 계획하고 있는데, 가면서 먹을 음식을 결정해야만 한다. 배당에는 총 1.6 kg까지만 음식을 담기로 결정했다고 한다. 각각의 음식의 무게와 그 음식을 가져 감으로써 얻을 수 있는 만족도가 다음과 같을 때, 가장 큰 만족도를 얻을 수 있는 음식의 조합을 결정하시오.

물건	고기	쌀	라면	과일	빵	
만족도	20	48	14	18	20	배낭의 무게
무게(100g)	8	6	2	3	2	16

$$\begin{aligned}&\text{Maximize } 20x_1 + 48x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 20x_5\\ &\text{s.t.} \quad 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 16\\ &\qquad\; x_i = 1 \ or \ 0, \ \forall i\end{aligned}$$

대표적 선형계획법 문제들

- **Minimax 문제**

$$\begin{aligned} &\text{Minimize maximum}\{12x_1 - 21x_2, 17x_1 - 10x_2\} \\ &s.t. \quad 2x_1 - 7x_2 \geq 12 \\ &\qquad 6x_1 + 11x_2 \geq 41 \\ &\qquad 9x_1 + 17x_2 \leq 102 \\ &\qquad x_i \geq 0, \quad \forall i \end{aligned}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimize Z} \\ &s.t. \quad Z \geq 2x_1 - 21x_2 \\ &\qquad Z \geq 17x_1 - 10x_2 \\ &\qquad 2x_1 - 7x_2 \geq 12 \\ &\qquad 6x_1 + 11x_2 \geq 41 \\ &\qquad 9x_1 + 17x_2 \leq 102 \\ &\qquad x_i \geq 0, \quad \forall i \end{aligned}$$