전산 선박 설계 강의 교재

Part 3. 격자 구조(Grillage) 해석 방법을 이용한 선박 화물창 구조 해석

2006학년도 2학기

서울대학교 조선해양공학과

이규열

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

목 차

Ch0. 배울 내용 소개

Ch1. 선수 학습 : 재료 역학[5], Notation, 좌표축의 회전 변환

Ch2. 스프링 구조 해석 [1,2]

Ch3. 트러스 구조 해석 [1,2]

Ch4. 보 및 프레임(Frame) 구조 해석 [1,2]

Ch5. 격자 구조(Grillage) 해석 [2,3]

Ch6. 변위법과 응력법 [1,2,3,4,5]

Ch7. 격자 구조(Grillage) 해석 방법을 이용한 선박 화물창 구조 해석

Ch8. 격자 구조(Grillage) 해석 프로그램 작성 Guide

참고자료

1: 박재형, “구조해석 꼭 어려워야 하나” , 기문당, 2006

2: Daryl L. Logan, “유한요소법의 첫걸음” 제2판, 시그마프레스, 1998

3: Robert E. Sennett, “매트릭스 구조해석”, 지성출판사, 1996

4: K.C. Rockey, H.R. Evans, “유한요소법”, 기문당, 1987

5: S. Timochenko, 임상전 편저, “재료역학”, 문운당 2002

Ch0. 배울 내용 소개

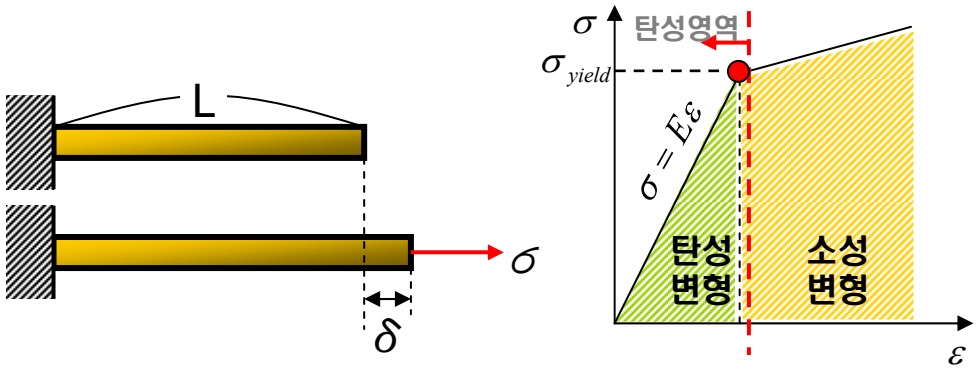
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

① 응력-변형율 관계

$$\frac{F}{A} = E\frac{\delta}{L} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon$$

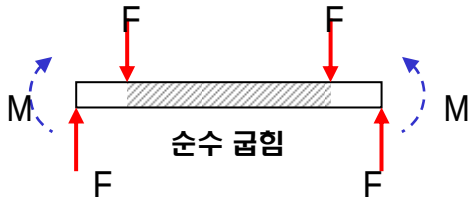
변형율(ε) : 단위길이당 늘어난 길이

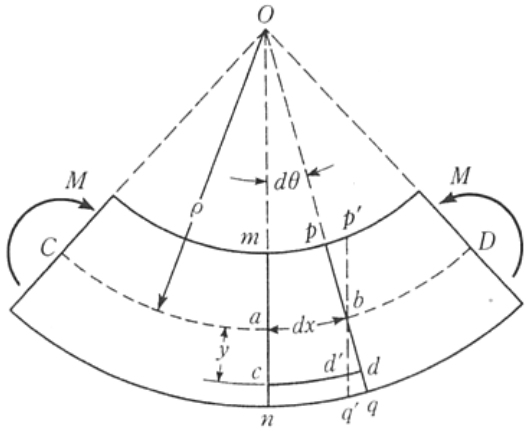
압력=응력(σ) : 단위면적당 작용하는 힘



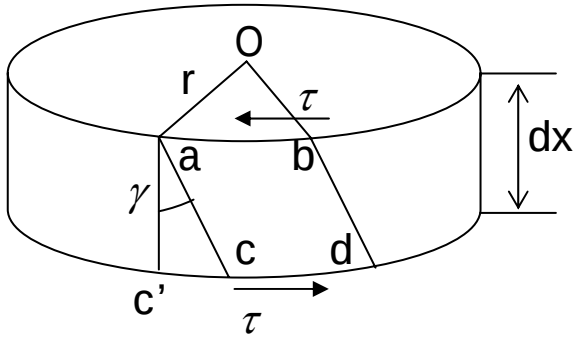
② 보의 처짐 방정식 (2계 미분 방정식)

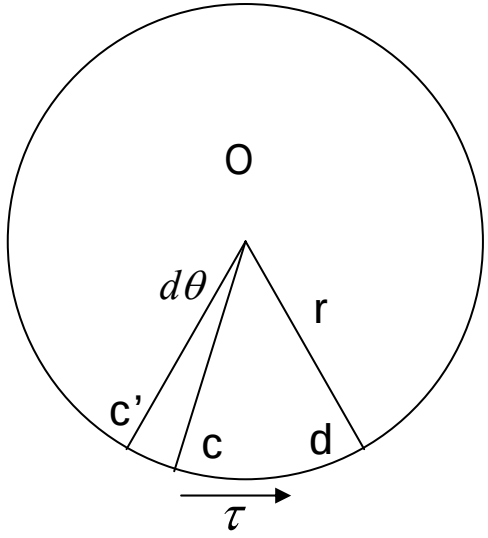
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

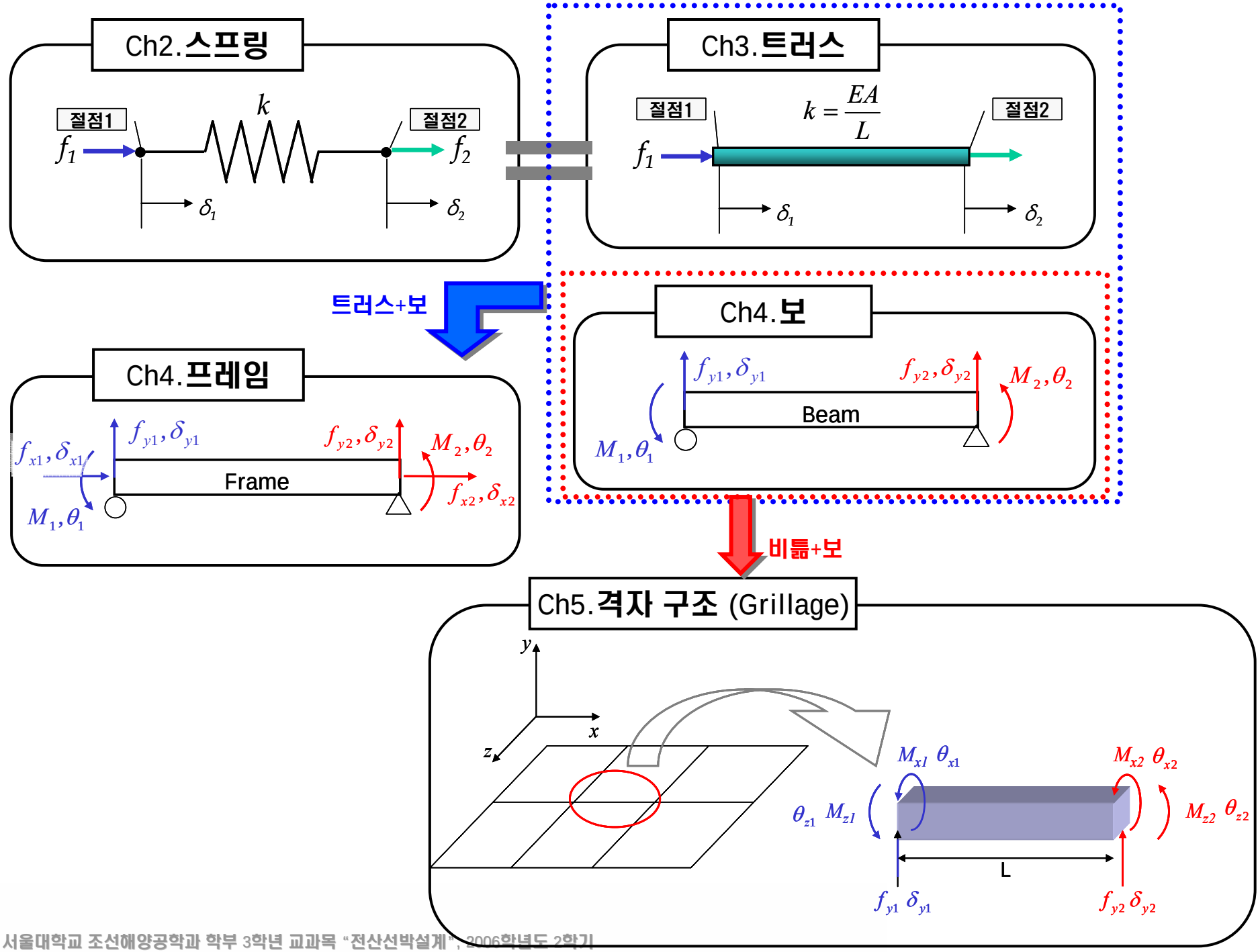




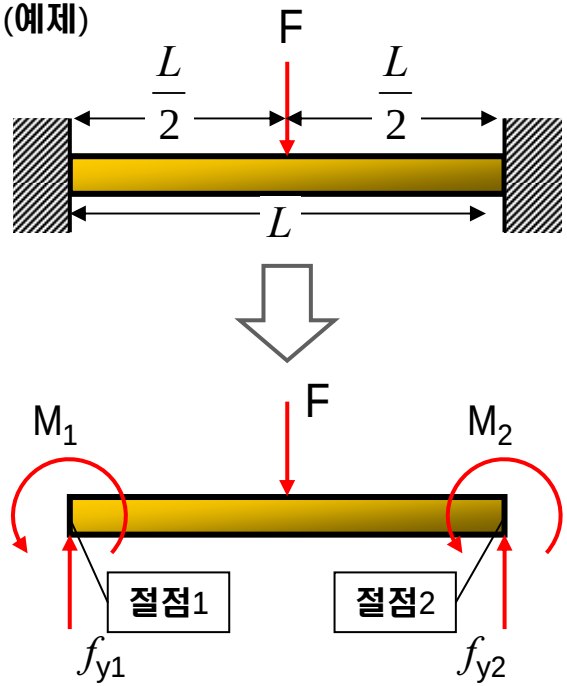
③ 비틂-비틂각 관계 : $\theta = \frac{Tl}{GJ}$






Ch2.스프링
절점1
절점2
k
f_1
f_2
δ_1
δ_2
Ch3.트러스
절점1
절점2
$k = \frac{EA}{L}$
f_1
δ_1
δ_2
트러스+보
Ch4.보
f_{y1}, δ_{y1}
f_{y2}, δ_{y2}
M_2, θ_2
Beam
M_1, θ_1
Ch4.프레임
f_{x1}, δ_{x1}
f_{y1}, δ_{y1}
f_{y2}, δ_{y2}
M_2, θ_2
Frame
f_{x2}, δ_{x2}
M_1, θ_1
비틂+보
Ch5.격자 구조 (Grillage)
y
x
z
M_{x1} θ_{x1}
M_{x2} θ_{x2}
θ_{z1} M_{z1}
M_{z2} θ_{z2}
L
f_{y1} δ_{y1}
f_{y2} δ_{y2}

(예제)

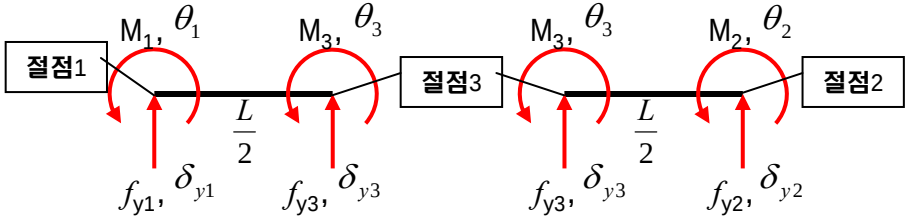


<응력법>

$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ 를 두번 적분하여 y를 구함

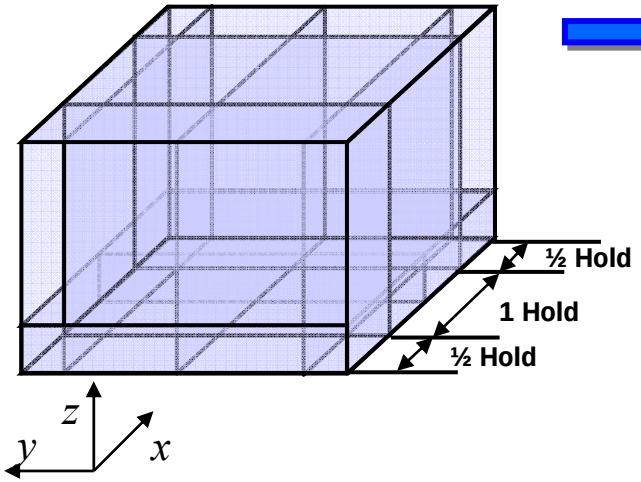
<변위법>

다음과 같이 요소로 나눈 뒤 강성 매트릭스를 구성하여 풀이



응력법과 변위법의 장단점 비교

Ch7. 격자 구조 해석 방법을 이용한 선박 화물창 구조 해석



① Side Shell

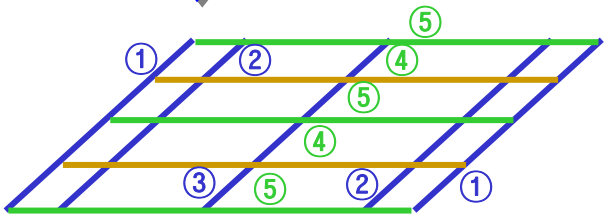
② Side Longitudinal Bulkhead

③ Center Girder + Longitudinal Bulkhead

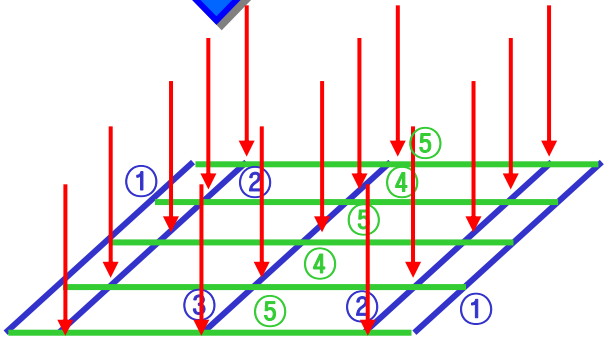
④ Transverse Bulkhead

⑤ Transverse Floor

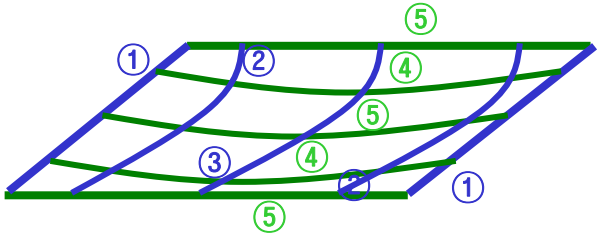
Step1. 화물창을 격자 구조 (Grillage)로 표현



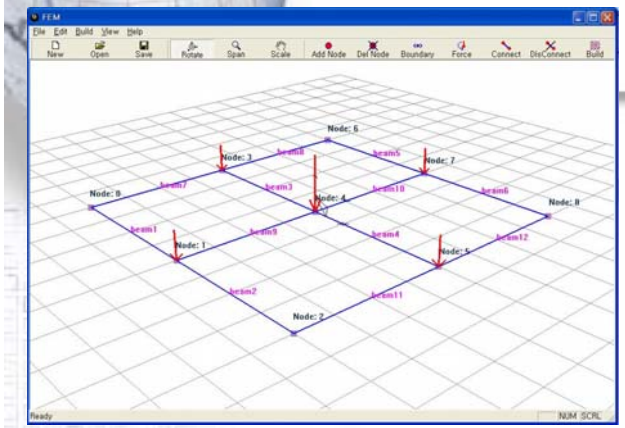
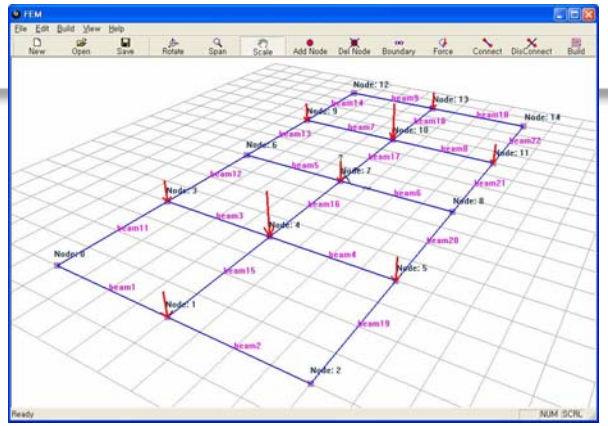
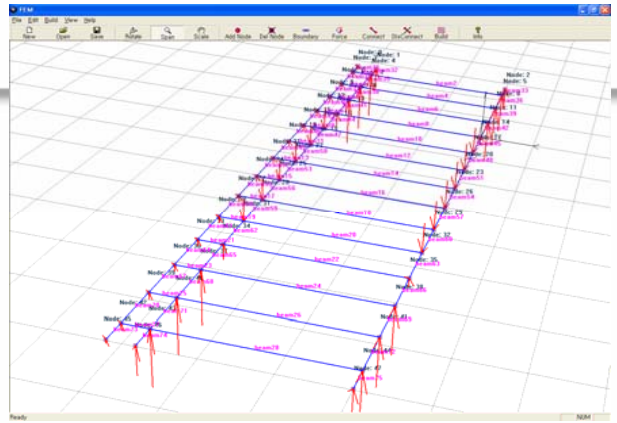
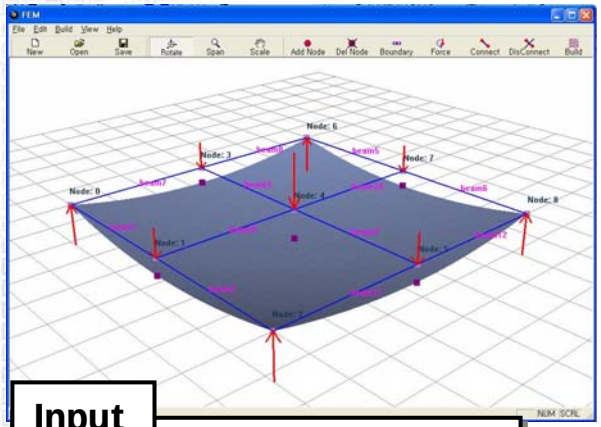
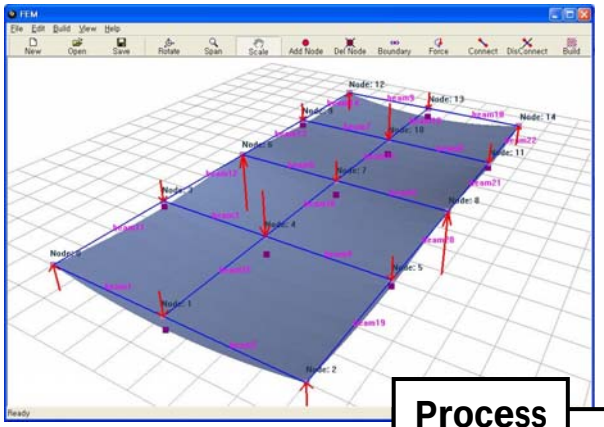
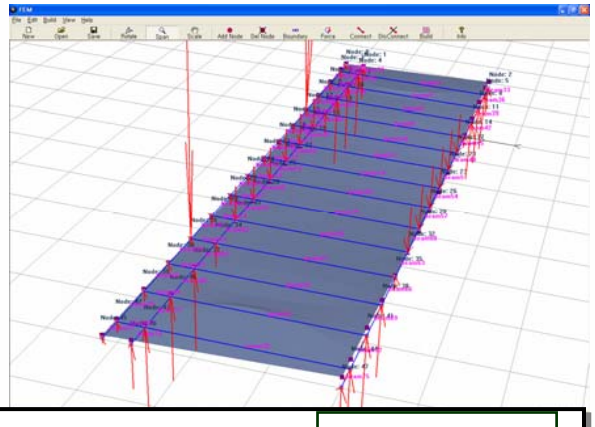
Step2. 각 부재의 Property와 절점에 작용하는 힘과 모멘트 계산



Step3. 격자 구조의 강성 방정식으로부터 각 절점의 변위 계산



Ch8. 격자 구조(Grillage) 해석 프로그램 작성 Guide

Input

Node Class

- 절점의 좌표
- 경계 조건
- 절점에 가해지는 힘과 모멘트

- 연결된 점 (i, j)
- Beam Property
- Beam 요소가 Global 좌표계와 이루는 각

NodeConnet Class

Output

- 변위
- 힘
- 모멘트

Node Class

Process

Grillage Class

1. 각 요소마다 Grillage 강성 방정식을 세움

Structure Class

2. 강성 방정식을 중첩
3. 경계 조건에 따라 알려진 값과 모르는 값을 구별
4. 알려진 힘과 모르는 변위만으로 구성된 강성 방정식을 세워 변위를 구함
5. 구한 변위를 중첩된 강성 매트릭스에 대입하여 미지의 힘과 모멘트를 구함

Ch1. 선수 학습

1.1 응력과 변형도 관계식

1.2 보의 처짐 방정식

1.3 비틂힘(Torque)과 비틂각(θ)의 관계

1.4 절점 (Node)

1.5 Notation

1.6 좌표축의 회전 변환

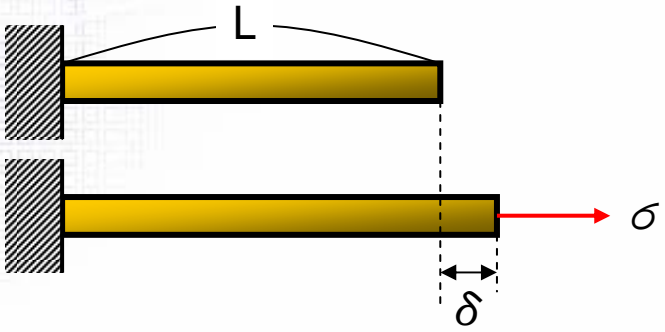
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

1.1 응력과 변형율의 관계

① 힘은 압력(σ)과 면적의 곱으로 표현

$$F = \sigma \cdot A \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

② 어떤 재료를 힘을 주어 당기면 늘어난다.



이 때, 늘어난 길이는 압력에 비례

$$\sigma = \frac{F}{A} \propto \delta$$

③ δ를 길이 L로 나누어 주어도 여전히 비례 관계를 만족한다.

$$\frac{F}{A} \propto \frac{\delta}{L}$$

④ 비례상수 E를 사용하여 관계식으로 나타내면,

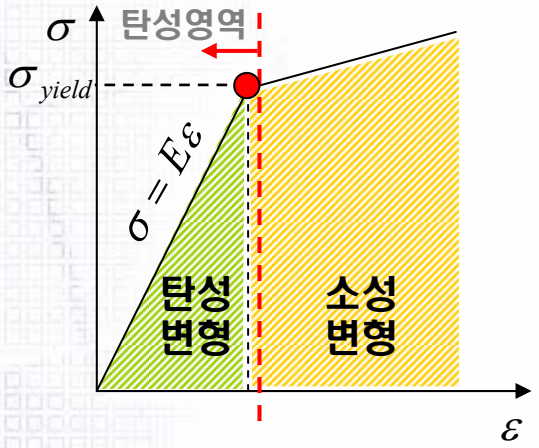
$$\frac{F}{A} = E\frac{\delta}{L} \quad \Rightarrow \quad \sigma = E\varepsilon$$

변형율(ε) : 단위길이당 늘어난 길이

압력=응력(σ) : 단위면적당 작용하는 힘

1.1 응력과 변형율의 관계

⑤ E는 실험을 통해 탄성 영역 내에서 구하게 된다.



※탄성 영역 : 인장 후 힘을 없애면 원래 길이로 돌아감
(E: 탄성 계수)

※ σ_{yield} (항복응력)
: 탄성영역 내에서 가장 큰 응력

ex) 강철의 탄성 계수

$$200GPa = 200\times10^{9}\,Pa$$
$$= 200\times10^{9}\,N/m^{2}$$
$$= 200\times10^{3}\,N/mm^{2}$$

ex) Mild Steel의 허용 응력과 탄성계수가 다음과 같을 때,
탄성영역 내에서 1m 봉이 최대로 늘어날 수 있는 길이는?

$$\sigma_{all} = 235N/mm^{2}\quad E = 185GPa = 185\times10^{3}\,N/mm^{2}\quad (\sigma = E\varepsilon)$$

sol)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{235}{185}\times10^{-3} = 1.27\times10^{-3}$$

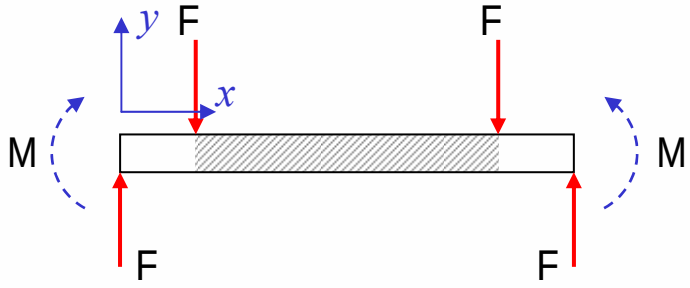
즉, 1.27mm 이상 늘어날 경우 허용 응력을 넘어선다.

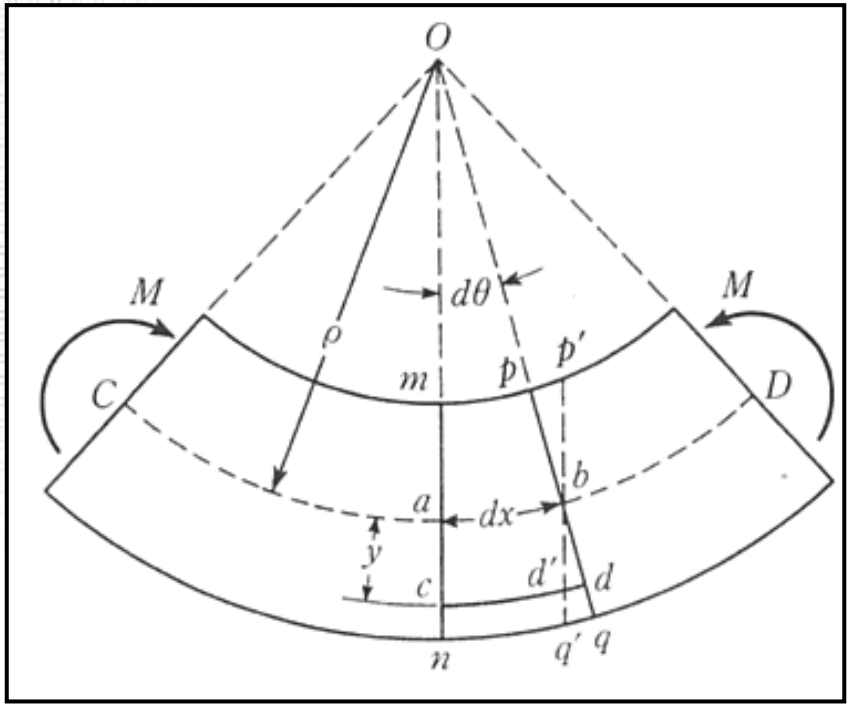
1.2 보의 처짐 방정식 – 보 속의 굽힘 응력[1]

1) S. Timochenko, 임상전 편저, "재료역학", 문운당 2002 , pp 154~159

▪ 보 속의 굽힘 응력[1]

순수 굽힘 상태 : 전단력 없이 모멘트만 존재 상태
(빗금친 부분)





① $\rho\, d\theta = dx \Rightarrow \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\theta}{dx}$

② 중립면에서 y만큼 떨어진 곳의 변형율 (ε_x)

$cd' = dx$: 원래길이

$dd' = yd\theta$: 늘어난 길이

$$\varepsilon_x = \frac{\text{늘어난길이}}{\text{원래길이}} = \frac{yd\theta}{dx} = \frac{y}{\rho}$$

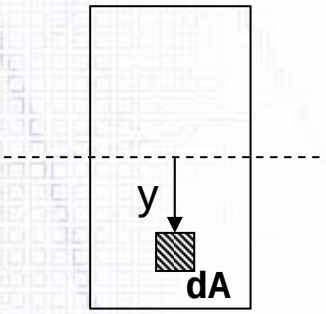
③ 중립면에서 y만큼 떨어진 곳의 응력 (σ_x)

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{Ey}{\rho}$$

1.2 보의 처짐 방정식 – 보 속의 굽힘 응력[1]

1) S. Timochenko, 임상전 편저, "재료역학", 문운당 2002 , pp 154~159

④ 단면에 작용하는 힘 : $dF = \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} y dA$



<보의 단면>

⑤ 단면에 작용하는 모멘트 : 미소면적에 작용하는 힘에 거리를 곱하여 적분

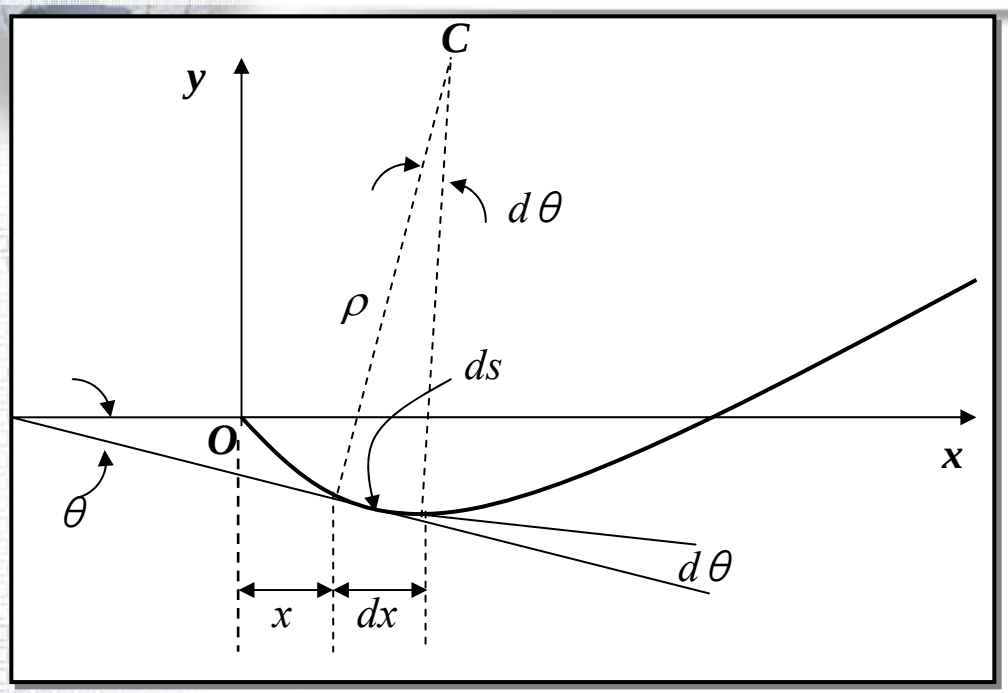
$$M = \int_A y dF = \int_A y \cdot \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

$I = \int_A y^2 dA$ 라고 정의 하면(I : 2차모멘트)

$$M = \frac{EI}{\rho} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}}$$

1.2 보의 처짐 방정식 – 탄성선의 미분 방정식[1)]

1) S. Timochenko, **임상전 편저**, "**재료역학**", **문운당** 2002 , pp 265~267



① 호의 길이는 각과 반지름의 곱

$$\rho\, d\theta = ds \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

② $ds \approx dx, \quad \theta \approx dy/dx$ 라고 가정

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

③ ①과 ②의 결과에서 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$$

④ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ 이므로, $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{EI}$

⑤ 한편 좌표계를 그림과 같이 잡을 경우, 2계 미분값이 (+)이면 아래로 볼록한 모양, (–)이면 위로 볼록한 모양이된다.
즉 왼쪽 그림과 같이 아래로 볼록한 모양인 경우, (+)의 모멘트가 발생함을 알 수 있다.
따라서,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

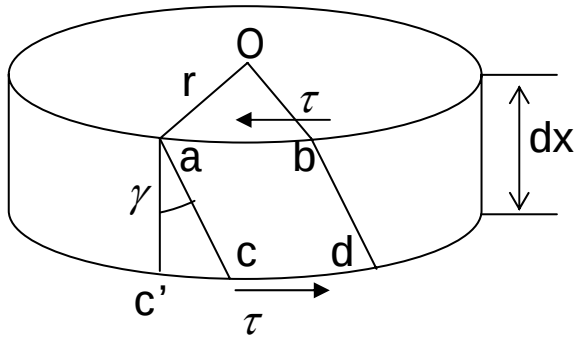
탄성선의 미분방정식

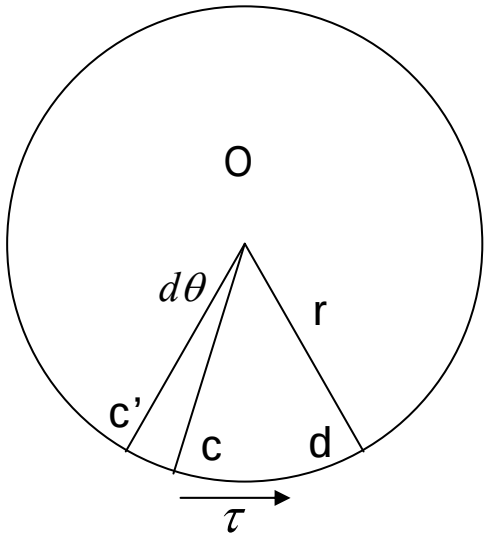
※ 재료역학 교재에는 y축의 방향이 아래쪽으로 향하고 있기 때문에 부호가 달라짐

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

1.3 비틂힘(Torque)과 비틂각(θ)의 관계[1]

1) S. Timochenko, **임상전 편저**, "**재료역학**", **문운당** 2002 , pp 97~102





① $cc' = rd\theta$

② $\gamma \ll 1$**이라면, 다음이 성립**

$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{cc'}{ac'} = \frac{rd\theta}{dx}$$

③ $\frac{d\theta}{dx} = \phi$ **라고 정의하면, (**ϕ **:단위길이당 비틂각)**

$$\gamma = r\phi$$

④ **전단응력(**τ**)과 전단에 의한 변형각(**γ**)은 비례관계**

비례상수(G)를 도입하면, (G:전단탄성계수)

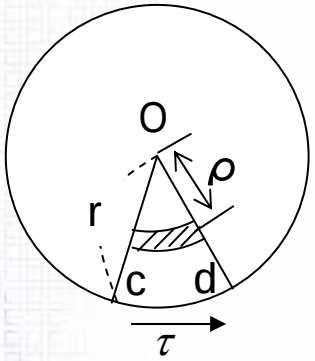
$$\tau = G\gamma = Gr\phi$$

※ 응력-변형율의 관계와 동일

$$\sigma = E\varepsilon$$

1.3 비틂힘(Torque)과 비틂각(θ)의 관계[1]

1) S. Timochenko, **임상전 편저**, "**재료역학**", **문운당** 2002 , pp 97~102



⑤ **중심에서 ρ 만큼 떨어진 곳에서의 전단응력**

$$\tau = G\rho\phi$$

⑥ **미소면적(dA)에 작용하는 전단력과 모멘트**

☞ **전단력** : $\tau\, dA = G\rho\phi\, dA$

☞ **모멘트** : $(\text{거리}) \times (\text{힘}) = \rho \times \tau\, dA = G\phi\rho^2\, dA$

⑦ **단면 전체에 작용하는 모멘트**

$$T = \int_A G\phi\rho^2 dA = G\phi\int_A \rho^2 dA = G\phi J$$

※ J : **극2차 모멘트** $\left(J = \int_A \rho^2 dA\right)$

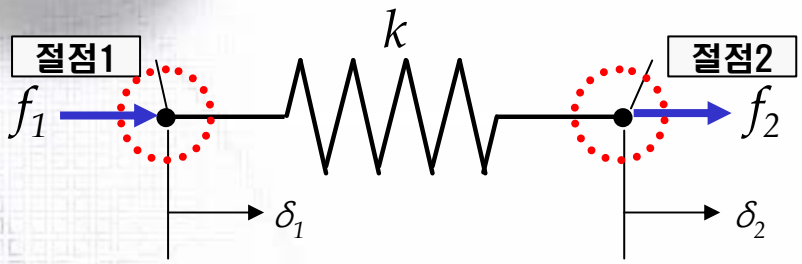
⑧ ϕ **는 단위 길이당 비틂각 이므로, 길이** l **인 부재가 받는 총모멘트는**

$$\theta = \phi l$$

$$T = G\phi J = \frac{GJ}{l}\theta$$

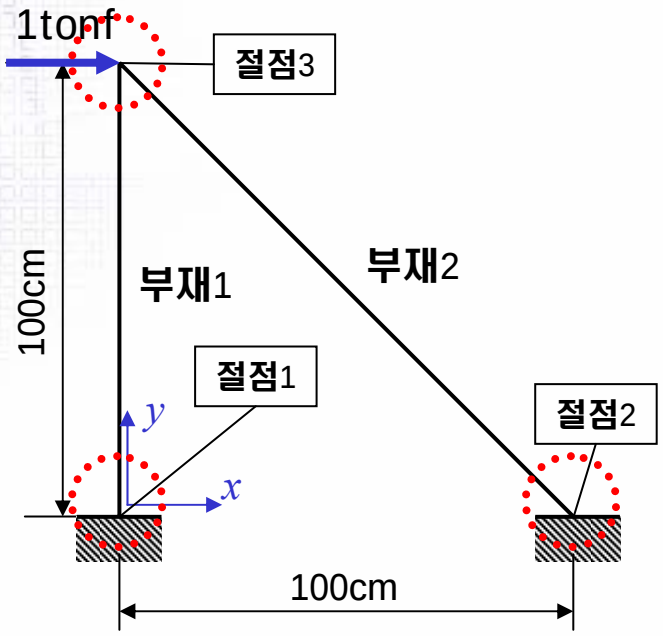
$$\boxed{\theta = \frac{Tl}{GJ}}$$

1.4 절점 (Node)

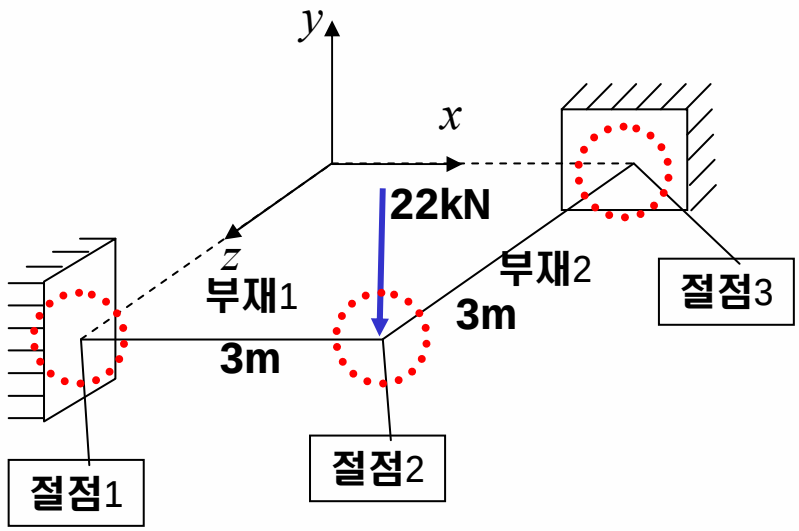


절점 : 평형 방정식이 세워지고 변위가 구해지는 점
(일반적으로 부재의 교차점이나 힘이 작용하는 점, 변위를 구하고자 하는 점이 절점이 된다.)

ex1)

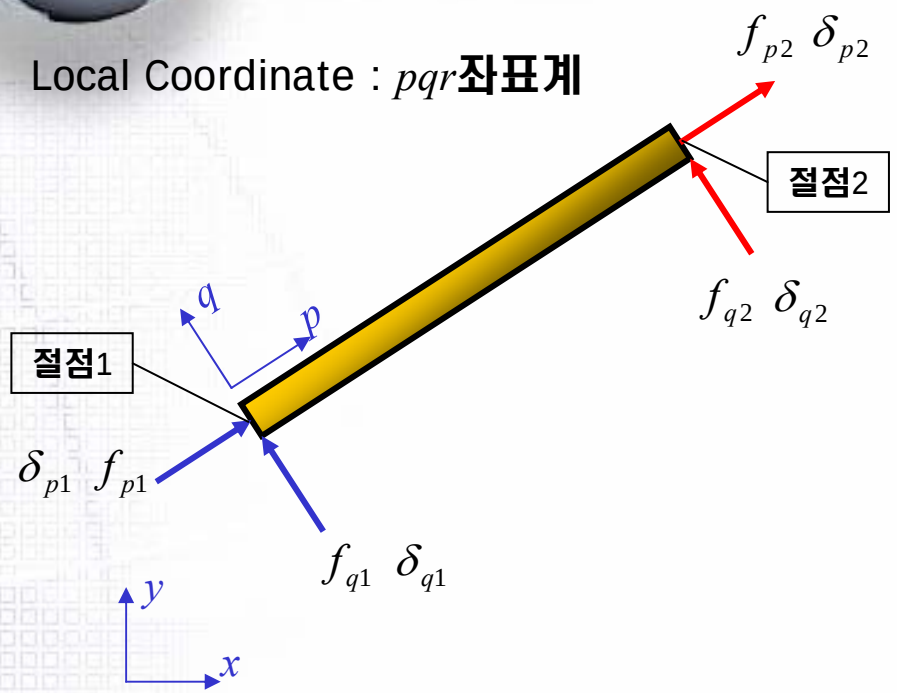


ex2)

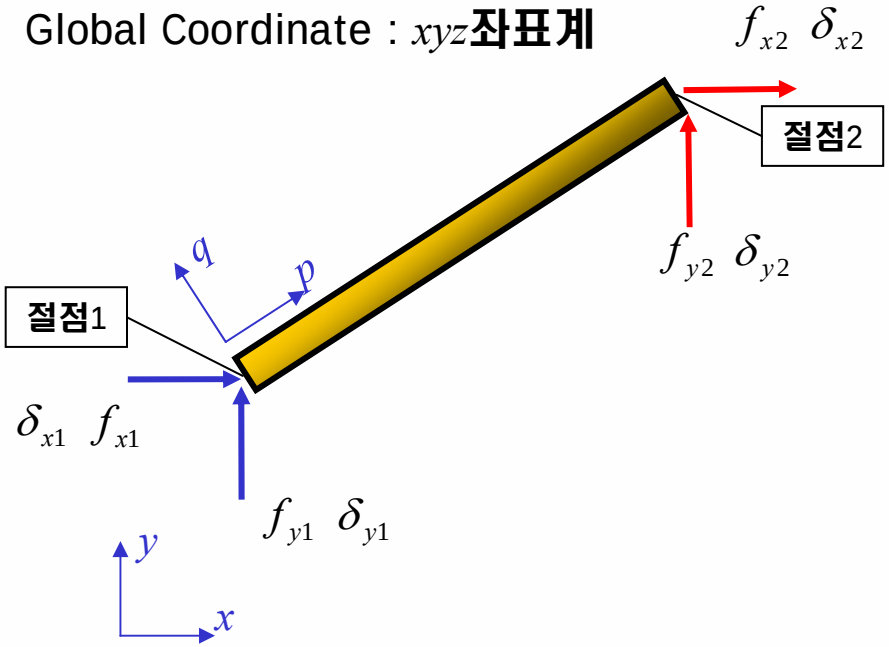


1.5 Notation

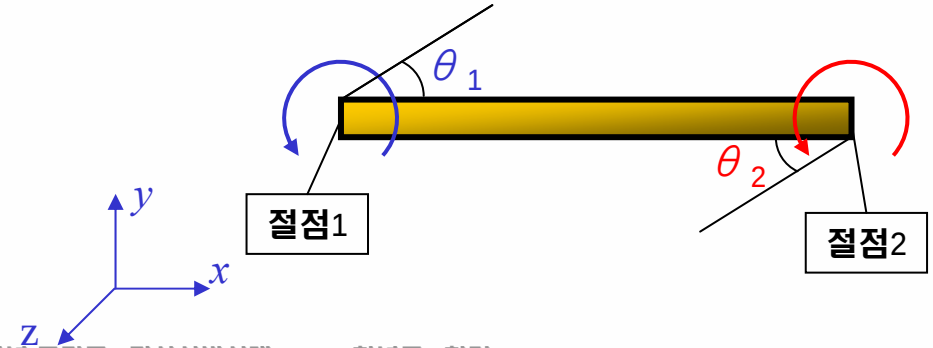
Local Coordinate : *pqr*좌표계



Global Coordinate : *xyz*좌표계

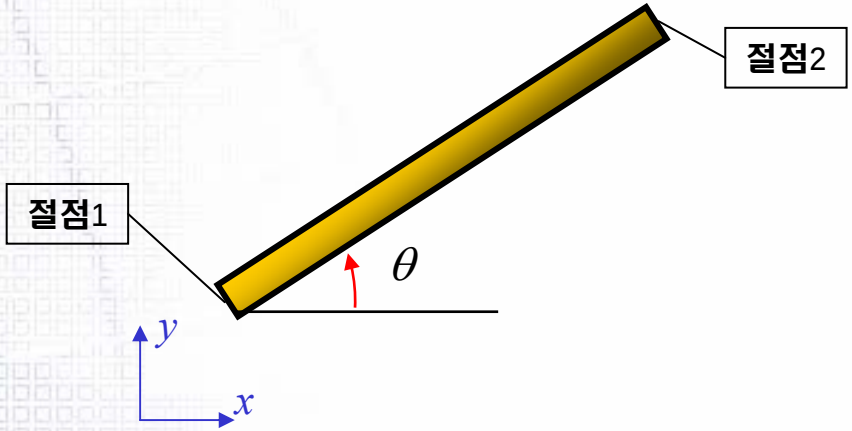


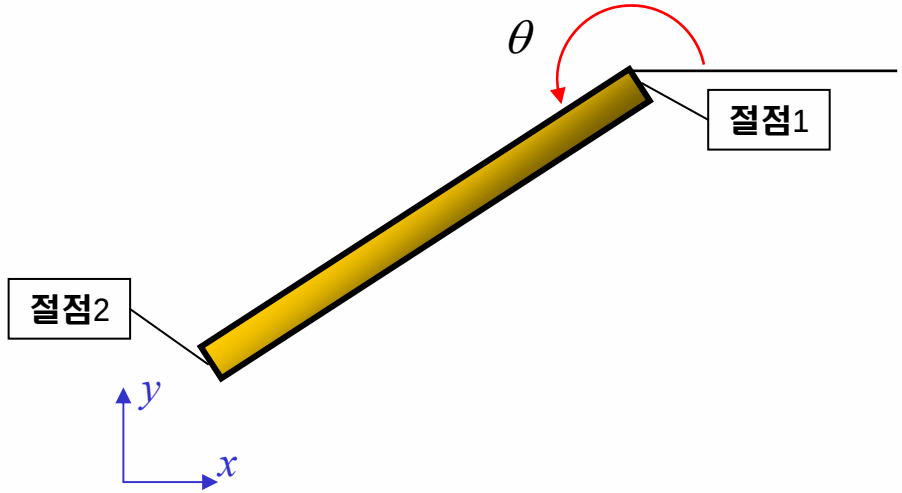
Moment : **다음 그림에서 나타나는 방향이 양의 부호**

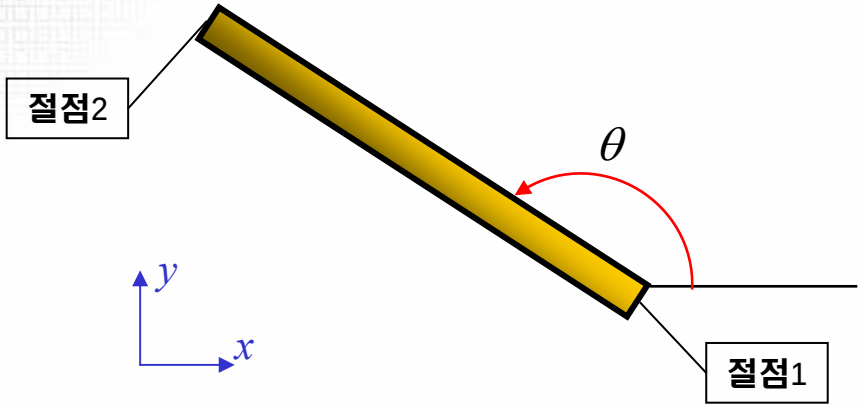


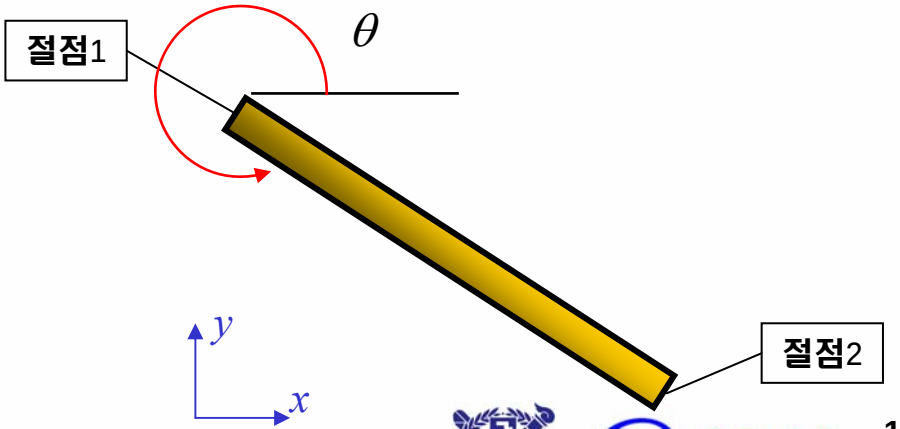
1.5 Notation

- Global Coordinate와 이루는 각도 : 절점의 번호가 낮은 곳을 기준으로 반시계 방향으로 기울어진 각도를 측정함



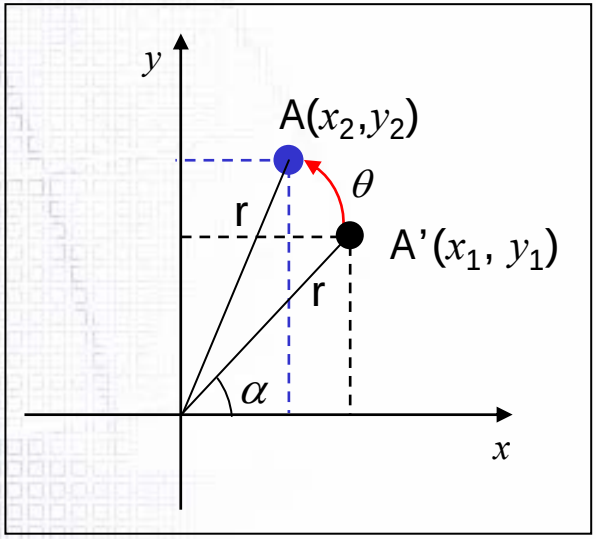






1.6 회전 변환 행렬 – 점의 회전 이동

▪ 좌표평면 위 한 점의 회전이동



① 삼각함수 합공식

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta$$

② 점 A의 좌표를 각으로 표현하면,

$$x_2=r\cos(\alpha+\theta)$$

$$y_2=r\sin(\alpha+\theta)$$

③ 삼각함수의 합공식으로 전개하면,

$$\begin{aligned}x_2&=r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta\\&=(r\cos\alpha)\cos\theta-(r\sin\alpha)\sin\theta\\&=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2&=r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta\\&=(r\sin\alpha)\cos\theta+(r\cos\alpha)\sin\theta\\&=y_1\cos\theta+x_1\sin\theta\end{aligned}$$

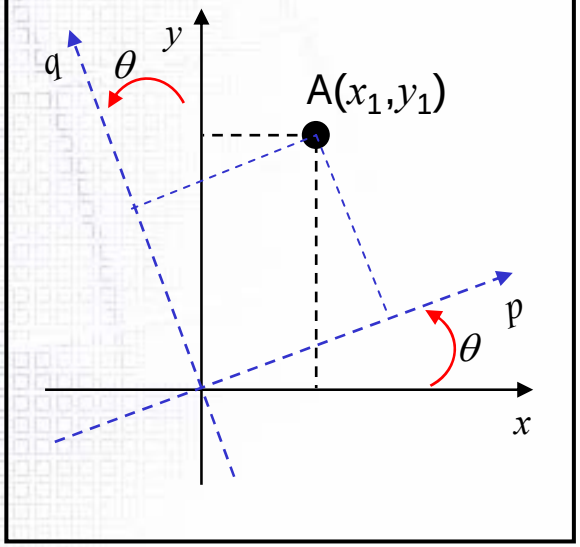
④ 행렬로 표현하면,

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

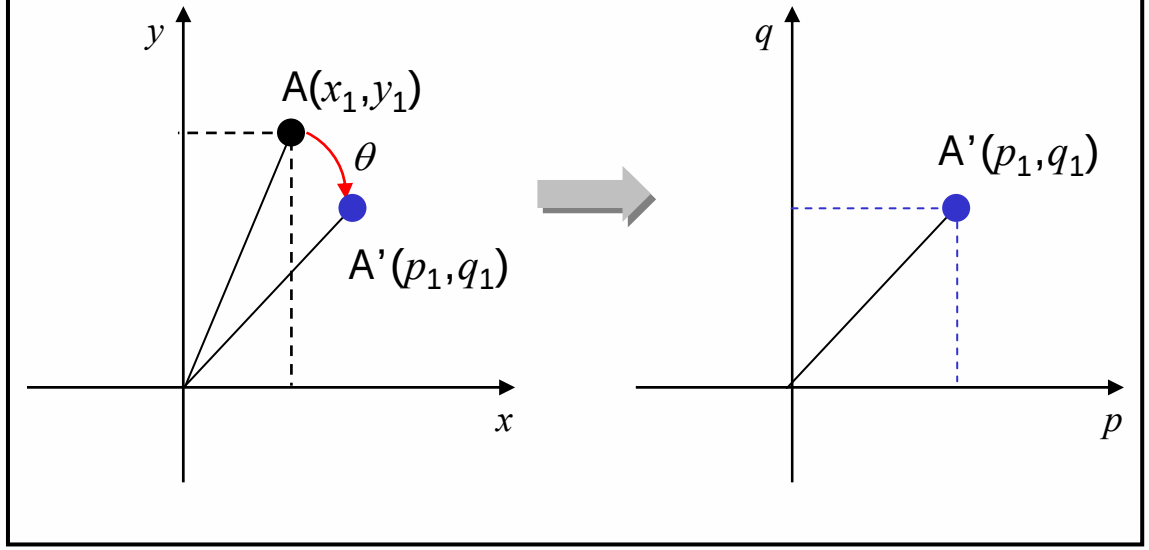
1.6 회전 변환 행렬 – 좌표축의 회전 이동

▪ **좌표축의 회전변환** : xy**좌표계가** pq**좌표계로** θ **만큼 회전하였을 때, 점 A의 좌표**

좌표축이 θ **만큼 회전**



점A가 - θ **만큼 회전**



※ **점의 회전이동**

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(- θ)**만큼 회전 변환한 점의 좌표**

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

1.6 회전 변환 행렬 –좌표축 회전 이동

▪ **좌표축 회전변환 행렬의 3차원 확장** $(xyz \rightarrow pqr)$

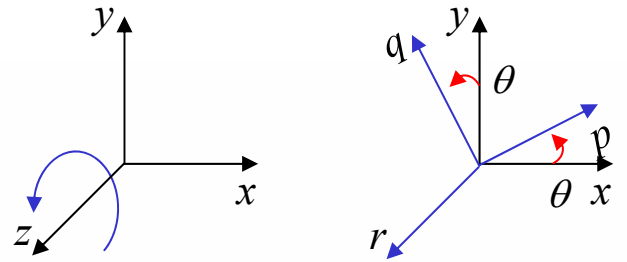
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$: z축을 기준으로 회전변환

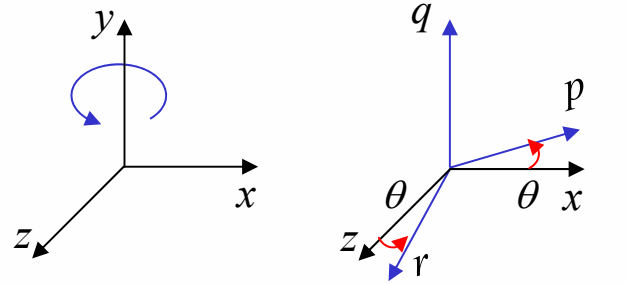
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$: y축을 기준으로 회전변환

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$: x축을 기준으로 회전변환

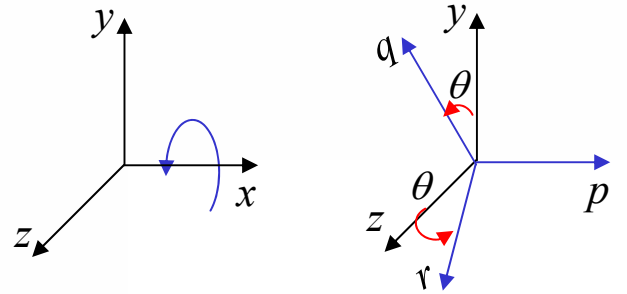
z축을 기준으로 좌표축을 θ 만큼 회전



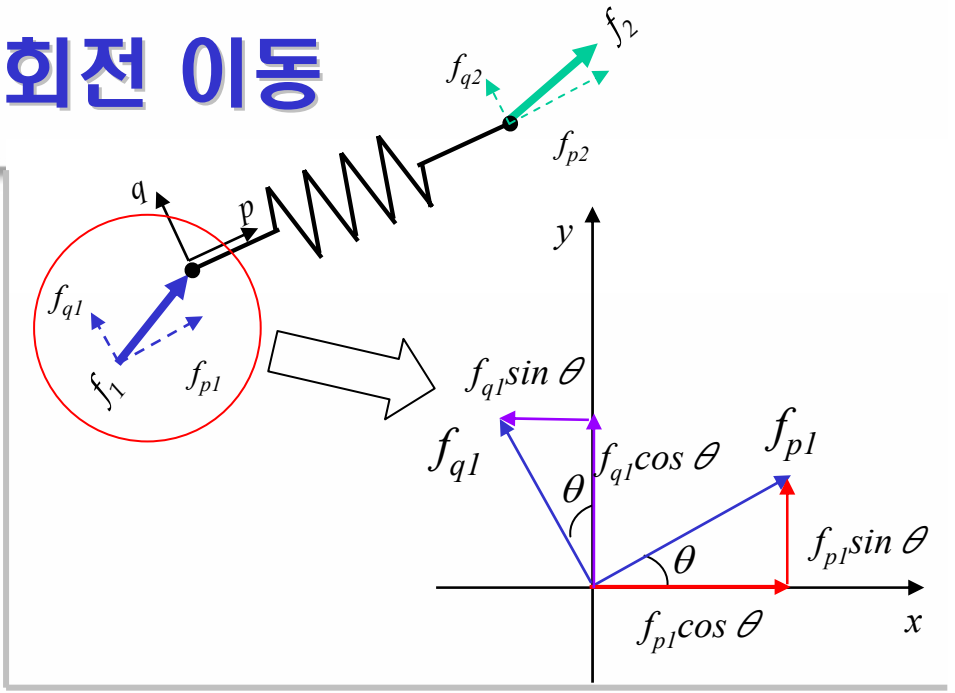
y축을 기준으로 좌표축을 θ 만큼 회전



x축을 기준으로 좌표축을 θ 만큼 회전



1.6 회전 변환 행렬 –좌표축 회전 이동



▪ xy좌표계와 pq좌표계의 관계식

절점1의 좌표축을 (θ)만큼 회전이동

$$\begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ f_{p2} \\ f_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix}$$

절점2의 좌표축을 (θ)만큼 회전이동

3차원으로 확장에

z축을 기준으로 회전변환

$$\begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ M_{r1} \\ f_{p2} \\ f_{q2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

Ch2. 스프링 구조 해석

2.1 스프링의 힘과 변위 관계
2.2 스프링의 선형성
2.3 1차원 단일 스프링 – 강성 방정식 유도
2.4 1차원 단일 스프링 – 강성 방정식의 분석
2.5 1차원 복수 스프링의 강성 방정식 유도
2.6 1차원 복수 스프링 – 중첩의 원리
2.7 1차원 복수 스프링 – 강성 방정식의 분석
2.8 2차원 스프링의 힘과 변위와의 관계
2.9 2차원 스프링 요소의 중첩
2.10 변위법에 따른 스프링 해석 예제
2.11 강성 매트릭스 각 성분의 의미

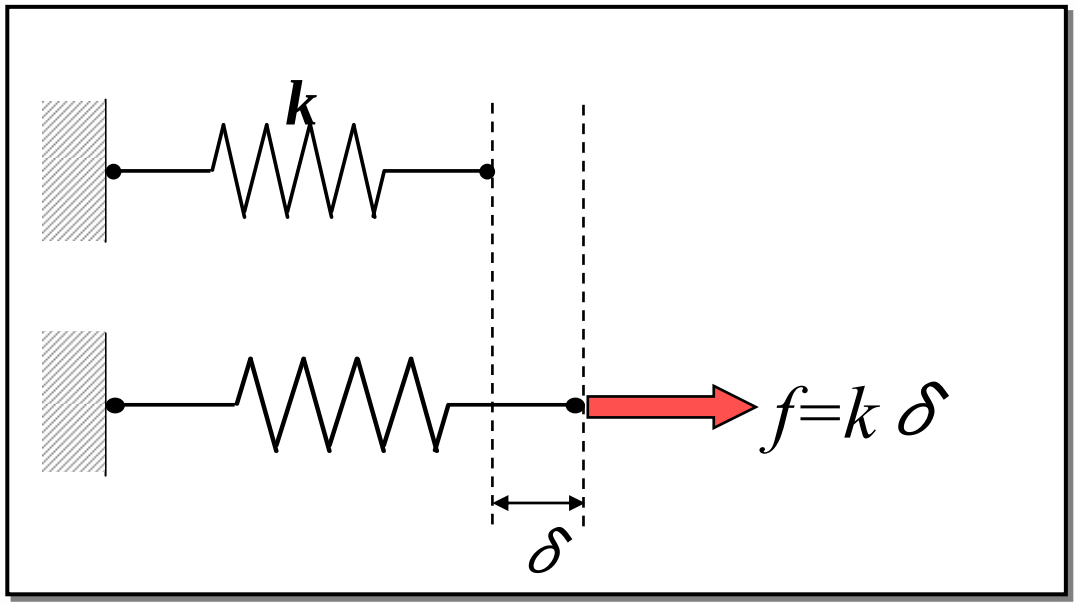
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

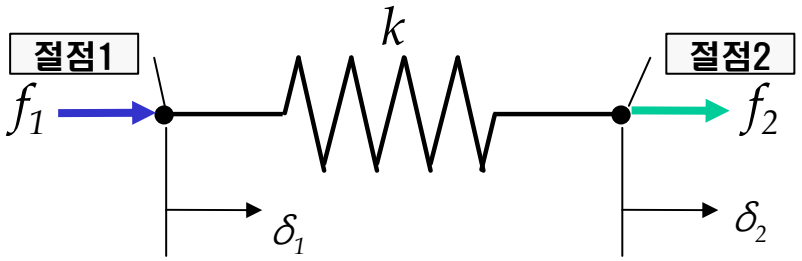
2.1 스프링의 힘과 변위 관계

- Hooke's Law
  : **힘은 변위에 비례**

$$f = k\delta$$

f : **힘(하중)**
k : **스프링 상수**
δ : **변위**





스프링 요소 : 축방향의 힘에 의해서만 변형이 일어남.
수직방향의 힘에 대해서는 변형이 없음

2.2 스프링의 선형성

선형성(Linearity)의 정의

$$L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) \quad (\alpha : \text{Scalar})$$

$$L(\alpha\,\mathbf{v}_1) = \alpha \cdot L(\mathbf{v}_1)$$

⇒ 위 두 가지 성질을 만족하면 '선형성이 있다'고 함

▪ 스프링의 선형성

$$f(\delta_1) = k\delta_1 \quad , \quad f(\delta_2) = k\delta_2$$

$$f(\delta_1) + f(\delta_2) = k\delta_1 + k\delta_2 = k(\delta_1 + \delta_2)$$

$$f(\delta_1 + \delta_2) = k(\delta_1 + \delta_2)$$

$$\therefore f(\delta_1 + \delta_2) = f(\delta_1) + f(\delta_2)$$

$$f(\delta_1) = k\delta_1 \qquad (\alpha : \text{Scalar})$$

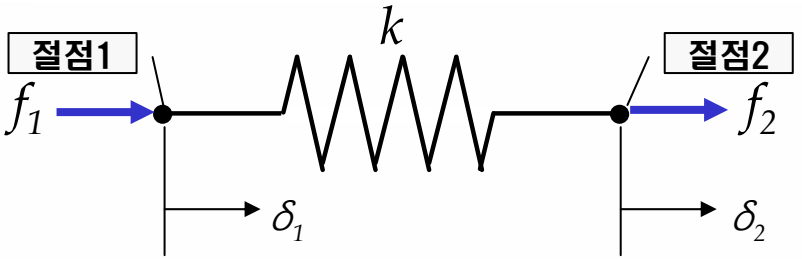
$$f(\alpha \cdot \delta_1) = k(\alpha\delta_1) = k\alpha\delta_1$$

$$= \alpha(k\delta_1) = \alpha \cdot f(\delta_1)$$

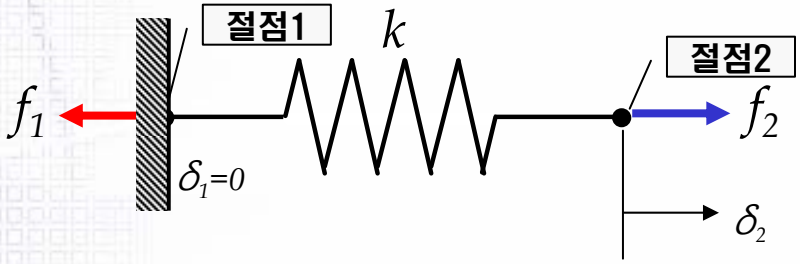
$$\therefore f(\alpha \cdot \delta_1) = \alpha \cdot f(\delta_1)$$

2.3 1차원 단일 스프링 – 강성 방정식 유도

▪ 변위법의 적용

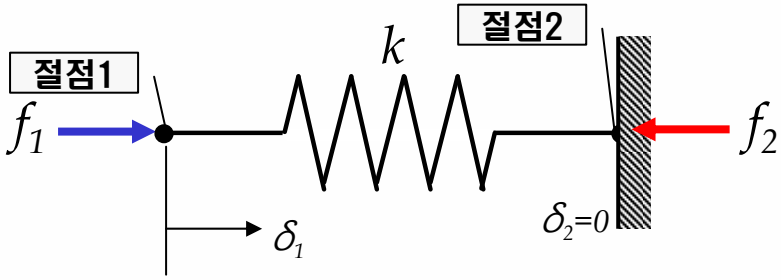


① 절점 1을 고정할 경우 (δ_1=0)



$f_1 = -k\delta_2$ $\quad f_2 = k\delta_2$

② 절점 2를 고정할 경우 (δ_2=0)



$f_1 = k\delta_1$ $\quad f_2 = -k\delta_1$

③ 절점을 모두 고정하지 않을 경우

강성 매트릭스

$$f_1 = k\delta_1 - k\delta_2 = k(\delta_1 - \delta_2)$$
$$f_2 = -k\delta_1 + k\delta_2 = k(\delta_2 - \delta_1)$$

Matrix Form

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \rightarrow [f] = [K][\delta]$$

[강성 방정식]

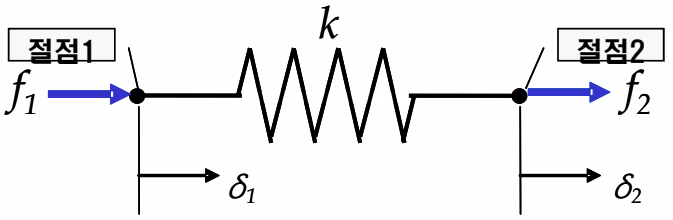
2.4 1차원 단일 스프링 – 강성 방정식의 분석

강성 매트릭스

$$f_1 = k(\delta_1 - \delta_2)$$
$$f_2 = k(\delta_2 - \delta_1)$$

Matrix Form

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

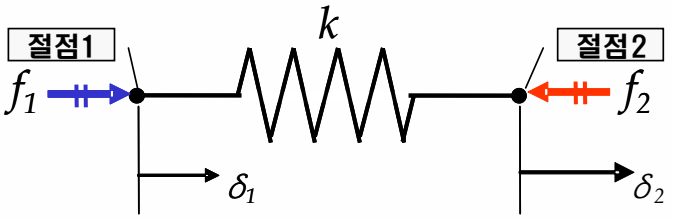


윗 식을 아래 식에 더함

$$f_1 = k(\delta_1 - \delta_2)$$
$$f_1 + f_2 = 0$$

Matrix Form

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_1 + f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$



f_1과 f_2는 크기는 같고 방향은 반대
(힘 두개 중 하나만 주어지면 됨)

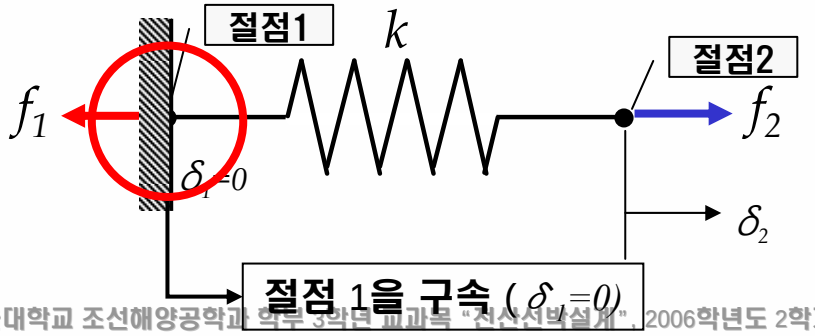
▪ 강성 방정식의 의미

1) 강성 매트릭스의 역행렬이 존재하지 않음 (Determinant=0)

2) 방정식의 해가 무수히 많음 (미지수의 개수, 2개 > 식의 개수, 1개) ⇒ δ_1, δ_2의 차이만 일정하면 됨

δ_1, δ_2 $\quad$ $f_1 = k(\delta_1 - \delta_2)$

3) 해를 구하기 위해서는 δ_1, δ_2 중에 하나가 주어져야 함 (구속 조건 부여)

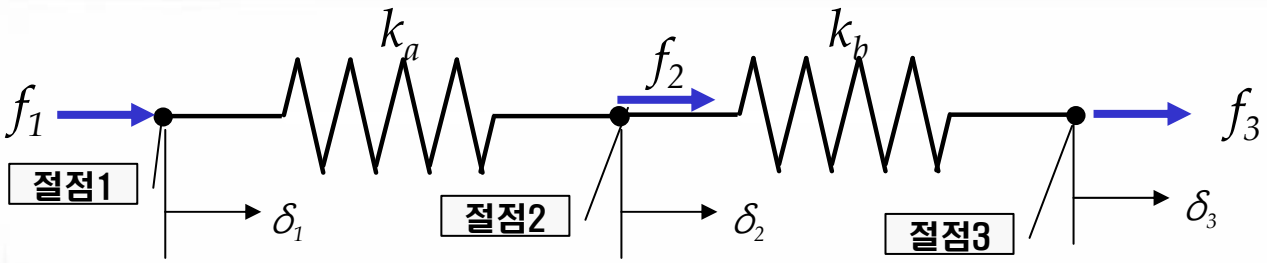


$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f_2 = k\delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \frac{f_2}{k}$$

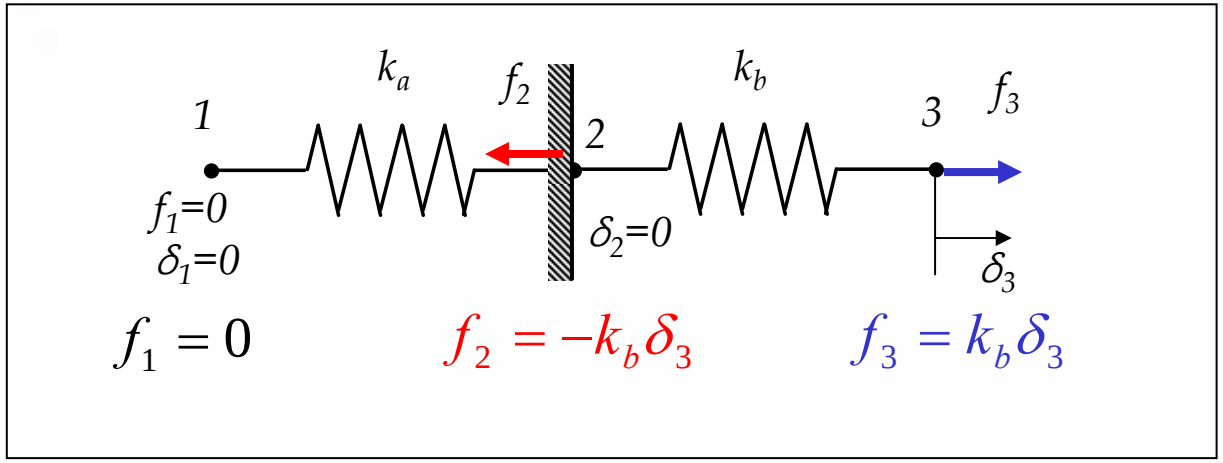
대입

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow f_1 = -k\delta_2$$

2.5 1차원 복수 스프링의 강성 방정식 유도 (1)

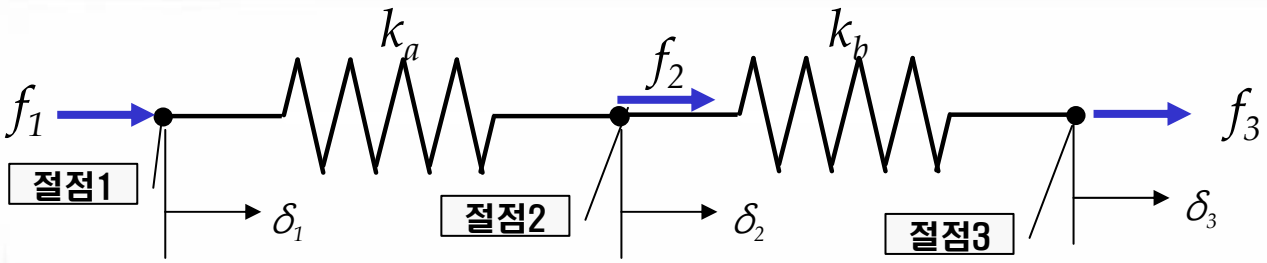


① **절점 1,2가 고정일 경우** ($\delta_1 = \delta_2 = 0$)

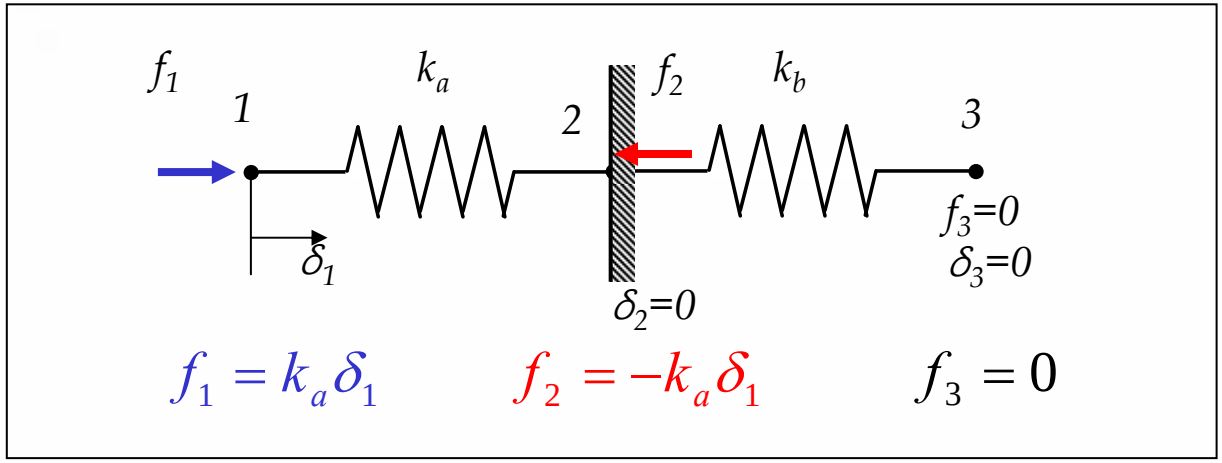


▪ **변위 δ_3이 발생했을 때, 절점 1,2가 고정이므로 절점력은 절점 2,3에서만 발생한다.**

2.5 1차원 복수 스프링 – 강성 방정식 유도 (2)

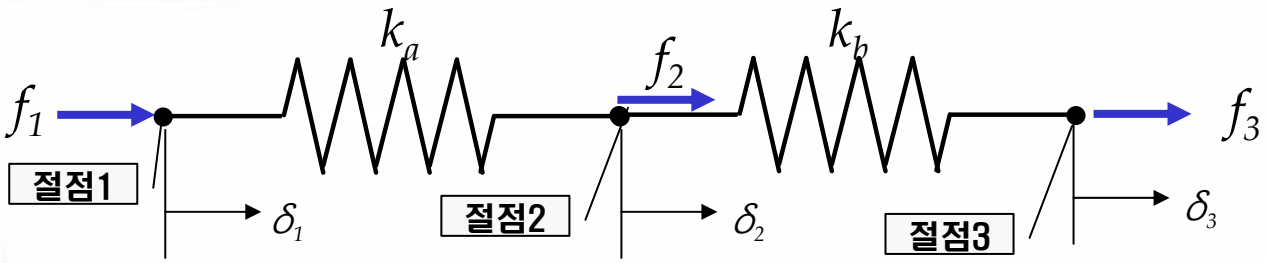


② **절점 2,3이 고정일 경우** ($\delta_2 = \delta_3 = 0$)

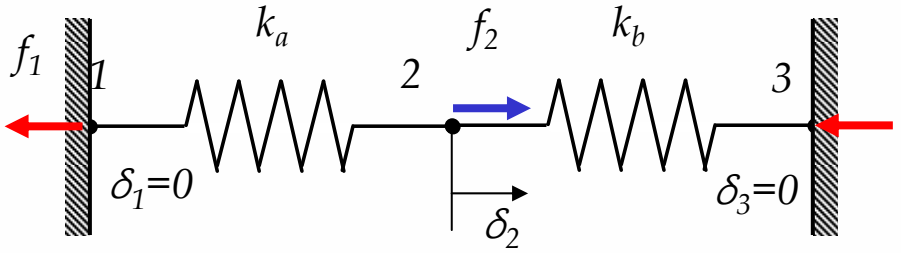


▪ **변위 δ_1이 발생했을 때, 절점 2,3이 고정이므로 절점력은 절점 1,2에서만 발생한다.**

2.5 1차원 복수 스프링 – 강성 방정식 유도 (3)



③ **절점 1,3이 고정일 경우** ($\delta_1 = \delta_3 = 0$)

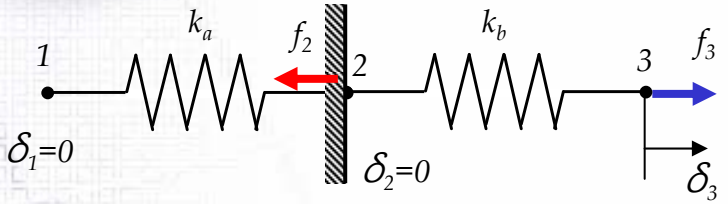


$$f_1 = -k_a\delta_2 \qquad f_2 = k_a\delta_2 + k_b\delta_2 = (k_a + k_b)\delta_2 \qquad f_3 = -k_b\delta_2$$

▪ **변위 δ_2가 발생했을 때, 절점 2,3은 고정이고, 절점력은 모든 절점에서 발생한다.**

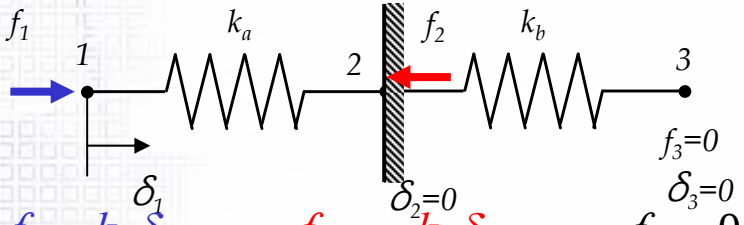
2.5 1차원 복수 스프링 – 강성 방정식 유도 (4)

① 절점 1,2가 고정일 경우 ($\delta_1 = \delta_2 = 0$)



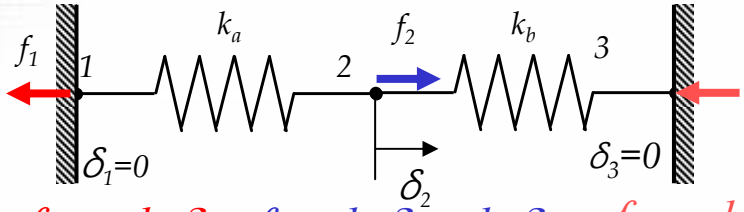
$f_1 = 0 \qquad f_2 = -k_b\delta_3 \qquad f_3 = k_b\delta_3$

② 절점 2,3이 고정일 경우 ($\delta_2 = \delta_3 = 0$)



$f_1 = k_a\delta_1 \qquad f_2 = -k_a\delta_1 \qquad f_3 = 0$

③ 절점 1,3이 고정일 경우 ($\delta_1 = \delta_3 = 0$)



$f_1 = -k_a\delta_2 \quad f_2 = k_a\delta_2 + k_b\delta_2 \quad f_3 = -k_b\delta_2$

$= (k_a + k_b)\delta_2$

$$\begin{cases} f_1 = k_a\delta_1 - k_a\delta_2 \\ f_2 = -k_a\delta_1 + (k_a + k_b)\delta_2 - k_b\delta_3 \\ f_3 = -k_b\delta_2 + k_b\delta_3 \end{cases}$$

Matrix Form

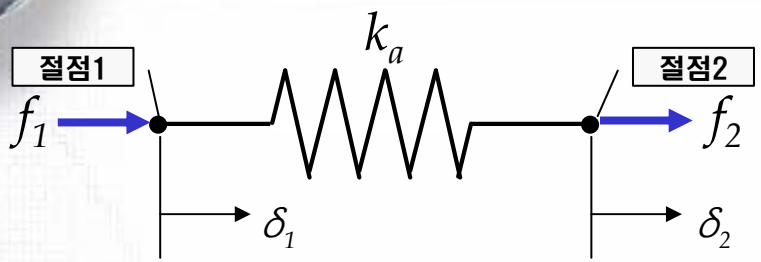
강성 매트릭스

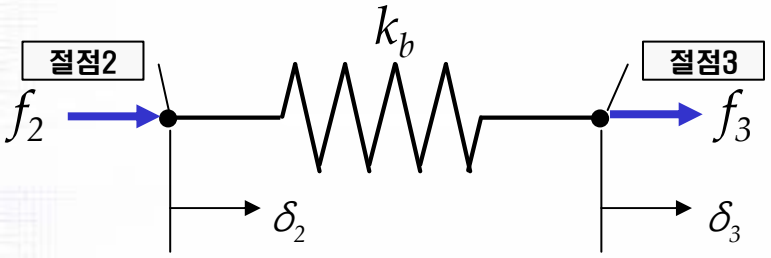
$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

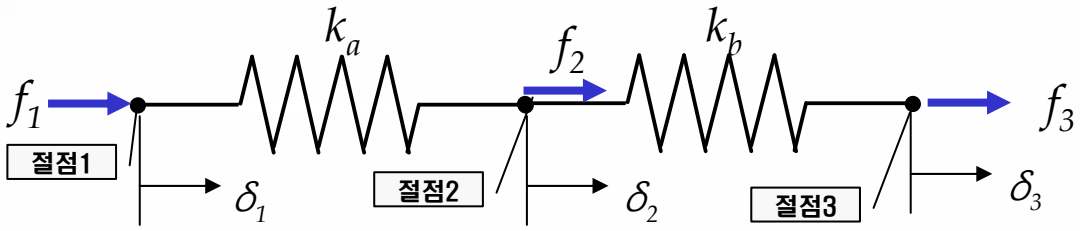
$$[f] = [K][\delta]$$

[강성 방정식]

2.6 1차원 복수 스프링 – 중첩의 원리 (1)







$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

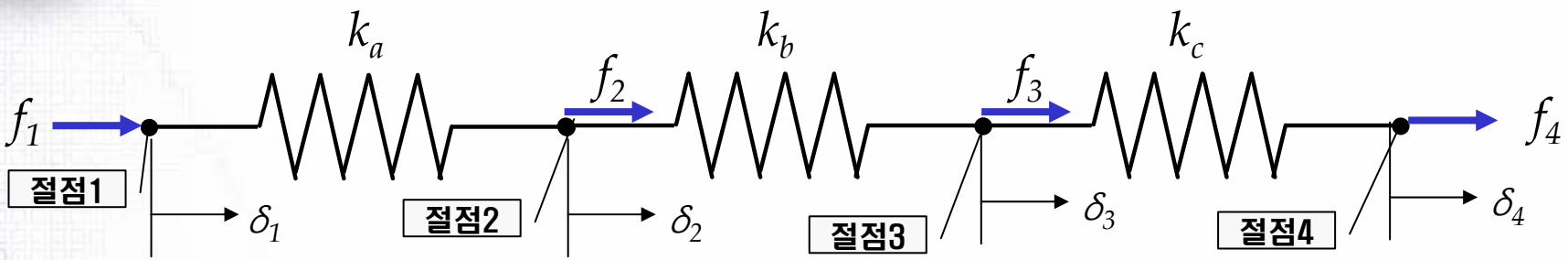
$$=$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

※ 스프링의 선형성 때문에 중첩 가능

2.6 1차원 복수 스프링 – 중첩의 원리 (2)

ex) 스프링의 각 절점에서의 변위와 힘의 관계를 나타내는 강성 방정식을 구하시오.



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b & 0 \\ 0 & -k_b & k_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c & -k_c \\ 0 & 0 & -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

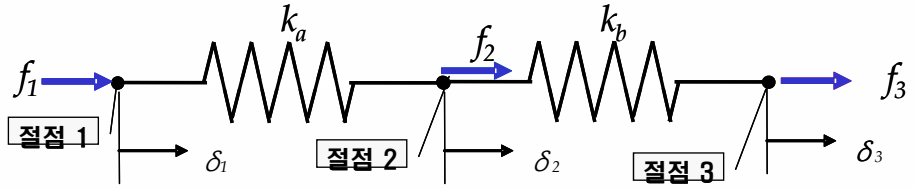
$$= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b & 0 \\ 0 & -k_b & k_b + k_c & -k_c \\ 0 & 0 & -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

2.7 1차원 복수 스프링 – 강성 방정식의 분석

강성 매트릭스

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = k_a(\delta_1 - \delta_2)$$
$$f_2 = -k_a\delta_1 + (k_a + k_b)\delta_2 - k_b\delta_3$$
$$f_3 = k_b(\delta_3 - \delta_2)$$



첫번째, 세번째 식을 두번째 식에 더해줌

$$f_1 = k_a(\delta_1 - \delta_2)$$
$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \longrightarrow$$ (힘 세 개 중 두 개만 주어지면 됨)
$$f_3 = k_b(\delta_3 - \delta_2)$$

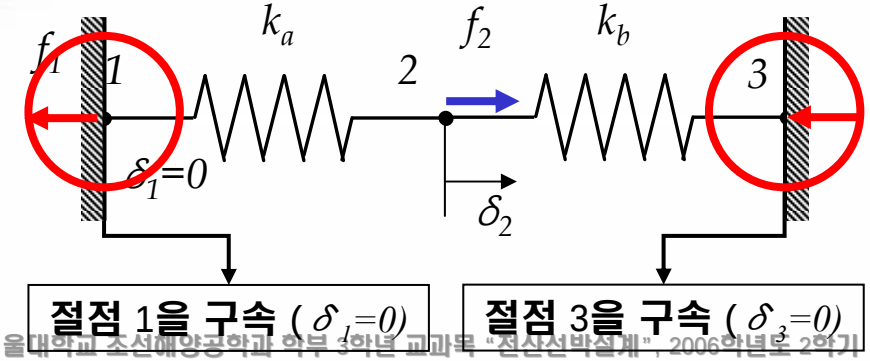
- **강성 방정식의 의미**

1) **강성 매트릭스의 역행렬이 존재하지 않음** (Determinant=0)

2) **방정식의 해가 무수히 많음 (미지수의 개수, 3개 > 식의 개수, 2개)**

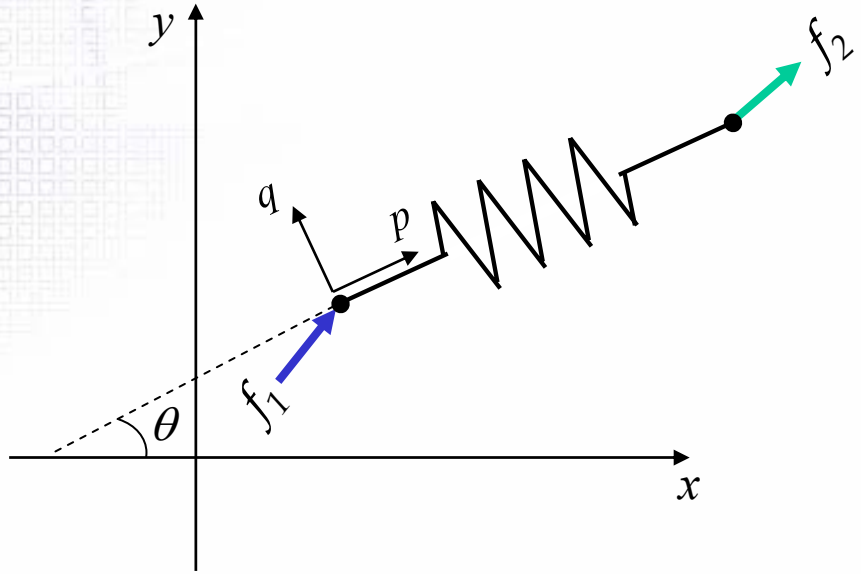
$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ $\quad f_1 = k_a(\delta_1 - \delta_2),\ f_3 = k_b(\delta_3 - \delta_2)$

3) **해를 구하기 위해서는 세 변위 중 두 개와 힘 하나가 주어져야 함 (구속 조건 부여)**



2.8 2차원 스프링의 힘과 변위와의 관계(1)

- 2차원 스프링
  - 평면 상의 임의의 위치에 놓여진 스프링
  - 항상 1차원의 단일 선상에 존재하는 것이 아님
  - 작용하는 힘도 스프링에 수평 방향으로만 작용하지 않음
  - Global Coordinate와 Local Coordinate의 도입이 필요



Step1. Local Coordinate(*pq*좌표계)에서 힘과 변위와의 관계를 강성 매트릭스로 표현

Step2. Global Coordinate(*xy*좌표계)와 Local coordinate의 관계를 구함

Step3. Global Coordinate에서의 힘과 변위의 관계를 나타내는 강성 매트릭스를 구함

2.8 2차원 스프링의 힘과 변위와의 관계(2)

Step1. Local Coordinate(***pq***좌표계)에서 힘과 변위와의 관계를 강성 매트릭스로 표현

Notation : pq 좌표계의 변위

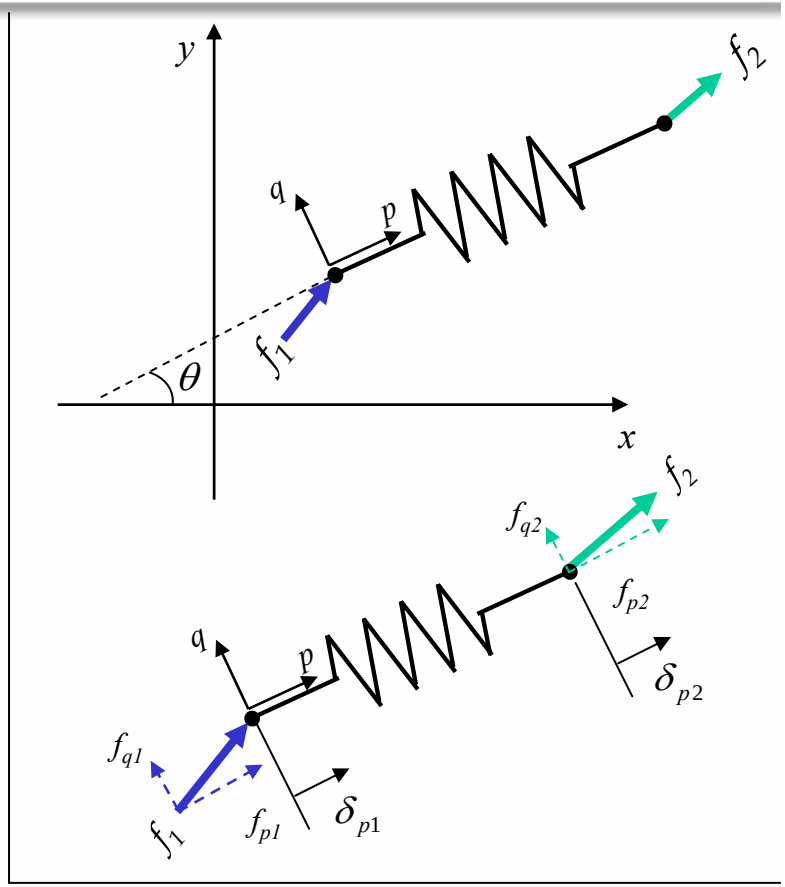
δ_{pi} : 절점 i에서 p축 방향의 변위

δ_{qi} : 절점 i에서 q축 방향의 변위

pq 좌표계의 작용힘

f_{pi} : 절점 i에서 p축 방향의 힘

f_{qi} : 절점 i에서 q축 방향의 힘



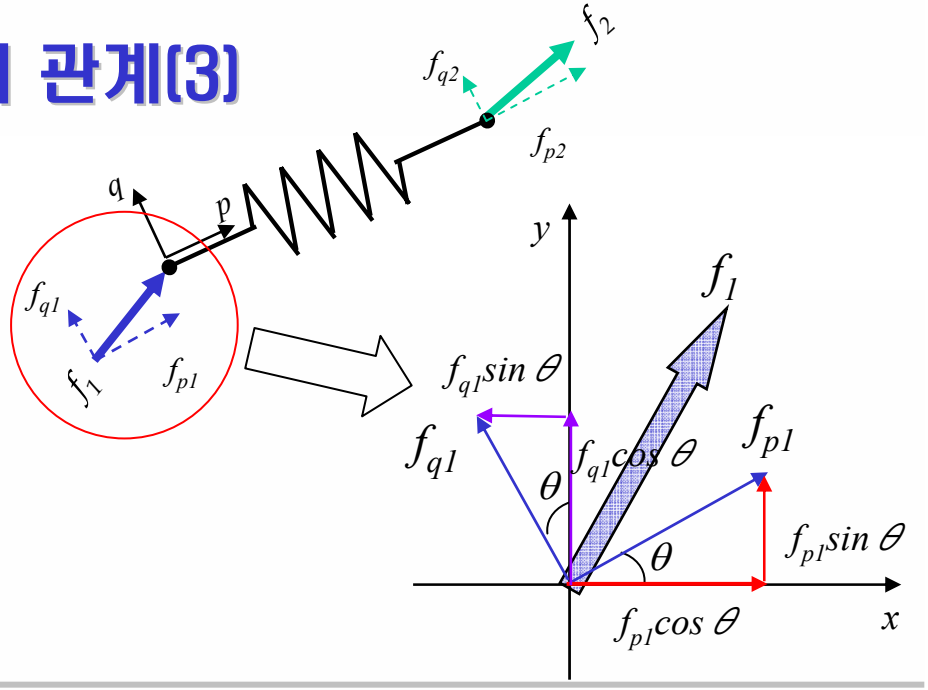
$$\begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ f_{p2} \\ f_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{p1} \\ \delta_{q1} \\ \delta_{p2} \\ \delta_{q2} \end{bmatrix}$$

①

$$[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{K}_{pq}][\delta_{pq}]$$

2.8 2차원 스프링의 힘과 변위와의 관계(3)

Step2. Global Coordinate(*xy*좌표계)와 Local coordinate의 관계를 구함



(1) 작용힘의 관계

- f_{p1}의 분해
  - x축 : $f_{p1}\cos\theta$
  - y축 : $f_{q1}\sin\theta$
- f_{q1}의 분해
  - x축 : $-f_{q1}\sin\theta$
  - y축 : $f_{q1}\cos\theta$

- Total force in Global Coordinate
  - x축 : $f_{x1} = f_{p1}\cos\theta - f_{q1}\sin\theta$
  - y축 : $f_{y1} = f_{p1}\sin\theta + f_{q1}\cos\theta$
- 절점 2에 작용하는 힘의 분해
  - x축 : $f_{x2} = f_{p2}\cos\theta - f_{q2}\sin\theta$
  - y축 : $f_{y2} = f_{p2}\sin\theta + f_{q2}\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ f_{p2} \\ f_{q2} \end{bmatrix}$$

역행렬 곱해줌

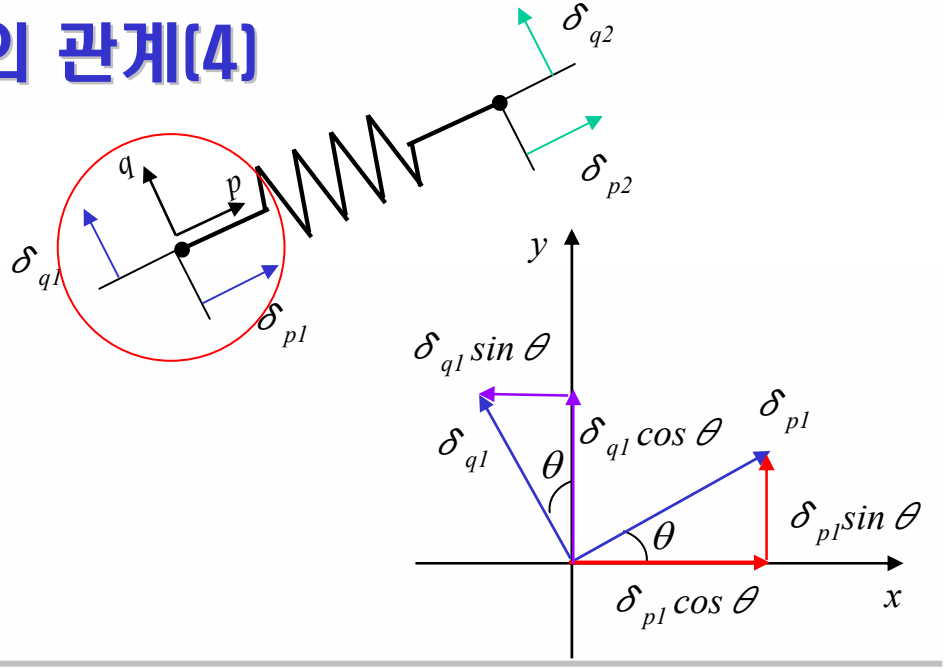
$$\begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ f_{p2} \\ f_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix}$$

좌표축의 회전변환행렬

② $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}]$

2.8 2차원 스프링의 힘과 변위와의 관계(4)

Step2. Global Coordinate(*xy*좌표계)와 Local coordinate의 관계를 구함



(2) **변위의 관계**

- δ_{p1}의 분해
  - x축 : $\delta_{p1}\cos\theta$
  - y축 : $\delta_{p1}\sin\theta$
- δ_{q1}의 분해
  - x축 : $-\delta_{q1}\sin\theta$
  - y축 : $\delta_{q1}\cos\theta$

- Total force in Global Coordinate
  - x축 : $\delta_{x1} = \delta_{p1}\cos\theta - \delta_{q1}\sin\theta$
  - y축 : $\delta_{y1} = \delta_{p1}\sin\theta + \delta_{q1}\cos\theta$
- 절점 2에 작용하는 힘의 분해
  - x축 : $\delta_{x2} = \delta_{p2}\cos\theta - \delta_{q2}\sin\theta$
  - y축 : $\delta_{y2} = \delta_{p2}\sin\theta + \delta_{q2}\cos\theta$

$$\begin{bmatrix}\delta_{x1}\\ \delta_{y1}\\ \delta_{x2}\\ \delta_{y2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{p1}\\ \delta_{q1}\\ \delta_{p2}\\ \delta_{q2}\end{bmatrix}$$

역행렬 곱해줌

$$\begin{bmatrix}\delta_{p1}\\ \delta_{q1}\\ \delta_{p2}\\ \delta_{q2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{x1}\\ \delta_{y1}\\ \delta_{x2}\\ \delta_{y2}\end{bmatrix}$$

좌표축의 회전변환행렬

③

$$[\delta_{pq}] = [\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

2.8 2차원 스프링의 힘과 변위와의 관계(5)

Step3. Global Coordinate에서의 힘과 변위의 관계를 나타내는 강성 매트릭스를 구함

① $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{K}_{pq}][\delta_{pq}]$

② $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}]$

③ $[\delta_{pq}] = [\mathbf{T}][\delta_{xy}]$

$$[\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

$[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^{T}$ 을 곱함

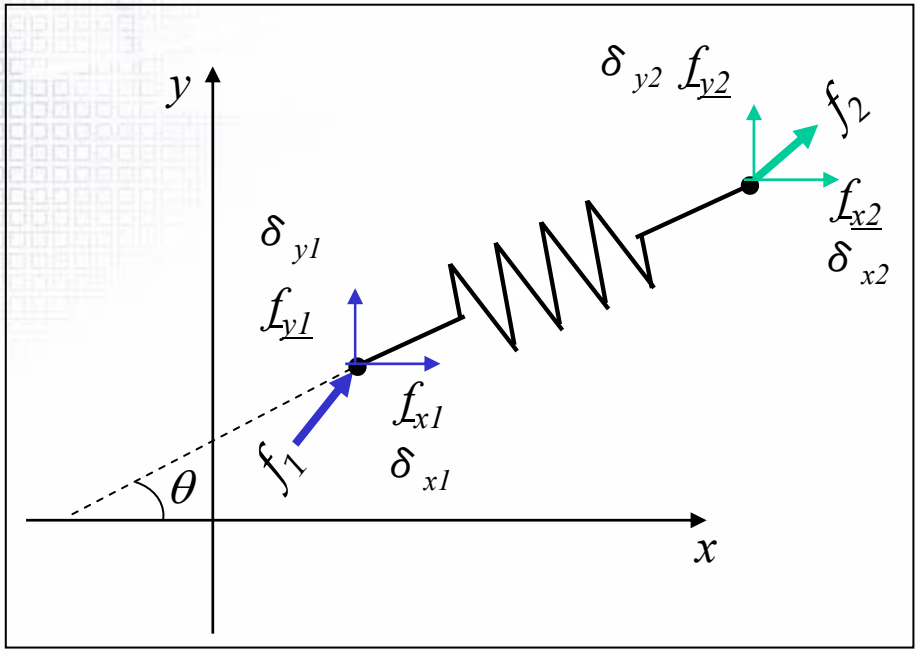
$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{T}]^{T}[\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

C:cos
S:sin

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

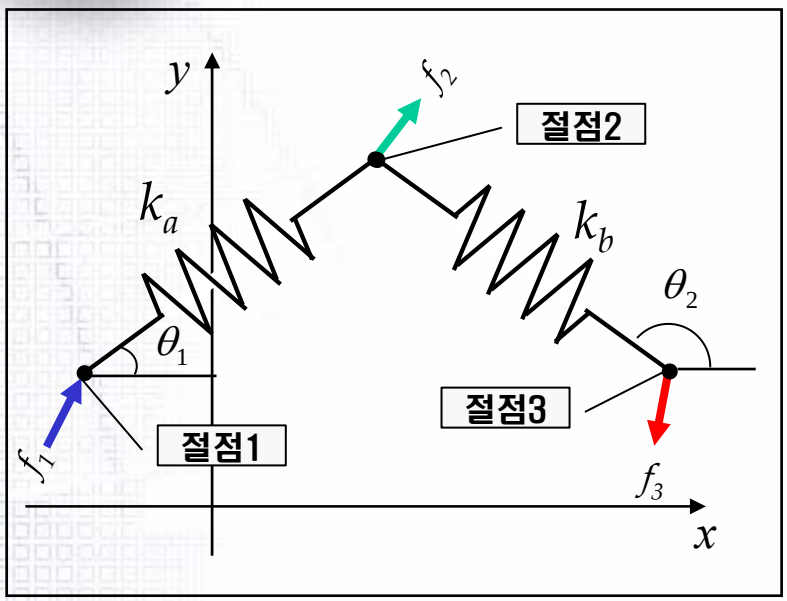
2차원 스프링 요소의 강성 방정식



2.9 2차원 스프링 요소의 중첩

C:cos
S:sin

ex) 스프링의 각 절점에서의 변위와 힘의 관계를 나타내는 강성 방정식을 구하시오.



(1) 왼쪽 스프링의 강성 방정식

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = k_a \begin{bmatrix} C^2\theta_1 & C\theta_1 S\theta_1 & -C^2\theta_1 & -C\theta_1 S\theta_1 \\ C\theta_1 S\theta_1 & S^2\theta_1 & -C\theta_1 S\theta_1 & -S^2\theta_1 \\ -C^2\theta_1 & -C\theta_1 S\theta_1 & C^2\theta_1 & C\theta_1 S\theta_1 \\ -C\theta_1 S\theta_1 & -S^2\theta_1 & C\theta_1 S\theta_1 & S^2\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

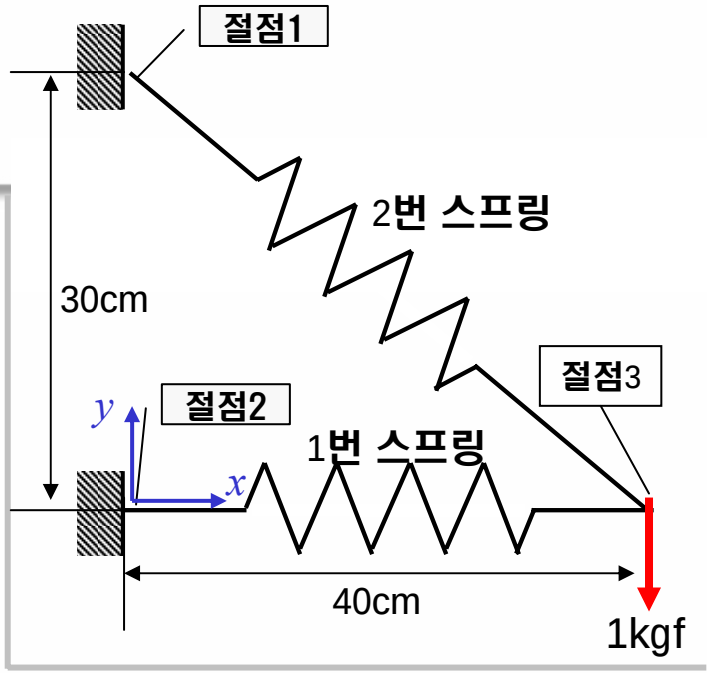
(2) 오른쪽 스프링의 강성 방정식

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = k_b \begin{bmatrix} C^2\theta_2 & C\theta_2 S\theta_2 & -C^2\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_2 & S^2\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_2 & -S^2\theta_2 \\ -C^2\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_2 & C^2\theta_2 & C\theta_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 S\theta_2 & -S^2\theta_2 & C\theta_2 S\theta_2 & S^2\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

(3) 두 스프링의 중첩

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_aC^2\theta_1 & k_aC\theta_1S\theta_1 & -k_aC^2\theta_1 & -k_aC\theta_1S\theta_1 & 0 & 0 \\ k_aC\theta_1S\theta_1 & k_aS^2\theta_1 & -k_aC\theta_1S\theta_1 & -k_aS^2\theta_1 & 0 & 0 \\ -k_aC^2\theta_1 & -k_aC\theta\, S\theta_1 & k_aC^2\theta_1+k_bC^2\theta_2 & k_aC\theta_1S\theta_1+k_bC\theta_2S\theta_2 & -k_bC^2\theta_2 & -k_bC\theta_2S\theta_2 \\ -k_aC\theta_1S\theta_1 & -k_aS^2\theta_1 & k_aC\theta_1S\theta_1+k_bC\theta_2S\theta_2 & k_aS^2\theta_1+k_bS^2\theta_2 & -k_bC\theta\, S\theta & -k_bS^2\theta_2 \\ 0 & 0 & -k_bC^2\theta_2 & -k_bC\theta_2S\theta_2 & k_bC^2\theta_2 & k_bC\theta_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & -k_bC\theta_2S\theta_2 & -k_bS^2\theta_2 & k_bC\theta_2S\theta_2 & k_bS^2\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

2.10 변위법에 따른 스프링 해석 예제



ex) 다음 스프링 구조물에서 각 절점의 변위와 반력을 구하라.
(스프링 상수 k=100 kgf/cm)

Step1. 스프링 요소 해석을 위한 입력 데이터 정리

- 좌표축 설정

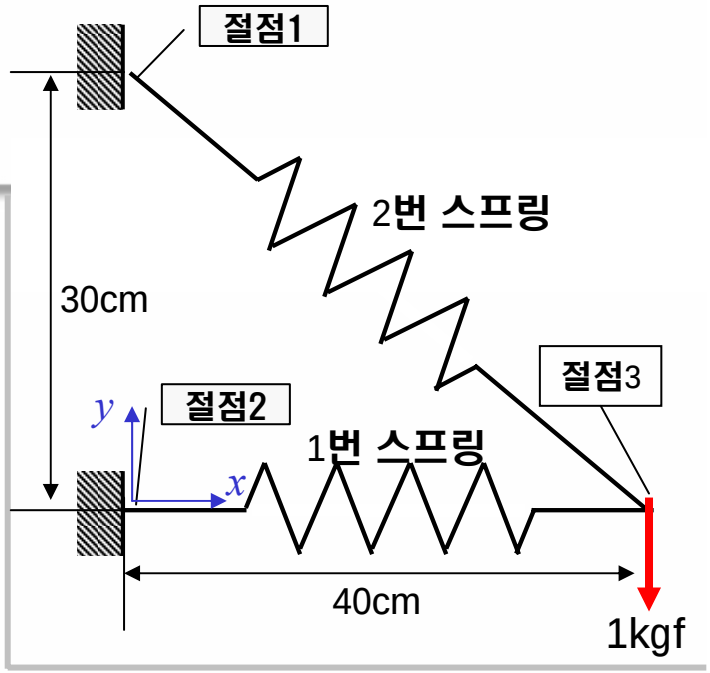
  1번 스프링의 길이 방향(오른쪽)을 x축,

  수직 방향(위쪽)을 y축으로 하는 Global Coordinate 설정

- 스프링의 삼각함수 값과 스프링 상수

스프링	$\cos\theta$	$\sin\theta$	스프링 상수(kgf/cm)
1번	1	0	100
2번	4/5	-3/5	100

2.10 변위법에 따른 스프링 해석 예제



Step2. 스프링 요소의 강성 방정식 구성

$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

C:cos
S:sin

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

☞ **1번 스프링의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

☞ **2번 스프링의 강성 방정식**

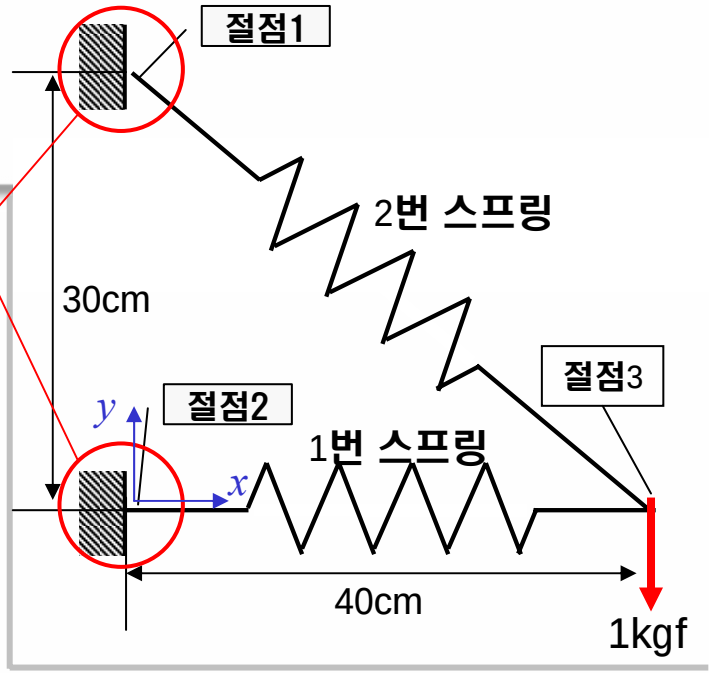
$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -48 & -64 & 48 \\ -48 & 36 & 48 & -36 \\ -64 & 48 & 64 & -48 \\ 68 & -36 & -48 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

☞ **전체 강성 강성 방정식의 구성**

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -48 & 0 & 0 & -64 & 48 \\ -48 & 36 & 0 & 0 & 48 & -36 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -64 & 48 & -100 & 0 & 164 & -48 \\ 48 & -36 & 0 & 0 & -48 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

중첩

2.10 변위법에 따른 스프링 해석 예제



(x,y축 방향 변위)= 0

Step3. **변위 구하기**

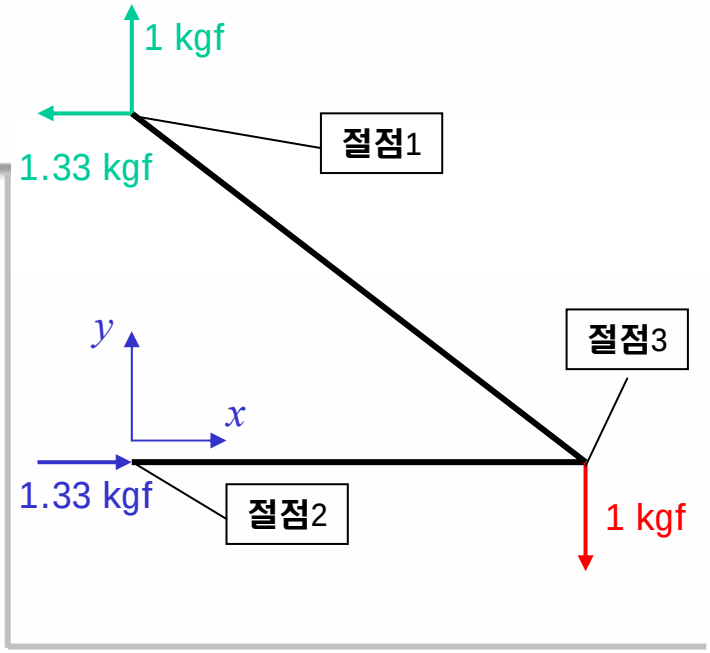
- **절점에서의 변위**(known/unknown Variable 구분)
  - ✓ known Variables : $\delta_{x1}(=0)$, $\delta_{y1}(=0)$, $\delta_{x2}(=0)$, $\delta_{y2}(=0)$
  - ✓ unknown Variables : δ_{x3}, δ_{y3}
- **절점에서의 힘**(known/unknown Variable 구분)
  - ✓ known Variables : $f_{x3}(=0)$, $f_{y3}(=-1)$
  - ✓ unknown Variables : f_{x1}, f_{y1}, f_{x2}, f_{y2}

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3}=0 \\ f_{y3}=-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -48 & 0 & 0 & -64 & 48 \\ -48 & 36 & 0 & 0 & 48 & -36 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -64 & 48 & -100 & 0 & 164 & -48 \\ 48 & -36 & 0 & 0 & -48 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1}=0 \\ \delta_{y1}=0 \\ \delta_{x2}=0 \\ \delta_{y2}=0 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164 & -48 \\ -48 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164 & -48 \\ -48 & 36 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0133 \\ -0.0456 \end{bmatrix} \text{ (cm)}$$

2.10 변위법에 따른 스프링 해석 예제



Step4. 절점력 구하기

$$\begin{bmatrix}\delta_{x3}\\ \delta_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0133\\ -0.0456\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1}\\ f_{y1}\\ f_{x2}\\ f_{y2}\\ f_{x3}=0\\ f_{y3}=-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64 & -48 & 0 & 0 & -64 & 48\\ -48 & 36 & 0 & 0 & 48 & -36\\ 0 & 0 & 100 & 0 & -100 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -64 & 48 & -100 & 0 & 164 & -48\\ 48 & -36 & 0 & 0 & -48 & 36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{x1}=0\\ \delta_{y1}=0\\ \delta_{x2}=0\\ \delta_{y2}=0\\ \delta_{x3}\\ \delta_{y3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1}\\ f_{y1}\\ f_{x2}\\ f_{y2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-64 & 48\\ 48 & -36\\ -100 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.0133\\ -0.0456\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.33\\ 1.00\\ 1.33\\ 0\end{bmatrix}(kgf)$$

▪ Global Coordinate에서 변위와 절점력의 계산 결과

$$\begin{bmatrix} f_{x1}\\ f_{y1}\\ f_{x2}\\ f_{y2}\\ f_{x3}\\ f_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.33\\ 1\\ 1.33\\ 0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}\delta_{x1}\\ \delta_{y1}\\ \delta_{x2}\\ \delta_{y2}\\ \delta_{x3}\\ \delta_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -0.0133\\ -0.0456\end{bmatrix}$$

2.10 변위법에 따른 스프링 해석 예제

Step5. 스프링의 축력 계산 (pq좌표계에서의 힘)

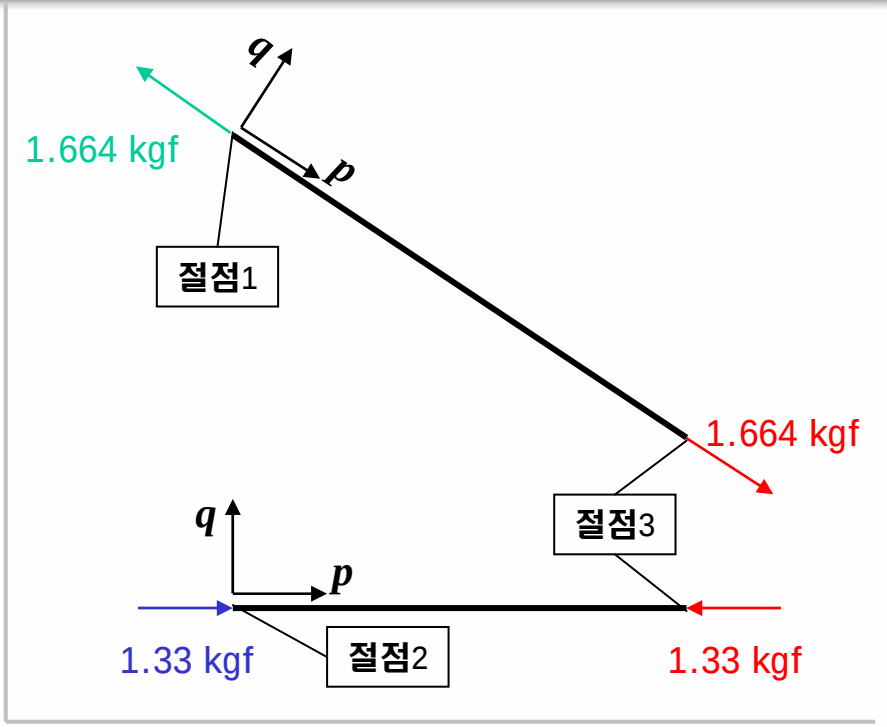
$$[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{K}_{pq}][\delta_{pq}] \leftarrow [\delta_{pq}] = [\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$
$$= [\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

▪ 1번 스프링

$$\begin{bmatrix} f_{p2} \\ f_{q2} \\ f_{p3} \\ f_{q3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.33 \\ 0 \\ -1.33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▪ 2번 스프링

$$\begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ f_{p3} \\ f_{q3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.664 \\ 0 \\ 1.664 \\ 0 \end{bmatrix}$$



2.10 변위법에 따른 스프링 요소 해석 방법

Step1. **스프링 요소 해석을 위한 입력 데이터 정리**

- **주어진 문제의 스프링의 좌표축을 설정하고, 좌표축과 부재가 양의 방향(반시계 방향)으로 이루는 각도를 측정한다.**
- **각 스프링 요소의** cos, sin**값을 구하고, 스프링 상수를 알아본다.**

Step2. **스프링 요소의 강성 방정식 구성** $\left([\mathbf{F}_{xy}]=[\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]\right)$

- **스프링 별로 강성 매트릭스를 구성한 연결 부분을 중첩시켜 최종 강성 방정식을 얻는다.**

Step3. **변위 구하기**

- known/unknown **변위와 힘을 구별한 뒤 매트릭스에서** unknown **변위와** known **힘에 대한 방정식을 만들어 변위를 구한다.**

Step4. **절점력 구하기**

- **구한 변위를 최종 강성 방정식에 대입하여 미지의 절점력을 구한다.**

2.11 강성 매트릭스 각 성분의 의미

- 스프링 요소의 경우 하나의 절점에는 2개의 변위와 2개의 힘이 존재한다.
- 3개의 절점을 가지는 스프링 요소의 강성 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

- k_{ij}의 의미 : [δ] 행렬의 j번째 변위가 1만큼 변했을 때, [F] 행렬의 i번째 원소가 받는 힘

  ex) k_{11} : 변위 $\delta_{x1}=1$만큼 생겼을 때, 절점 1에 x축 방향으로 발생하는 힘

  ex) k_{24} : 변위 $\delta_{y2}=1$만큼 생겼을 때, 절점 1에 y축 방향으로 발생하는 힘

Ch3. 트러스 구조 해석

3.1 트러스 구조의 정의

3.2 트러스 구조의 예

3.3 트러스 구조물과 스프링의 관계

3.4 1차원 트러스 구조물의 강성 방정식

3.5 2차원 트러스 구조물의 강성 방정식

3.6 2차원 트러스 구조물 해석 예제

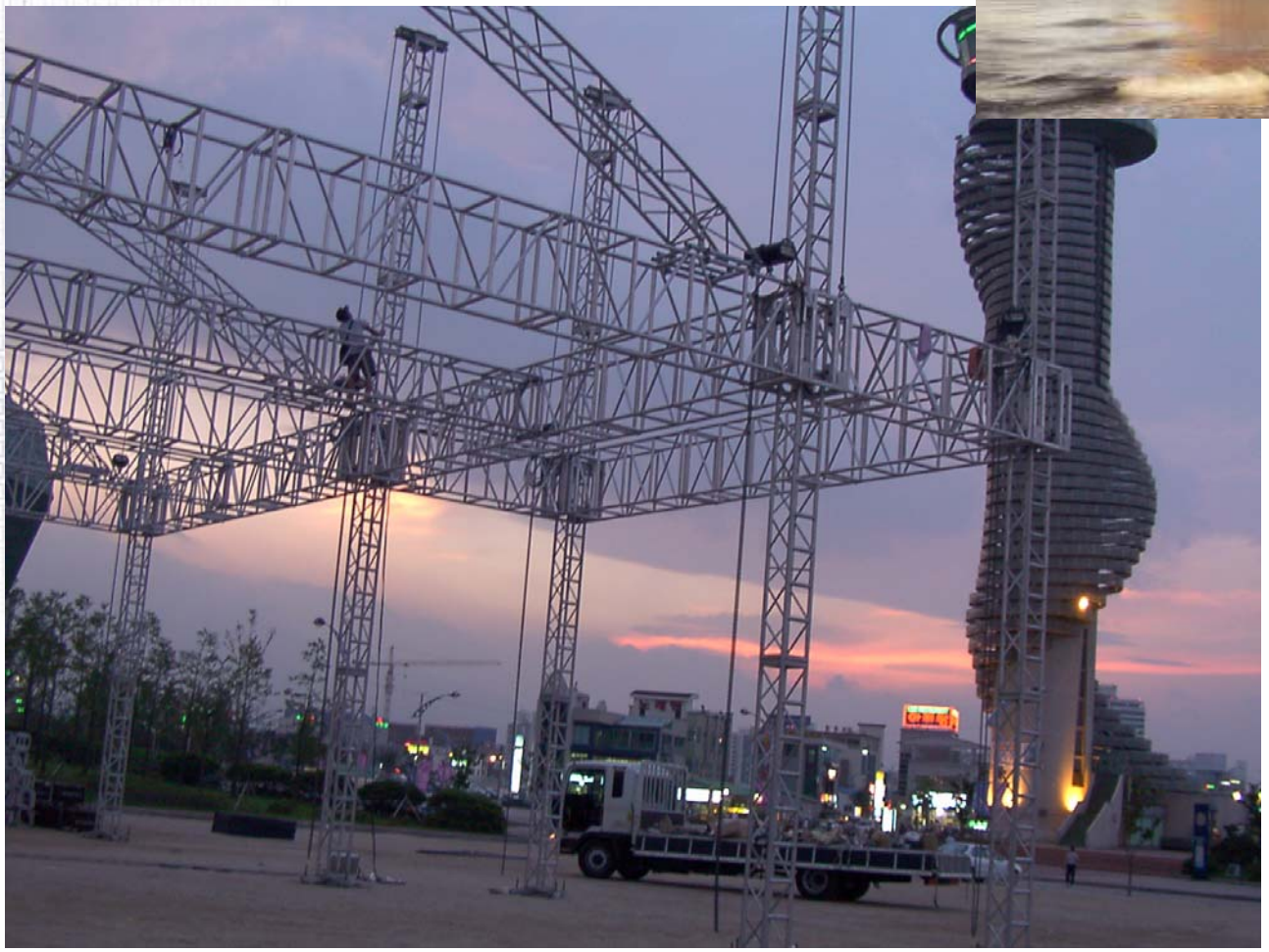
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

3.1 트러스 구조의 정의

- 트러스 정의 : 비교적 가늘고 긴 직선 부재를 연결하여 삼각형의 구성 요소가 되도록 배열한 구조물

- 트러스 특징
  - ✓ 몇 개의 가는 부재의 조합으로 구성
  - ✓ 단면적은 일정하고 단면적에 비해 부재의 길이가 매우 김
  - ✓ 응력, 변형도는 축방향만 고려, 전단응력은 무시
  - ✓ 각 부재는 핀으로 접합되어 있어서 모멘트 발생 없음
  - ✓ 핀의 접합 부분을 절점으로 보고 외력이 작용할 때 힘은 절점을 통해 전달

3.2 트러스 구조의 예



3.3 트러스 구조물과 스프링의 관계

- 그림과 같은 단일 트러스에 양방향으로 힘 F가 작용할 때, 탄성 영역 내에서 응력(σ)과 변형율(ε)사이에는 다음 관계를 만족한다.

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{A} = E\frac{\delta}{L}$$

$$F = \frac{EA}{L}\delta$$

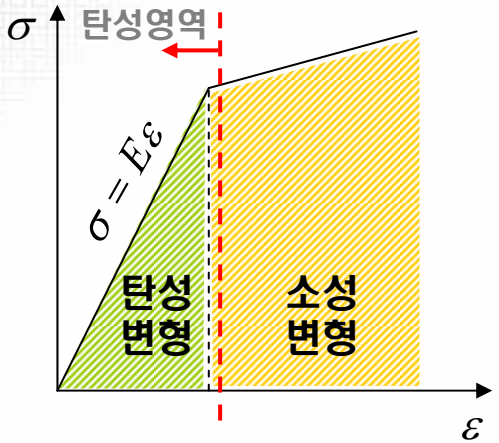
$$F = k\delta \quad \left(k = \frac{EA}{L}\right)$$

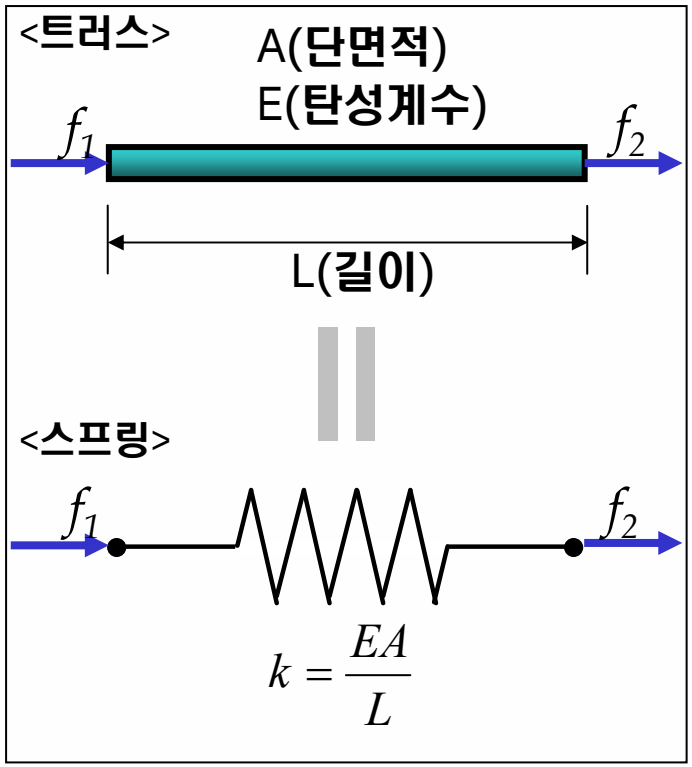
Hooke의 법칙

E : 탄성계수

σ : 응력[$\sigma = \frac{F}{A}$]

ε : 변형율[$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$]



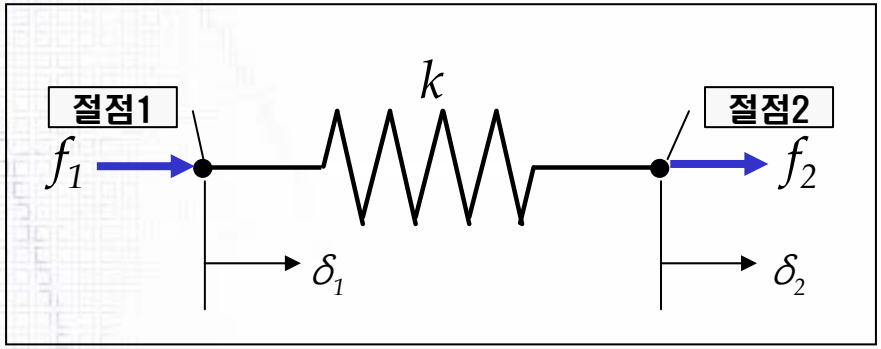


∴ 트러스 구조물

= 스프링 상수가 $k = \frac{EA}{L}$인 스프링 요소와 동일

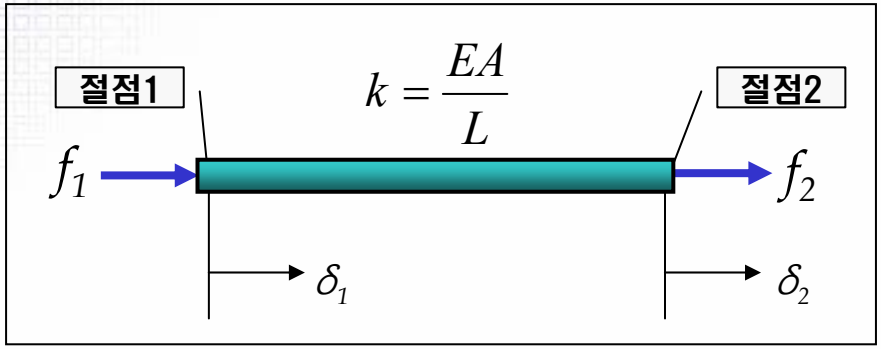
3.4 1차원 트러스 구조물의 강성 방정식(1)

▪ 1차원 단일 스프링 요소의 강성 방정식



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

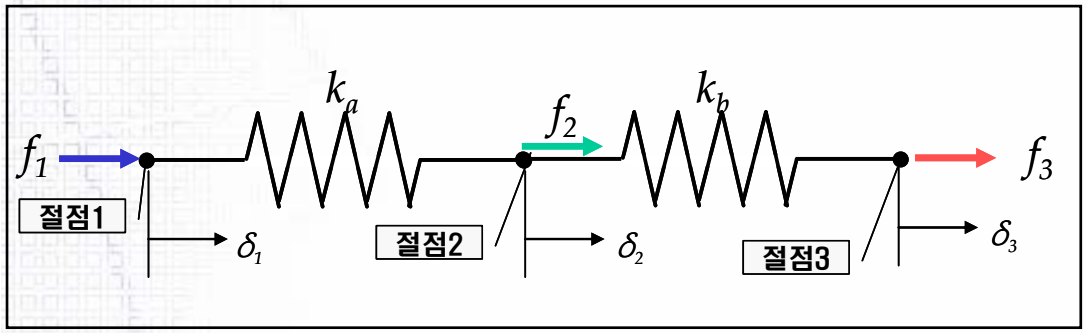
▪ 1차원 단일 트러스 구조물의 강성 방정식 : k에 $\frac{EA}{L}$ 을 대입



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

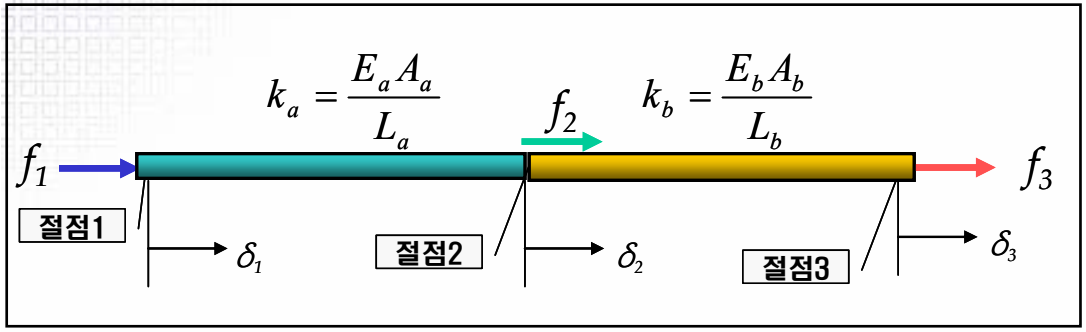
3.4 1차원 트러스 구조물의 강성 방정식(2)

▪ 1차원 복수 스프링 요소의 강성 방정식



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

▪ 1차원 복수 트러스 구조물의 강성 방정식

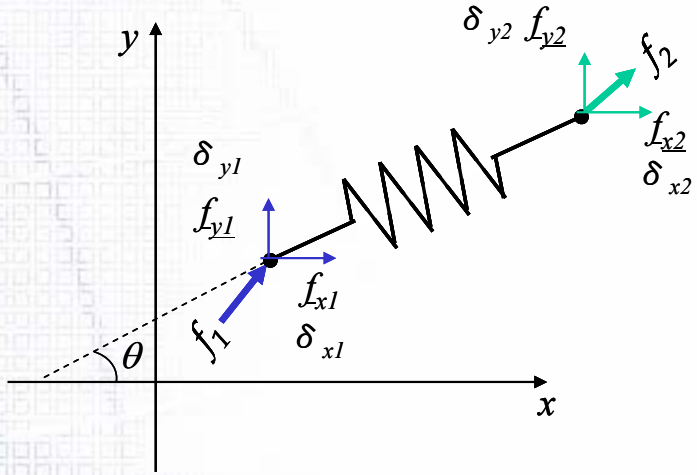


$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_a A_a}{L_a} & -\frac{E_a A_a}{L_a} & 0 \\ -\frac{E_a A_a}{L_a} & \frac{E_a A_a}{L_a} + \frac{E_b A_b}{L_b} & -\frac{E_b A_b}{L_b} \\ 0 & -\frac{E_b A_b}{L_b} & \frac{E_b A_b}{L_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

3.5 2차원 트러스 구조물의 강성 방정식

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

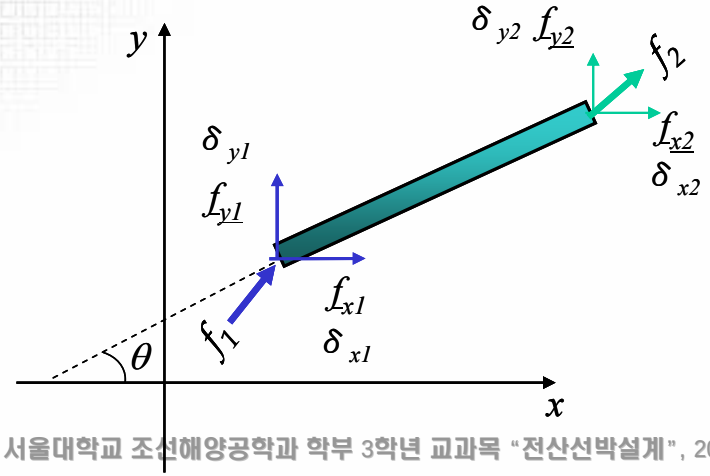
▪ 2차원 스프링 요소의 강성 방정식



$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

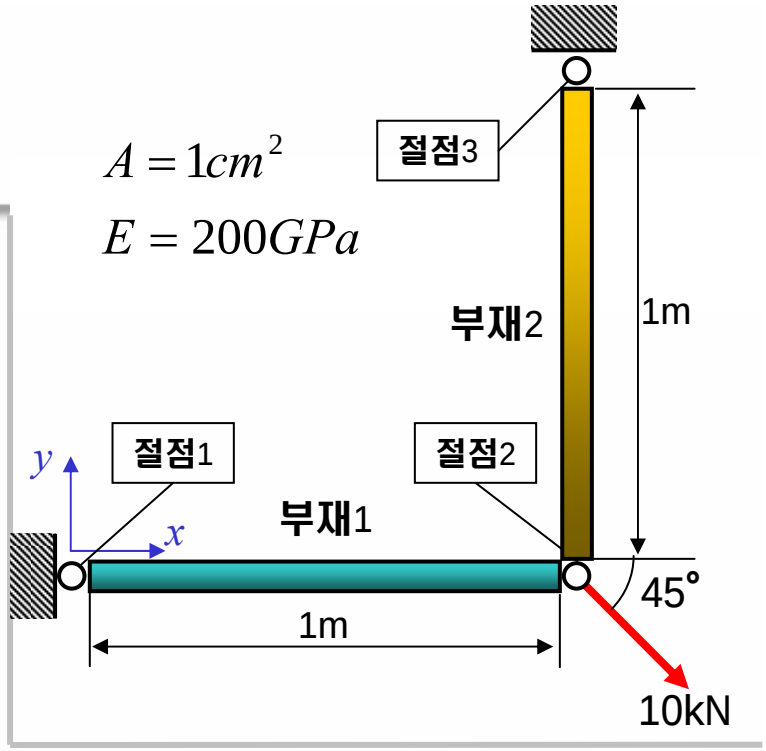
▪ 2차원 트러스 요소의 강성 방정식



$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

3.6 2차원 트러스 구조물 해석 예제



ex) 다음 트러스 구조물의 각 절점에서의 변위와 반력을 구하시오. (단면적 A=1㎠, 탄성계수 E=200 GPa)

Step1. 트러스 구조물 해석을 위한 입력 데이터 정리

- 좌표축 설정

  부재 1번 의 길이 방향(오른쪽)을 x축,

  수직 방향(위쪽)을 y축으로 하는 Global Coordinate 설정

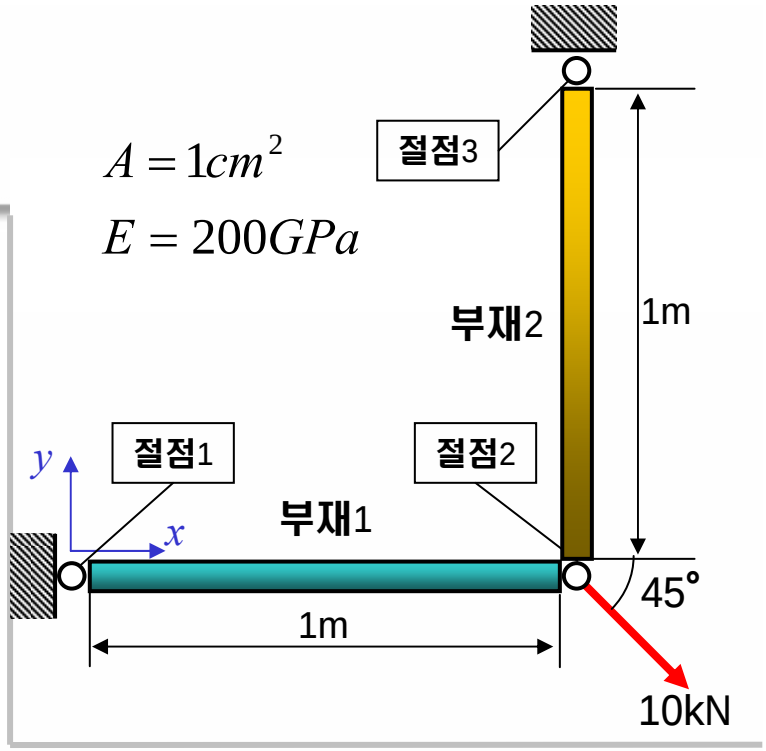
- 스프링의 삼각함수 값과 스프링 상수 ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 90$)

$$200GPa = 200 \times 10^9 N/m^2 = 200 \times 10^5 N/cm^2$$

$$k = \frac{EA}{L} = \frac{200 \times 10^5 N/cm^2 \cdot 1cm^2}{100cm} = 2 \times 10^5 N/cm$$

부재	cos θ	sin θ	길이 (cm)	단면적 (㎠)	탄성계수 (GPa)	스프링상수 (N/cm)
1번	1	0	100	1	200	$2X10^5$
2번	0	1				

3.6 2차원 트러스 구조물 해석 예제



Step2. 트러스 구조물의 강성 방정식 구성

$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

☞ **부재 1의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

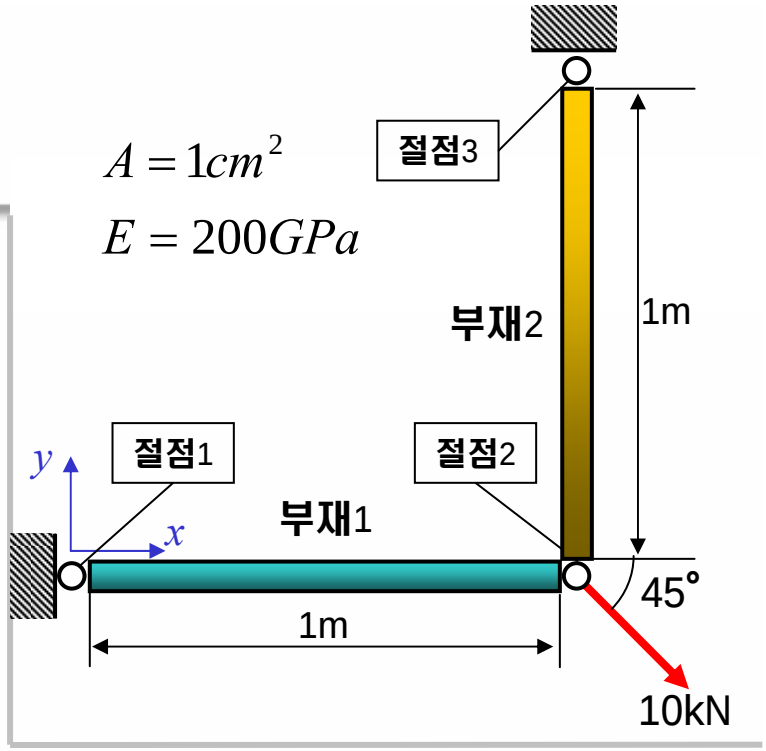
☞ **부재 2의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

☞ **전체 강성 방정식의 구성**

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix}$$

3.6 2차원 트러스 구조물 해석 예제



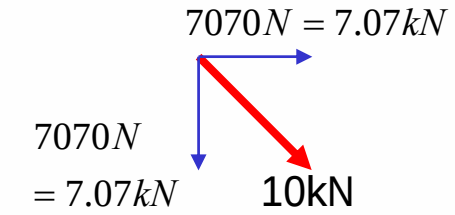
Step3. 변위 구하기

- **절점에서의 변위**(known/unknown Variable 구분)
  - ✓ known Variables : $\delta_{x1}, \delta_{y1}, \delta_{x3}, \delta_{y3}$(=>0)
  - ✓ unknown Variables : δ_{x2}, δ_{y2}
- **절점에서의 힘**(known/unknown Variable 구분)
  - ✓ known Variables : f_{x2}(= $7070N$), f_{y2}(= $-7070N$)
  - ✓ unknown Variables : f_{x1}, f_{y1}, f_{x3}, f_{y3}

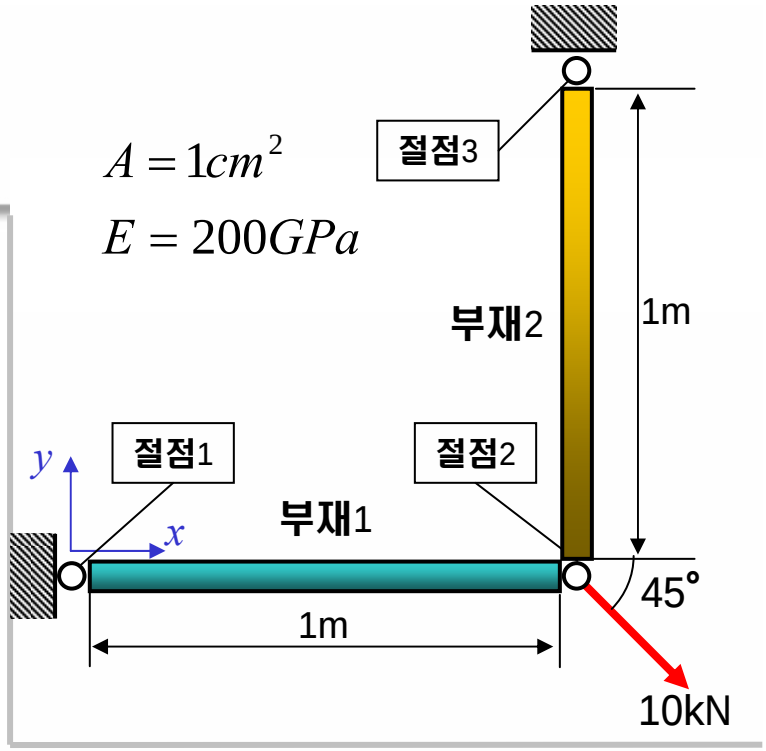
$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} = 7070 \\ f_{y2} = -7070 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} = 0 \\ \delta_{y1} = 0 \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} = 0 \\ \delta_{y3} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5000\sqrt{2} \\ -5000\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times10^5 & 0 \\ 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times10^5 & 0 \\ 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5000\sqrt{2} \\ -5000\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03535 \\ -0.03535 \end{bmatrix} (cm)$$



3.6 2차원 트러스 구조물 해석 예제



Step4. 절점력 구하기

$$\begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03535 \\ -0.03535 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\times10^5 & 0 & -2\times10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\times10^5 & 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1}=0 \\ \delta_{y1}=0 \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3}=0 \\ \delta_{y3}=0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\times10^5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2\times10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03535 \\ -0.03535 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -7070 \\ 0 \\ 0 \\ 7070 \end{bmatrix} (N)$$

- Global Coordinate에서의 변위와 절점력의 계산 결과

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.07 \\ 0 \\ 7.07 \\ -7.07 \\ 0 \\ 7.07 \end{bmatrix} (kN) \qquad \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.03535 \\ -0.03535 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (cm)$$

Ch4. 보 및 프레임 구조 해석

4.1 보(Beam)와 프레임(Frame)의 정의

4.2 경계 조건 (Boundary Condition) – 보(Beam)

4.2 경계 조건 (Boundary Condition) – 프레임(Frame)

4.3 보의 강성 방정식 유도

4.4 프레임의 강성 방정식

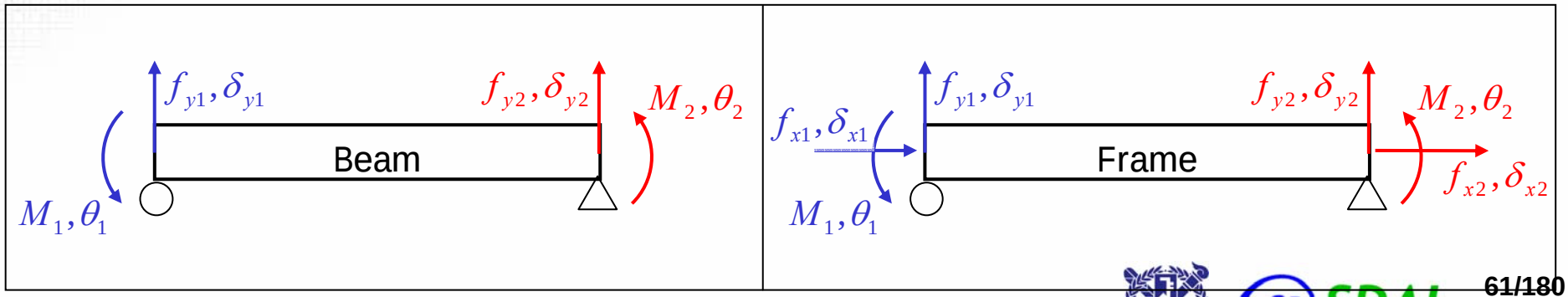
4.5 2차원 프레임의 강성 방정식

4.6 프레임 해석 예제

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

4.1 보(Beam)와 프레임(Frame)의 정의

- **보** (Beam)
  - 비틀이나 축 방향의 변형 보다 굽힘에의한 변형을 뚜렷하게 보여주는 구조부재
  - 횡 하중에 의해 굽힘 모멘트와 전단력이 발생
  - 축방향의 변형은 없음
  - 모멘트에 의한 회전 변위(처짐각)와 수직힘에 의한 수직 변위(처짐)만 존재
- **프레임** (Frame)
  - 보의 성질과 트러스의 성질을 함께 가지는 구조물
  - 회전 변위, 수직 변위, 수평 변위(축방향 변위)가 존재



4.2 경계 조건 (Boundary Condition) – 보(Beam)

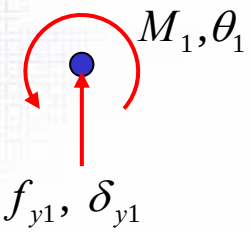
▪ 보 구조물의 경계 조건

① 변위가 고정일 경우 반력 또는 모멘트가 발생함

② 변위가 고정되어 있지 않을 경우 외력 또는 모멘트를 받아 변위가 발생

③ 즉, 변위가 고정일 경우 이에 대한 반력(또는 모멘트)가 미지수가 되고, 고정이 아닐 경우 외력과 모멘트에 의해서 발생할 변위가 미지수가 됨

절점에 가해지는 힘과 모멘트

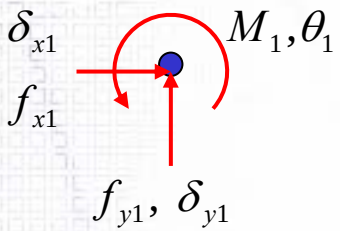


	Simple Support	Fixed End	Free-End
Known	δ_{y1}, M_1 (=0)	δ_{y1}, θ_1 (=0)	f_{y1}, M_1 (Given)
Unknown	f_{y1}, θ_1	f_{y1}, M_1	δ_{y1}, θ_1

4.2 경계 조건 (Boundary Condition) – 프레임(Frame)

▪ 프레임 구조물의 경계 조건

절점에 가해지는 힘과 모멘트

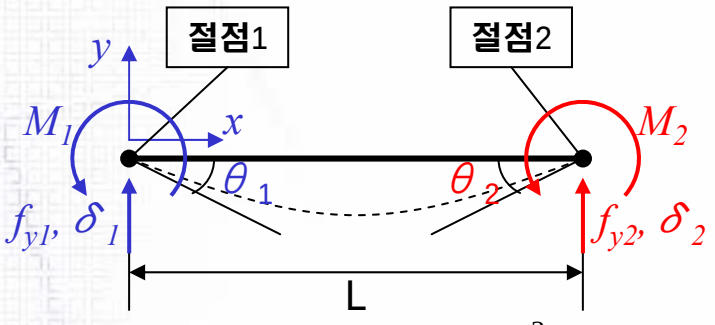


	Simple Support	Fixed End	Free-End
Known	$\delta_{x1}, \delta_{y1}, M_1$ (=0)	$\delta_{x1}, \delta_{y1}, \theta_1$ (=0)	f_{x1}, f_{y1}, M_1 (Given)
Unknown	f_{x1}, f_{y1}, θ_1	f_{x1}, f_{y1}, M_1	$\delta_{x1}, \delta_{y1}, \theta_1$

4.3 보의 강성 방정식 유도[1]

1) 박재형, "구조해석 꼭 어려워야 하나" , 기문당, 2006, pp.99~103

▪ 보이론을 기반으로 보의 강성방정식 유도



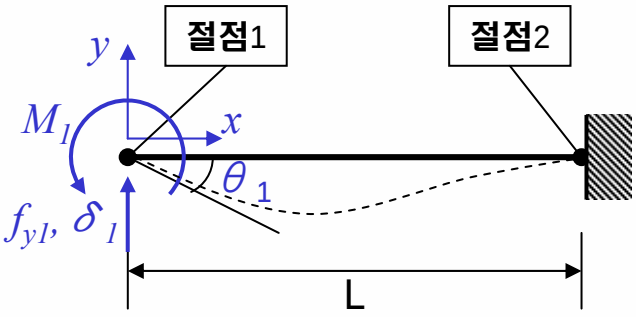
탄성선의 미분방정식 : $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -M$

① 적분하면, $EI\dfrac{dy}{dx} = -M_1x + \dfrac{f_{y1}}{2}x^2 + C_1$

$x = L$ 에서 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=L} = \theta_2 = 0$

$-M_1L + \dfrac{f_{y1}}{2}L^2 + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = M_1L - \dfrac{f_{y1}}{2}L^2$

(1) 절점 2를 고정한 경우 $(\delta_{y2} = 0,\ \theta_2 = 0)$



미분방정식 : $EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = -M_1 + f_{y1}x$

② 다시 적분하면,

$EIy = -\dfrac{M_1}{2}x^2 + \dfrac{f_{y1}}{6}x^3 + C_1x + C_2$

$x = L$ 에서 $\left.y\right]_{x=L} = \delta_{y2} = 0$

$-\dfrac{M_1}{2}L^2 + \dfrac{f_{y1}}{6}L^3 + C_1L + C_2 = 0$

$\therefore C_2 = \dfrac{M_1}{2}L^2 - \dfrac{f_{y1}}{6}L^3 - C_1L = -\dfrac{M_1}{2}L^2 + \dfrac{f_{y1}}{3}L^3$

4.3 보의 강성 방정식 유도

③ ①②에서 구한 처짐 곡선식과 처짐각식에서 $x=0$에서의 수직변위(δ_{y1})와 회전변위(θ_1)를 계산

처짐 곡선식 : $EIy = -\frac{M_1}{2}x^2 + \frac{f_{y1}}{6}x^3 + C_1 x + C_2$

처짐각식 : $EI\frac{dy}{dx} = -M_1 x + \frac{f_{y1}}{2}x^2 + C_1$

$C_1 = M_1 L - \frac{f_{y1}}{2}L^2$, $C_2 = -\frac{M_1}{2}L^2 + \frac{f_{y1}}{3}L^3$

- x=0에서의 y축 방향의 수직변위

$$\delta_{y1} = y\big|_{x=0} = \frac{C_2}{EI} = -\frac{M_1}{2EI}L^2 + \frac{f_{y1}}{3EI}L^3$$

- x=0에서의 회전변위

$$\theta_1 = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{C_1}{EI} = \frac{M_1}{EI}L - \frac{f_{y1}}{2EI}L^2$$

- Matrix 형태로 표현

$$\begin{bmatrix}\delta_{y1}\\ \theta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI}\\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{y1}\\ M_1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}f_{y1}\\ M_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{L^3}{3EI} & -\frac{L^2}{2EI}\\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\delta_{y1}\\ \theta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}\\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{y1}\\ \theta_1\end{bmatrix}$$

4.3 보의 강성 방정식 유도

④ 힘과 모멘트의 평형 조건을 이용하여 $x=L$에서의 수직힘(f_{y2})과 모멘트(M_2)를 계산

y방향 힘 : $\sum f_y = f_{y1} + f_{y2} = 0$

모멘트 : $\sum M_2 = -f_{y1}L + M_1 + M_2 = 0$

- 절점 2에서 y방향의 힘

$$f_{y2} = -f_{y1}$$

- 절점 2에서 모멘트

$$M_2 = f_{y1}L - M_1$$

- Matrix 형태로 표현

$$\begin{bmatrix} f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

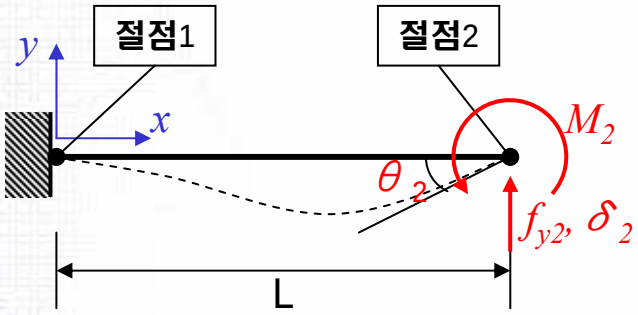
$$= \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

- 절점 2를 고정했을 때, 힘과 변위와의 관계식

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

4.3 보의 강성 방정식 유도

(1) **절점 1을 고정한 경우** $(\delta_{y1}=0,\ \theta_1=0)$



미분방정식 : $EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=M_2+f_{y2}x$

① **적분하면**, $EI\dfrac{dy}{dx}=M_2x+\dfrac{f_{y2}}{2}x^2+C_1$

$x=0$ **에서** $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0}=\theta_1=0$

$\therefore C_1=0 \Longrightarrow EI\dfrac{dy}{dx}=M_2x+\dfrac{f_{y2}}{2}x^2$

② **다시 적분하면**,

$$EIy=\frac{M_2}{2}x^2+\frac{f_{y2}}{6}x^3+C_2$$

$x=0$ **에서** $y]_{x=0}=\delta_{y1}=0$

$\therefore C_2=0 \Longrightarrow EIy=\dfrac{M_2}{2}x^2+\dfrac{f_{y2}}{6}x^3$

4.3 보의 강성 방정식 유도

③ ①②에서 구한 처짐 곡선식과 처짐각식에서 $x=L$에서의 수직변위(δ_{y2})와 회전변위(θ_2)를 계산

처짐 곡선식 : $EIy = \frac{M_2}{2}x^2 + \frac{f_{y2}}{6}x^3$

처짐각식 : $EI\frac{dy}{dx} = M_2 x + \frac{f_{y2}}{2}x^2$

▪ x=L에서의 y축 방향의 변위

$$\delta_{y2} = y\big|_{x=L} = \frac{M_2}{2EI}L^2 + \frac{f_{y2}}{3EI}L^3$$

▪ x=L에서의 회전변위(처짐각)

$$\theta_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \frac{M_2}{EI}L + \frac{f_{y2}}{2EI}L^2$$

▪ Matrix 형태로 표현

$$\begin{bmatrix}\delta_{y2}\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI}\\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{y2}\\ M_2\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}f_{y2}\\ M_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI}\\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\delta_{y2}\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}\\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{y2}\\ \theta_2\end{bmatrix}$$

NAOE/SNU
@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

4.3 보의 강성 방정식 유도

④ 힘과 모멘트의 평형 조건을 이용하여 $x=0$에서의 수직힘(f_{y1})과 모멘트(M_1)를 계산

y방향 힘 : $\sum f_y = f_{y1} + f_{y2} = 0$

모멘트 : $\sum M_1 = f_{y2}L + M_1 + M_2 = 0$

- 절점 2에서 y방향의 힘

$$f_{y1} = -f_{y2}$$

- 절점 2에서 모멘트

$$M_1 = -f_{y2}L - M_2$$

- Matrix 형태로 표현

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix}$$

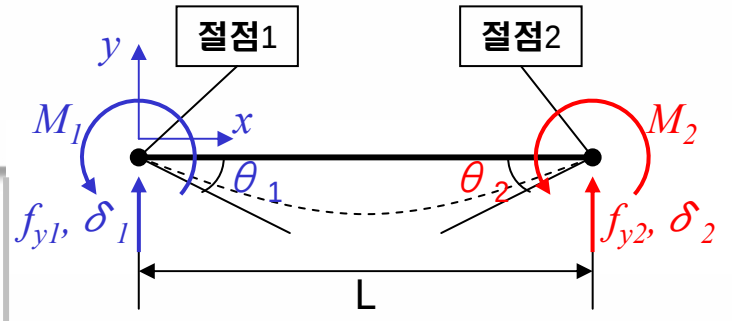
$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

- 절점 1를 고정했을 때, 힘과 변위와의 관계식

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

4.3 보의 강성 방정식 유도



▪ 절점 2를 고정했을 때,
힘과 변위와의 관계식

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

▪ 절점 1를 고정했을 때,
힘과 변위와의 관계식

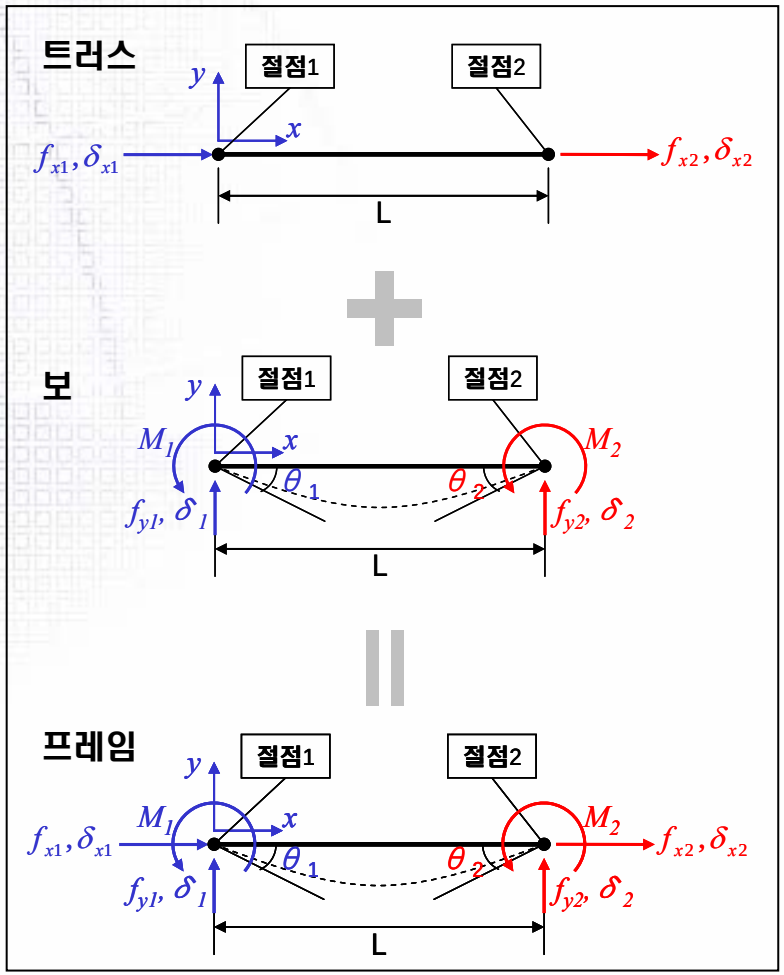
$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

▪ **보(Beam)의 강성 방정식** :

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

4.4 프레임의 강성 방정식

(프레임의 강성 방정식)
= (트러스의 강성 방정식) + (보의 강성방정식)



(트러스)

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

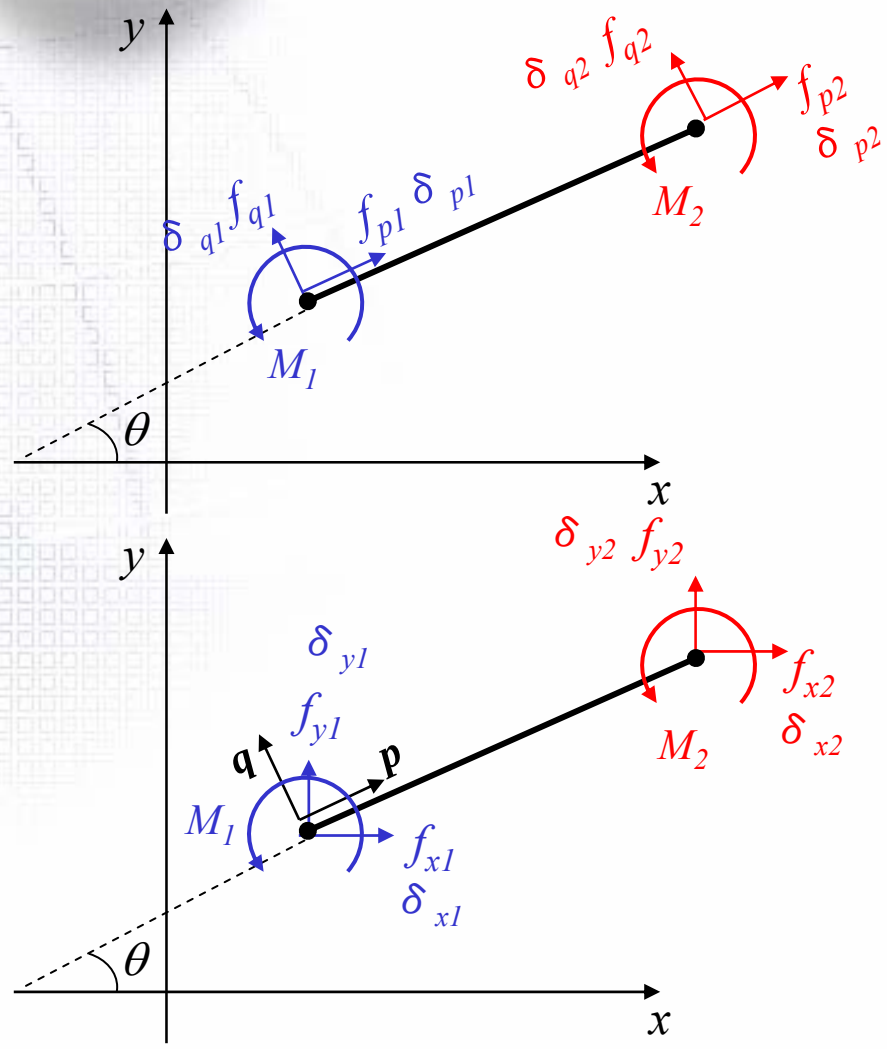
(보)

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

(프레임)

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

4.5 2차원 프레임의 강성 방정식



- 2차원 공간에 위치한 프레임
  - **(1)** pq방향의 변위와 힘은 2차원 트러스와 동일 (z축 기준으로 회전변환)
  - **(2)** 회전 변위(θ_1, θ_2)와 모멘트는 z축을 기준으로 돌리므로, 회전시켜도 동일함

$$[\delta_{pq}] = [\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{p1} \\ \delta_{q1} \\ \theta_1 \\ \delta_{p2} \\ \delta_{q2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[f_{pq}] = [\mathbf{T}][f_{xy}]$$

$$\begin{bmatrix} f_{p1} \\ f_{q1} \\ M_1 \\ f_{p2} \\ f_{q2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix}$$

4.5 2차원 프레임의 강성 방정식

(3) 프레임의 강성 방정식에 (2)의 두 관계식을 대입하여 최종 강성 방정식 얻음

① $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{K}_{pq}][\delta_{pq}]$ ⇒ $[\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$

$[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^{T}$ 을 곱함

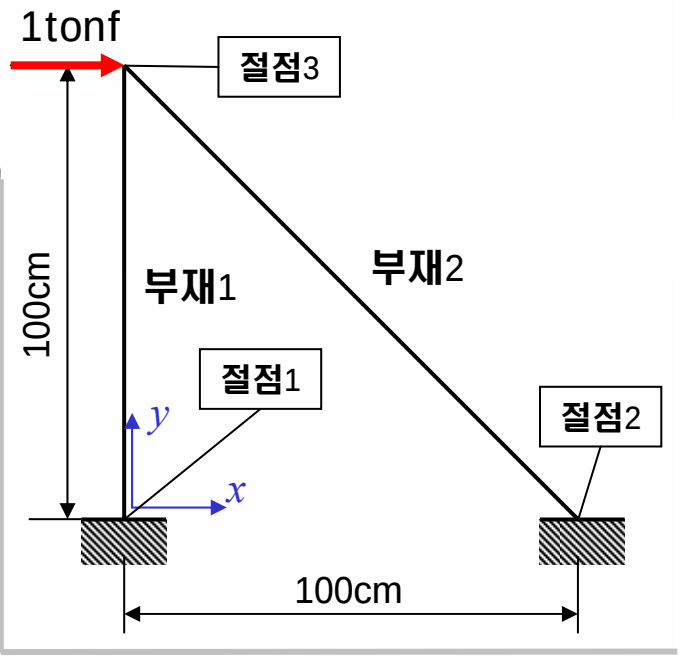
② $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}]$ ③ $[\delta_{pq}] = [\mathbf{T}][\delta_{xy}]$

$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{T}]^{T}[\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

$$[\mathbf{T}]^{T}[\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}\cos^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\sin^2\theta & \frac{EA}{L}\sin\theta\cos\theta - \frac{12EI}{L^3}\sin\theta\cos\theta & -\frac{6EI}{L^2}\sin\theta & -\frac{EA}{L}\cos^2\theta - \frac{12EI}{L^3}\sin^2\theta & -\frac{EA}{L}\sin\theta\cos\theta + \frac{12EI}{L^3}\sin\theta\cos\theta & -\frac{6EI}{L^2}\sin\theta \\ - & \frac{EA}{L}\sin^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta & \frac{EA}{L}\sin\theta\cos\theta - \frac{12EI}{L^3}\sin\theta\cos\theta & -\frac{EA}{L}\sin^2\theta - \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta \\ - & - & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\sin\theta & \frac{6EI}{L^2}\cos\theta & \frac{2EI}{L} \\ - & \textit{symmetric} & - & \frac{EA}{L}\cos^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\sin^2\theta & \frac{EA}{L}\sin\theta\cos\theta - \frac{12EI}{L^3}\sin\theta\cos\theta & \frac{6EI}{L^2}\sin\theta \\ - & - & - & - & \frac{EA}{L}\sin^2\theta + \frac{12EI}{L^3}\cos^2\theta & -\frac{6EI}{L^2}\cos\theta \\ - & - & - & - & - & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

4.6 프레임 해석 예제



ex) 다음 프레임 구조물의 각 절점에서의 변위와 반력을 구하시오
(단면 2차 모멘트 I=0.5cm^4, 탄성계수 E=10^6 kgf/cm^2)
부재의 단면적 A=1cm^2)

Step1. 스프링 요소 해석을 위한 입력 데이터 정리

- 좌표축 설정

  부재 1번 의 길이 방향(위쪽)을 y축,

  수직 방향(오른쪽)을 x축으로 하는 Global Coordinate 설정

- 스프링의 삼각함수 값과 기타 데이터 ($\theta_1 = 90,\ \theta_2 = 135$)

부재	cos θ	sin θ	길이 (cm)	단면적 (㎠)	탄성계수 (kgf/cm^2)	2차 모멘트 (cm^4)
1번	0	1	100	1	10^6	0.5
2번	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$100\sqrt{2}$			

4.6 프레임 해석 예제

Step2. **프레임 구조물의 강성 매트릭스 구성**

앞서 계산한 2차원 프레임 구조물 강성 방정식에

부재 1, 부재 2의 데이터를 입력해 강성 방정식을 세움

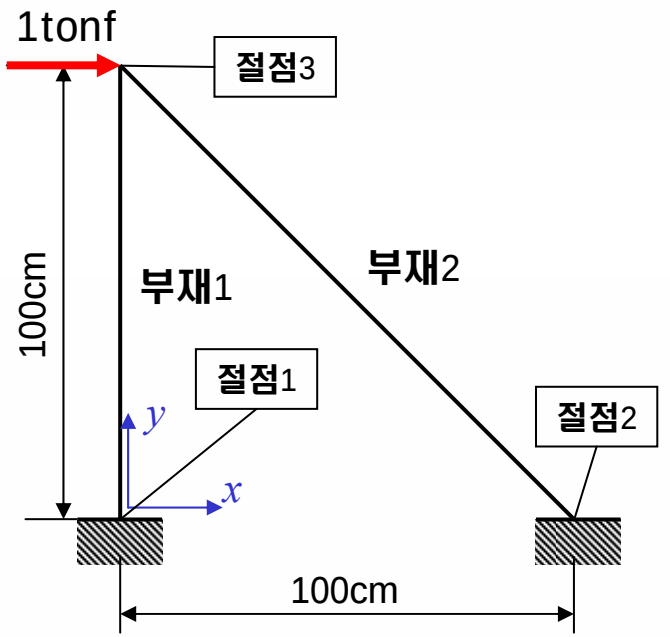
$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

☞ **부재 1의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -300 & -6 & 0 & -300 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 \\ -300 & 0 & 20000 & 300 & 0 & 10000 \\ -6 & 0 & 300 & 6 & 0 & 300 \\ 0 & -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ -300 & 0 & 10000 & 300 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

☞ **부재 2의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3536.59 & -3534.47 & -106.07 & -3536.59 & 3534.47 & -106.07 \\ -3534.47 & 3536.59 & -106.07 & 3534.47 & -3536.59 & -106.07 \\ -106.07 & -106.07 & 14142.14 & 106.07 & 106.07 & 7071.07 \\ -3536.59 & 3534.47 & 106.07 & 3536.59 & -3534.47 & 106.07 \\ 3534.47 & -3536.59 & 106.07 & -3534.47 & 3536.59 & 106.07 \\ -106.07 & -106.07 & 7071.07 & 106.07 & 106.07 & 14142.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$



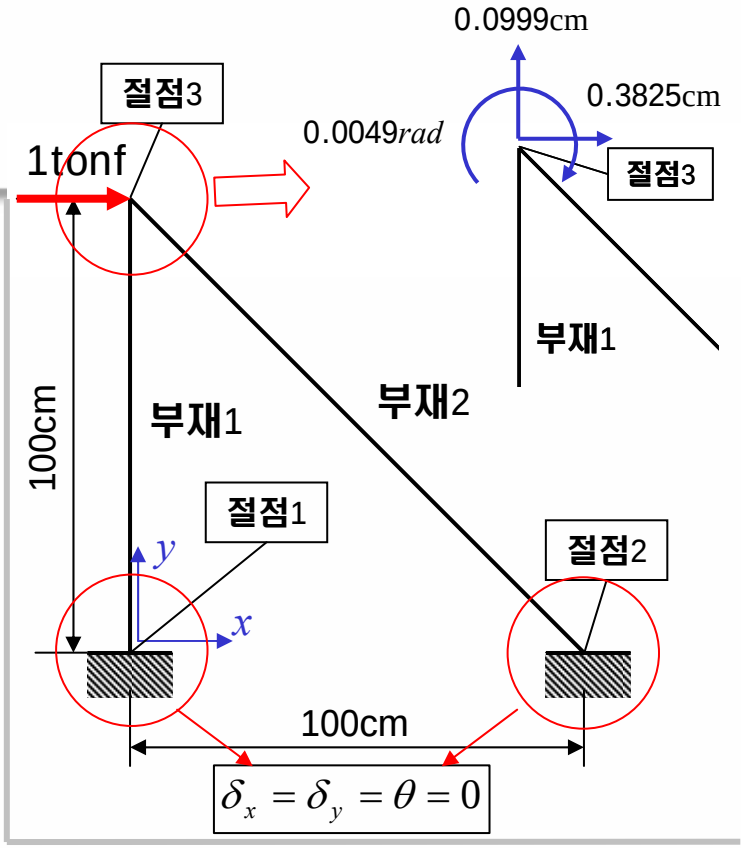
※New Recommanded Method

: 강성 방정식의 크기가 커지므로,
known, unknown**을 구별한 뒤 필요한**
부분만을 모아서 강성 방정식을 구성

4.6 프레임 해석 예제

Step3. **변위 구하기**

- **절점에서의 변위**(known/unknown Variable 구분)
  - ✓ known Variables : $\delta_{x1}, \delta_{y1}, \theta_1, \delta_{x2}, \delta_{y2}, \theta_2(=0)$
  - ✓ unknown Variables : $\delta_{x3}, \delta_{y3}, \theta_3$
- **절점에서의 힘**(known/unknown Variable 구분)
  - ✓ known Variables : $f_{x3}(=1\text{tonf}), f_{y3}(=0), M_3(=0)$
  - ✓ unknown Variables : $f_{x1}, f_{y1}, M_1, f_{x2}, f_{y2}, M_2$



$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -300 & -6 & 0 & -300 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 \\ 0-300 & 0 & 20000 & 300 & 0 & 10000 \\ -6 & 0 & 300 & 6 & 0 & 300 \\ 0 & -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ -300 & 0 & 10000 & 300 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

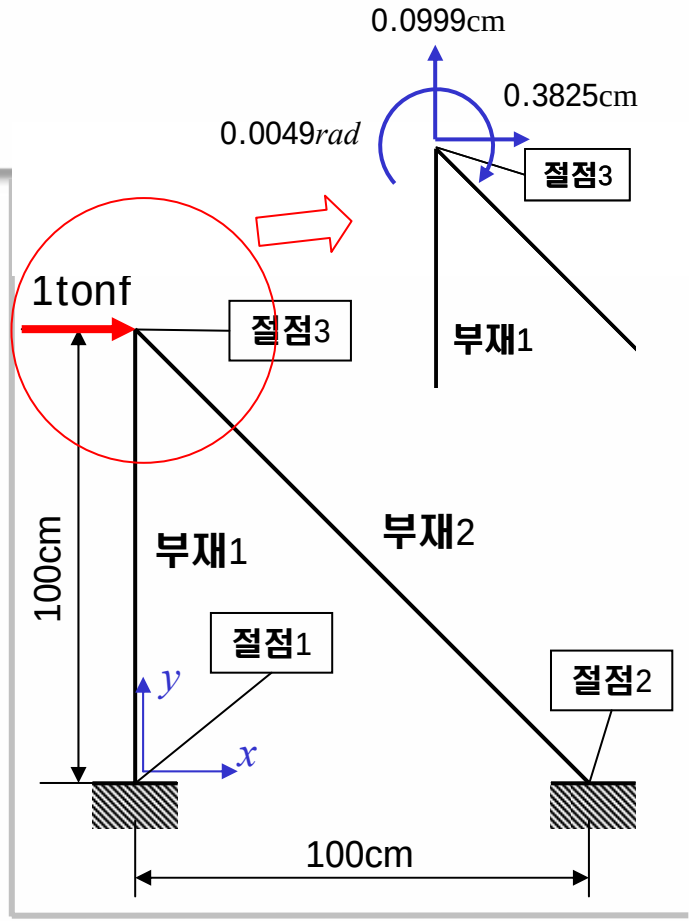
$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3536.59 & -3534.47 & -106.07 & -3536.59 & 3534.47 & -106.07 \\ -3534.47 & 3536.59 & -106.07 & 3534.47 & -3536.59 & -106.07 \\ -106.07 & -106.07 & 14142.14 & 106.07 & 106.07 & 7071.07 \\ -3536.59 & 3534.47 & 106.07 & 3536.59 & -3534.47 & 106.07 \\ 3534.47 & -3536.59 & 106.07 & -3534.47 & 3536.59 & 106.07 \\ -106.07 & -106.07 & 7071.07 & 106.07 & 106.07 & 14142.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

파란색 부분 중첩

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{x3} = 1000kgf \\ f_{y3} = 0 \\ M_3 = 0 \end{bmatrix}}_{\text{known}} = \begin{bmatrix} 3542.59 & -3534.47 & 406.07 \\ -3534.47 & 13536.59 & 10607 \\ 406.07 & 106.07 & 34142.14 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}}_{\text{unknown}}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3542.59 & -3534.47 & 406.07 \\ -3534.47 & 13536.59 & 10607 \\ 406.07 & 106.07 & 34142.14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3825cm \\ 0.0999cm \\ -0.0049rad \end{bmatrix}$$

4.6 프레임 해석 예제



Step4. 절점력과 모멘트구하기

매트릭스의 크기가 크기 때문에, 각 부재의 절점력을 구한 뒤 합치는 방법 사용

- **부재 1의 절점력과 모멘트** (Global Coordinate)

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -300 & -6 & 0 & -300 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & -10000 & 0 \\ 0 & -300 & 0 & 20000 & 300 & 0 & 10000 \\ -6 & 0 & 300 & 6 & 0 & 300 \\ 0 & -10000 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ -300 & 0 & 10000 & 300 & 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3825 \\ 0.0999 \\ -0.0049 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.84 \\ -999.2 \\ 66.16 \\ 0.84 \\ 999.2 \\ 17.56 \end{bmatrix}$$

- **부재 2의 절점력과 모멘트** (Global Coordinate)

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3536.59 & -3534.47 & -106.07 & -3536.59 & 3534.47 & -106.07 \\ -3534.47 & 3536.59 & -106.07 & 3534.47 & -3536.59 & -106.07 \\ -106.07 & -106.07 & 14142.14 & 106.07 & 106.07 & 7071.07 \\ -3536.59 & 3534.47 & 106.07 & 3536.59 & -3534.47 & 106.07 \\ 3534.47 & -3536.59 & 106.07 & -3534.47 & 3536.59 & 106.07 \\ -106.07 & -106.07 & 7071.07 & 106.07 & 106.07 & 14142.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3825 \\ 0.0999 \\ -0.0049 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -999.14 \\ 999.15 \\ 16.81 \\ 999.14 \\ -999.15 \\ -17.56 \end{bmatrix}$$

4.6 프레임 해석 예제

▪ 부재 1의 절점력과 모멘트

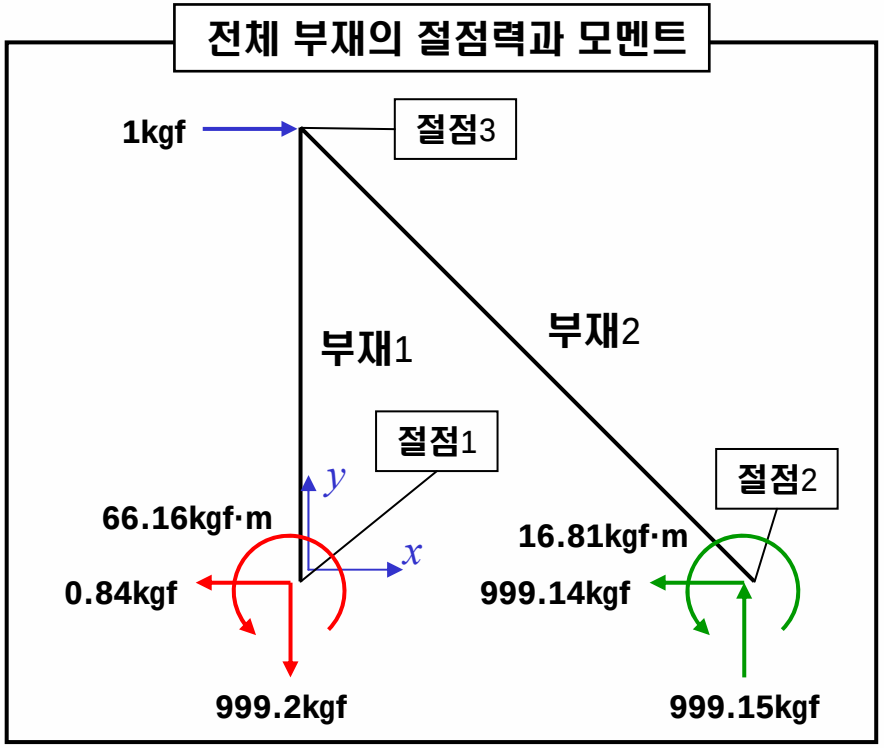
$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.84 \\ -999.2 \\ 66.16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84 \\ 999.2 \\ 17.56 \end{bmatrix}$$

▪ 부재 2의 절점력과 모멘트

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -999.14 \\ 999.15 \\ 16.81 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 999.14 \\ -999.15 \\ -17.56 \end{bmatrix}$$

▪ 전체 부재의 절점력과 모멘트

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.84kgf \\ -999.2kgf \\ 66.16kgf \cdot m \\ -999.14kgf \\ 999.15kgf \\ 16.81kgf \cdot m \\ 1000kgf \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



(소수점 자리수 반올림으로 인한 round off error)

Ch5. 격자 구조(Grillage) 해석

5.1 격자 구조(Grillage)의 정의

5.2 격자 구조의 강성 방정식 유도

5.3 2차원 Grillage의 강성 방정식

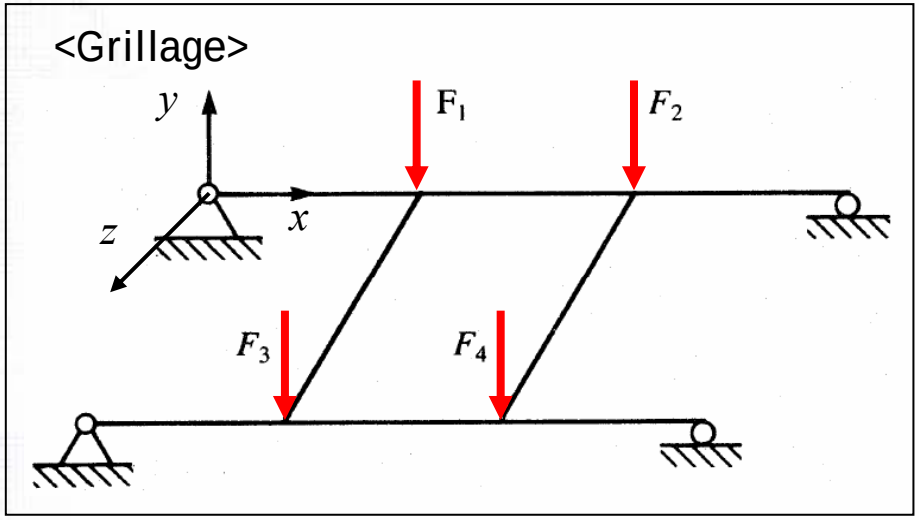
5.4 Grillage 예제

5.5 축의 변환

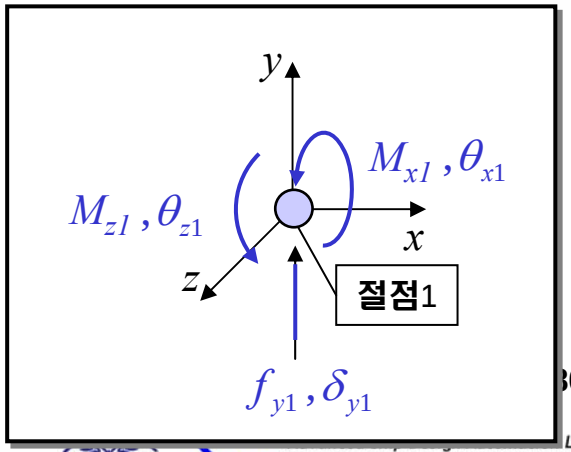
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

5.1 격자 구조(Grillage)의 정의

- **격자 구조** (Grillage) : **하중이 구조물의 평면에 수직하게 작용하는 구조**

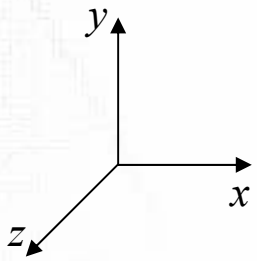


- **격자 구조물의 강성 방정식 유도를 위한 가정**
  1. **격자 구조물의 절점은 단단하게 고정되어 연결되어 있음**
  2. **각 절점에서는 x축, z축 방향의 비틂 (θ_x, θ_z)과 y축 방향의 수직 변위 (δ_y)만 존재**



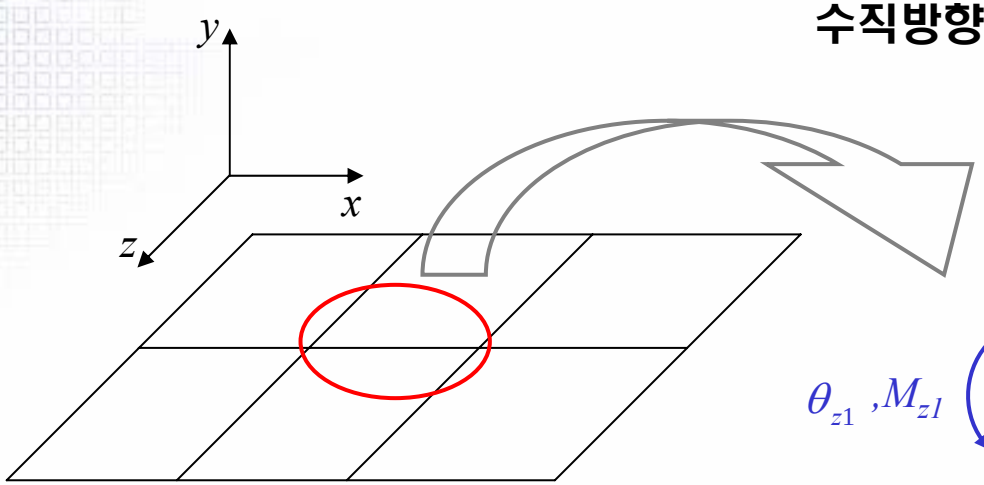
5.2 격자 구조 (Grillage) 의 강성 방정식 유도

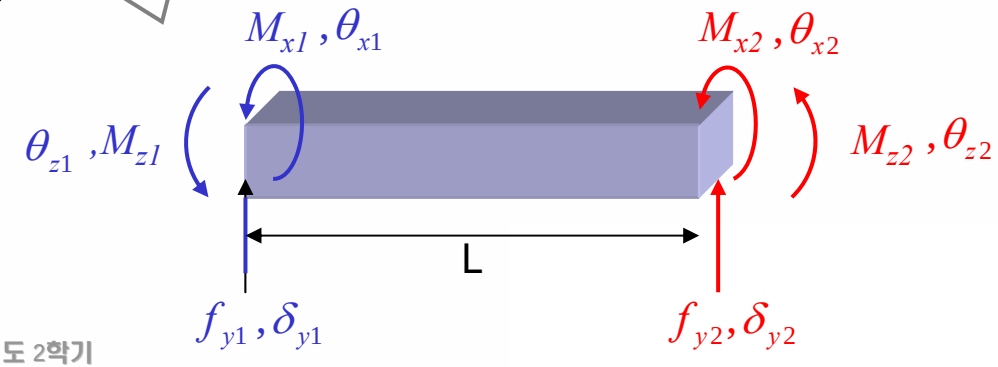
step1. Set Coordinate System



- 위쪽은 y로 하는 Coordinate System을 사용
- 이점 : 앞서 계산한 보의 강성 방정식을 좌표변환 없이 그대로 사용 가능

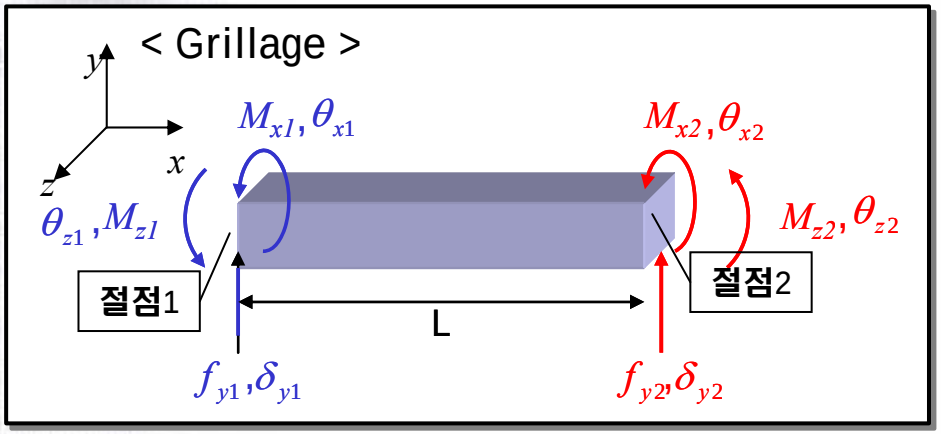
step2. 각 절점(node)에서의 변수 선언 : 각 절점에서는 x,z축에 대한 비틀림과 회전변위 수직방향(y축)의 힘과 변위가 존재

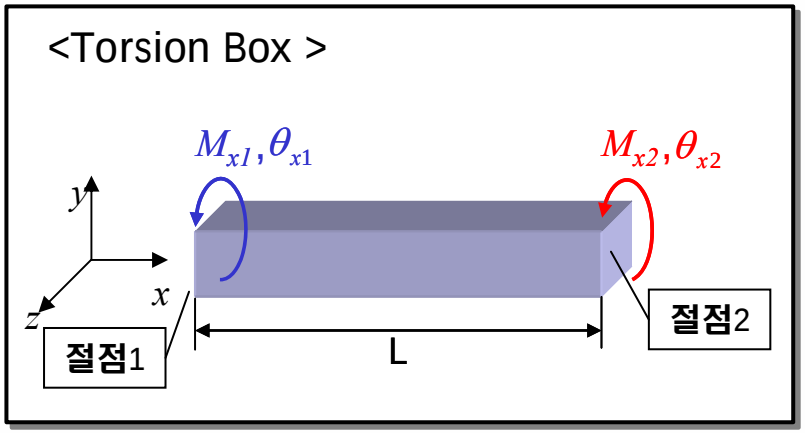


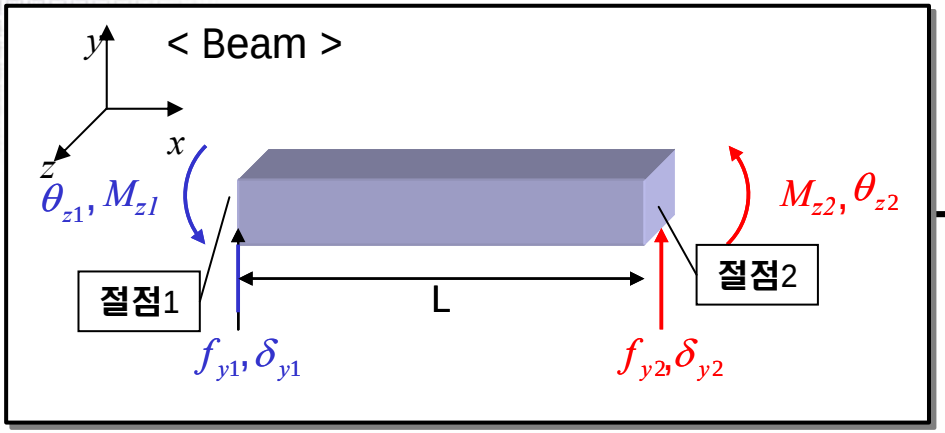


5.2 격자 구조(Grillage)의 강성 방정식 유도

step3. **격자 구조물의 분해**







☞ **보의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

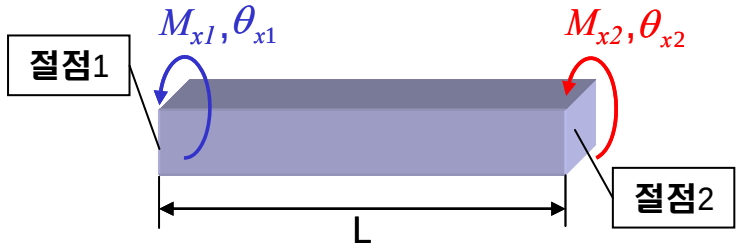
5.2 격자 구조(Grillage)의 강성 방정식 유도

▪ **비틂힘(Torque)과 회전 변위(θ_{x1})의 관계식**

$$\theta_{x1} = \frac{Tl}{GJ}$$

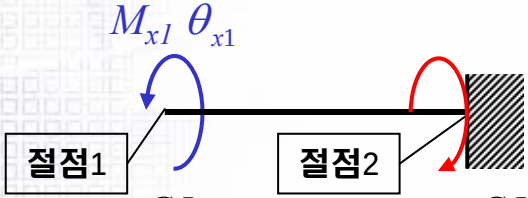
T : 비틂모멘트
l : 부재의 길이
G : 전단탄성계수
J : 극2차모멘트

<Torsion Box >



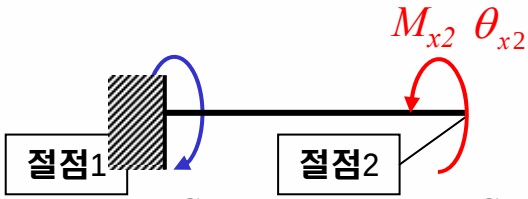
▪ **비틂에 의한 회전변위의 강성 방정식**

1) **절점 2가 고정일 때**($\theta_{x2}=0$)



$$M_{x1} = \frac{GJ}{l}\theta_{x1} \qquad M_{x2} = -\frac{GJ}{l}\theta_{x1}$$

2) **절점 1이 고정일 때**($\theta_{x1}=0$)



$$M_{x1} = -\frac{GJ}{l}\theta_{x2} \qquad M_{x2} = \frac{GJ}{l}\theta_{x2}$$

3) **절점이 모두 고정이 아닐 때,**

$$M_{x1} = \frac{GJ}{l}\theta_{x1} - \frac{GJ}{l}\theta_{x2} \qquad M_{x2} = -\frac{GJ}{l}\theta_{x1} + \frac{GJ}{l}\theta_{x2}$$

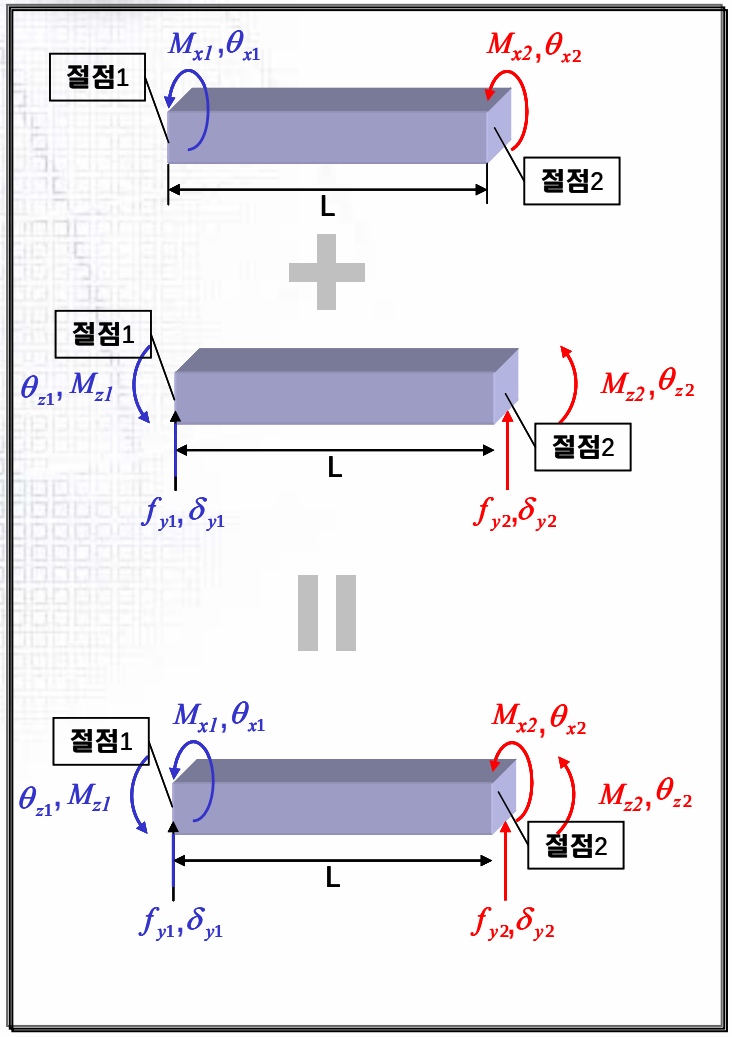
4) **비틂힘과 회전변위의 강성 방정식**

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}$$

→ **비틂에 대한 강성 매트릭스**

5.2 격자 구조(Grillage)의 강성 방정식 유도

Step4. 격자구조물 강성 방정식 완성



비틂

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}$$

보

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

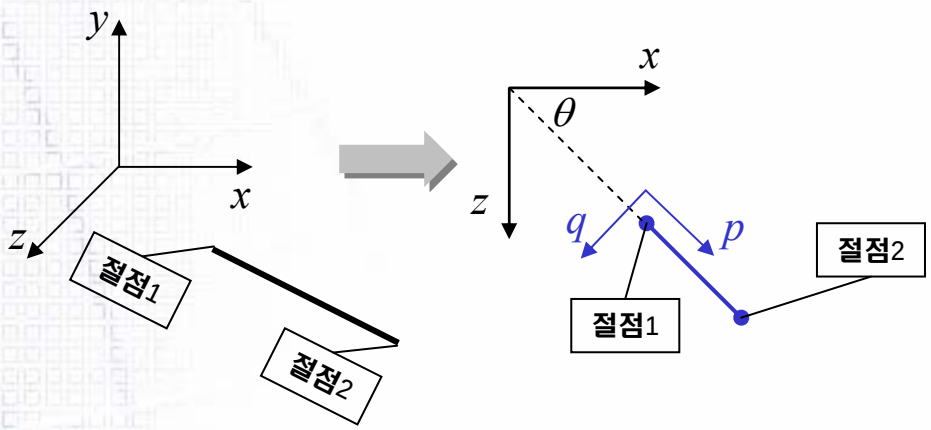
Grillage

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$①[\mathbf{F}_{pqr}] = [\mathbf{K}_{pqr}][\delta_{pqr}]$$

5.3 2차원 격자 구조(Grillage)의 강성 방정식

▪ 2차원 평면(xz평면)상의 임의의 위치에 놓인 Grillage의 회전변환 행렬



y축을 기준으로 회전하는 행렬을 곱함

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

② $[\delta_{pqr}] = [\mathbf{T}][\delta_{xyz}]$

$$\begin{bmatrix} \theta_{p1} \\ \delta_{q1} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{p2} \\ \delta_{q2} \\ \theta_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

③ $[f_{pqr}] = [\mathbf{T}][f_{xyz}]$

$$\begin{bmatrix} M_{p1} \\ f_{q1} \\ M_{r1} \\ M_{p2} \\ f_{q2} \\ M_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

NAOE/SNU
@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

5.3 2차원 격자 구조(Grillage)의 강성 방정식

▪ 2차원 평면(xz평면)상의 임의의 위치에 놓인 Grillage의 강성 방정식

① $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{K}_{pq}][\delta_{pq}]$

② $[\mathbf{F}_{pq}] = [\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}]$

③ $[\delta_{pq}] = [\mathbf{T}][\delta_{xy}]$

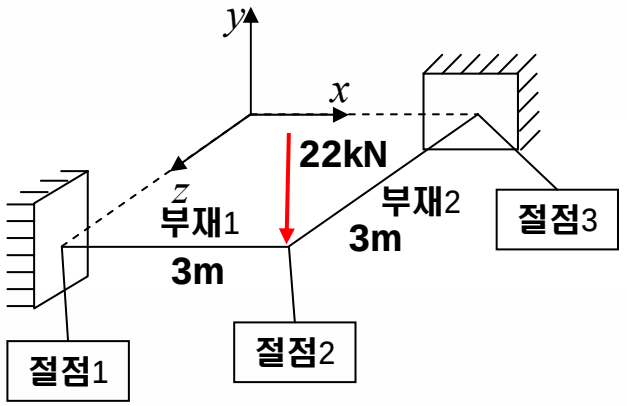
$$[\mathbf{T}][\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

$[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^{T}$ 을 곱함

$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{T}]^{T}[\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}] = [\mathbf{K}_{xy}][\delta_{xy}]$$

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

5.4 격자 구조(Grillage) 예제



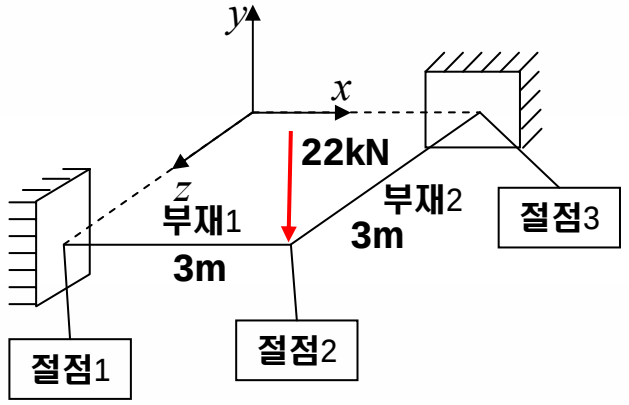
ex) 다음 격자 구조물의 각 절점에서의 변위와 반력을 구하시오
(단면 2차 모멘트 I=16.6X10^{-5}m^4, 탄성계수 E=210GPa)
전단탄성계수 G=84GPa , 극2차모멘트J=4.6X10^{-5}m^4)

Step1. 격자 구조의 해석을 위한 입력 데이터 정리

- 좌표축 설정 (그림에 표시)
- 격자 구조 부재의 삼각함수 값과 기타 데이터 ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 270$)

부재	cos θ	sin θ	길이 (m)	단면2차모멘트 (m^4)	탄성계수 (kN/m^2)	전단탄성계수 (kN/m^2)	극2차모멘트 (m^4)
1번	1	0	3	I=16.6X10^{-5}	E=210X10^6	G=84X10^6	J=4.6X10^{-5}
2번	0	-1	3				

5.4 격자 구조(Grillage) 예제



Step2. 프레임 구조물의 강성 매트릭스 구성

$$[\mathbf{F}_{xyz}] = [\mathbf{K}_{xyz}][\delta_{xyz}] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}_{pqr}][\mathbf{T}][\delta_{xyz}]$$

☞ 부재 1의 강성 방정식

부재	cos θ	sin θ	길이(m)	단면2차모멘트(m^4)	탄성계수(kN/m^2)	전단탄성계수(kN/m^2)	극2차모멘트(m^4)
1번	1	0	3	$I=16.6\times10^{-5}$	$E=210\times10^{6}$	$G=84\times10^{6}$	$J=4.6\times10^{-5}$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{pqr}] = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 \\ 0 & 1.55 & 2.32 & 0 & -1.55 & 2.32 \\ 0 & 2.32 & 4.65 & 0 & -2.32 & 2.33 \\ -0.128 & 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 \\ 0 & -1.55 & -2.32 & 0 & 1.55 & -2.32 \\ 0 & 2.32 & 2.33 & 0 & -2.32 & 4.65 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}_{xyz}] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}_{pqr}][\mathbf{T}][\delta_{xyz}]$$

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 \\ 0 & 1.55 & 2.32 & 0 & -1.55 & 2.32 \\ 0 & 2.32 & 4.65 & 0 & -2.32 & 2.33 \\ -0.128 & 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 \\ 0 & -1.55 & -2.32 & 0 & 1.55 & -2.32 \\ 0 & 2.32 & 2.33 & 0 & -2.32 & 4.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

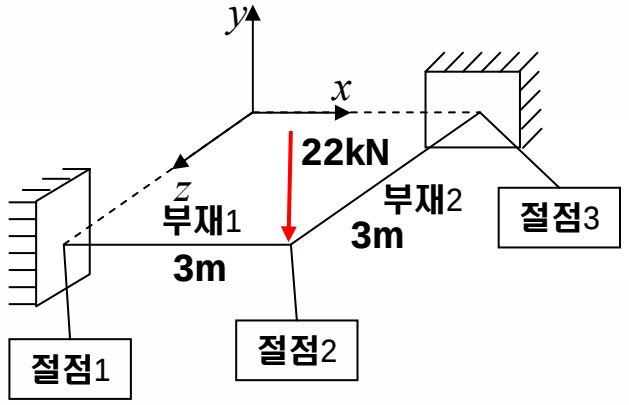
$$\frac{GJ}{L} = \frac{(84\times10^6)\cdot(4.6\times10^{-5})}{3} = 0.128\times10^4$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4\cdot(210\times10^6)(16.6\times10^{-5})}{3} = 4.65\times10^4$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6\cdot(210\times10^6)(16.6\times10^{-5})}{3^2} = 2.32\times10^4$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12\cdot(210\times10^6)(16.6\times10^{-5})}{3^3} = 1.55\times10^4$$

5.4 격자 구조(Grillage) 예제



Step2. 프레임 구조물의 강성 매트릭스 구성

$$[\mathbf{F}_{xyz}] = [\mathbf{K}_{xyz}][\delta_{xyz}] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}_{pqr}][\mathbf{T}][\delta_{xyz}]$$

☞ 부재 2의 강성 방정식

부재	cos θ	sin θ	길이(m)	단면2차모멘트(m^4)	탄성계수(kN/m^2)	전단탄성계수(kN/m^2)	극2차모멘트(m^4)
2번	0	-1	3	$I=16.6\times10^{-5}$	$E=210\times10^{6}$	$G=84\times10^{6}$	$J=4.6\times10^{-5}$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{pqr}] = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 \\ 0 & 1.55 & 2.32 & 0 & -1.55 & 2.32 \\ 0 & 2.32 & 4.65 & 0 & -2.32 & 2.33 \\ -0.128 & 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 \\ 0 & -1.55 & -2.32 & 0 & 1.55 & -2.32 \\ 0 & 2.32 & 2.33 & 0 & -2.32 & 4.65 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}_{xyz}] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{K}_{pqr}][\mathbf{T}][\delta_{xyz}]$$

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ M_{x3} \\ f_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.65 & 2.32 & 0 & 2.32 & -2.32 & 0 \\ 2.32 & 1.55 & 0 & 2.32 & -1.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 & -0.128 \\ 2.32 & 2.32 & 0 & 4.65 & -2.32 & 0 \\ -2.32 & -1.55 & 0 & -2.32 & 1.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{GJ}{L} = \frac{(84\times10^6)\cdot(4.6\times10^{-5})}{3} = 0.128\times10^4$$

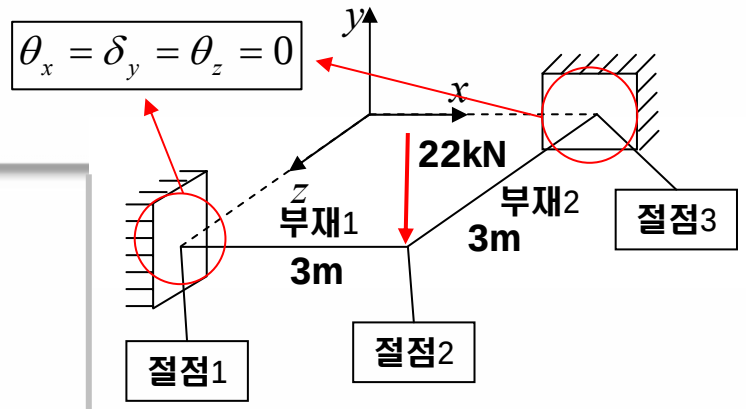
$$\frac{4EI}{L} = \frac{4\cdot(210\times10^6)(16.6\times10^{-5})}{3} = 4.65\times10^4$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6\cdot(210\times10^6)(16.6\times10^{-5})}{3^2} = 2.32\times10^4$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12\cdot(210\times10^6)(16.6\times10^{-5})}{3^3} = 1.55\times10^4$$

NAOE/SNU
@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr
서울대학교 조선해양공학과 학부 3학년 교과목 "전산설박설계", 2006학년도 2학기

5.4 격자 구조(Grillage) 예제



Step3. **변위 구하기**

- **절점에서의 변위**(known/unknown Variable **구분**)
  - ✓ known Variables : $\theta_{x1}, \delta_{y1}, \theta_{z1}, \theta_{x3}, \delta_{y3}, \theta_{z3}(=0)$
  - ✓ unknown Variables : $\theta_{x2}, \delta_{y2}, \theta_{z2}$
- **절점에서의 힘**(known/unknown Variable **구분**)
  - ✓ known Variables : $M_{x2}(=0), f_{y2}(=-22\text{kN}), M_{z2}(=0)$
  - ✓ unknown Variables : $M_{x1}, f_{y1}, M_{z1}, M_{x3}, f_{y3}, M_{z3}$

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 \\ 0 & 1.55 & 2.32 & 0 & -1.55 & 2.32 \\ 0 & 2.32 & 4.65 & 0 & -2.32 & 2.33 \\ -0.128 & 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 \\ 0 & -1.55 & -2.32 & 0 & 1.55 & -2.32 \\ 0 & 2.32 & 2.33 & 0 & -2.32 & 4.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

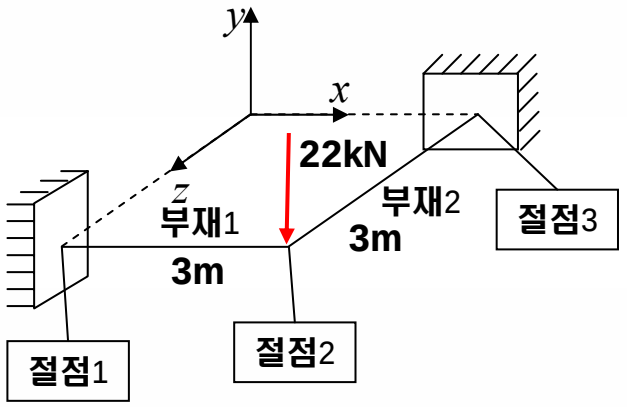
$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ M_{x3} \\ f_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.65 & 2.32 & 0 & 2.32 & -2.32 & 0 \\ 2.32 & 1.55 & 0 & 2.32 & -1.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 & -0.128 \\ 2.32 & 2.32 & 0 & 4.65 & -2.32 & 0 \\ -2.32 & -1.55 & 0 & -2.32 & 1.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

파란색 부분 중첩

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{x2}=0 \\ f_{y2}=22kN \\ M_2=0 \end{bmatrix}}_{\text{known}} = 10^4 \begin{bmatrix} 4.778 & 2.32 & 0 \\ 2.32 & 3.10 & -2.32 \\ 0 & -2.32 & 4.778 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}}_{\text{unknown}}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10^4} \begin{bmatrix} 4.778 & 2.32 & 0 \\ 2.32 & 3.10 & -2.32 \\ 0 & -2.32 & 4.778 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.126\times10^{-2}\,rad \\ -0.259\times10^{-2}\,cm \\ -0.126\times10^{-2}\,rad \end{bmatrix}$$

5.4 격자 구조(Grillage) 예제



Step4. **절점력과 모멘트구하기**

매트릭스의 크기가 크기 때문에, 각 부재의 절점력을 구한 뒤 합치는 방법 사용

- **부재 1의 절점력과 모멘트** (Global Coordinate)

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 \\ 0 & 1.55 & 2.32 & 0 & -1.55 & 2.32 \\ 0 & 2.32 & 4.65 & 0 & -2.32 & 2.33 \\ -0.128 & 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 \\ 0 & -1.55 & -2.32 & 0 & 1.55 & -2.32 \\ 0 & 2.32 & 2.33 & 0 & -2.32 & 4.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.126\times10^{-2}\,rad \\ -0.259\times10^{-2}\,cm \\ -0.126\times10^{-2}\,rad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.65kN\cdot m \\ 11kN \\ 31kN\cdot m \\ 1.65kN\cdot m \\ -11kN \\ 1.65kN\cdot m \end{bmatrix}$$

- **부재 2의 절점력과 모멘트** (Global Coordinate)

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ M_{x3} \\ f_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.65 & 2.32 & 0 & 2.32 & -2.32 & 0 \\ 2.32 & 1.55 & 0 & 2.32 & -1.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0.128 & 0 & 0 & -0.128 \\ 2.32 & 2.32 & 0 & 4.65 & -2.32 & 0 \\ -2.32 & -1.55 & 0 & -2.32 & 1.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.128 & 0 & 0 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.126\times10^{-2}\,rad \\ -0.259\times10^{-2}\,cm \\ -0.126\times10^{-2}\,rad \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.65kN\cdot m \\ -11kN \\ -1.65kN\cdot m \\ -31kN\cdot m \\ 11kN \\ 1.65kN\cdot m \end{bmatrix}$$

5.4 격자 구조(Grillage) 예제

▪ 부재 1의 절점력과 모멘트

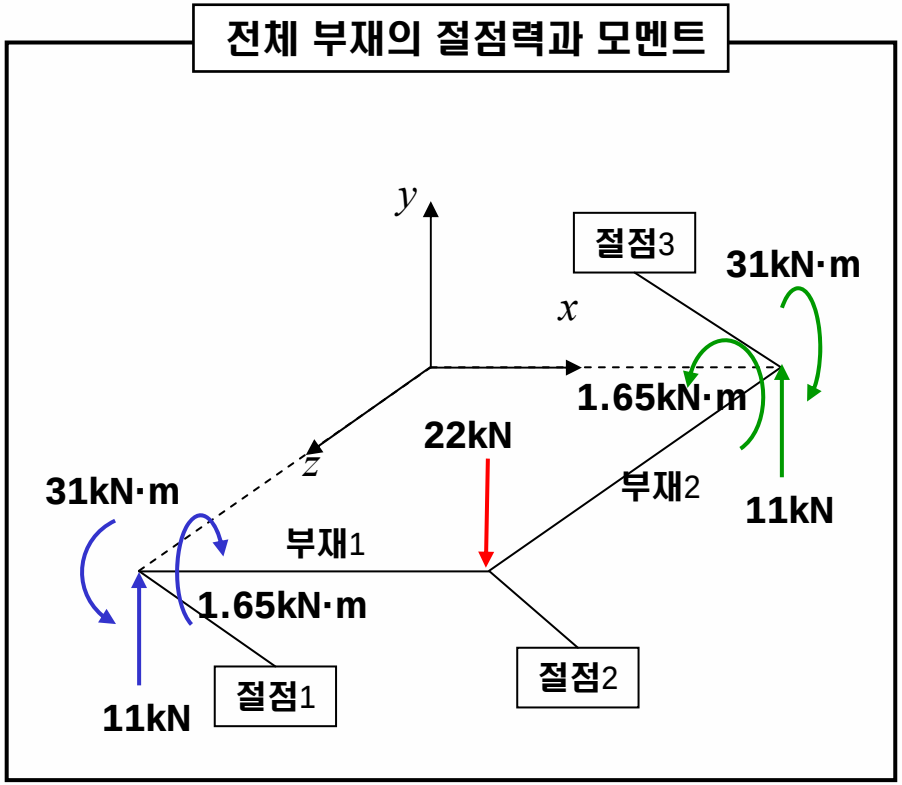
$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.65kN \cdot m \\ 11kN \\ 31kN \cdot m \\ 1.65kN \cdot m \\ -11kN \\ 1.65kN \cdot m \end{bmatrix}$$

▪ 부재 2의 절점력과 모멘트

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ M_{x3} \\ f_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.65kN \cdot m \\ -11kN \\ -1.65kN \cdot m \\ -31kN \cdot m \\ 11kN \\ 1.65kN \cdot m \end{bmatrix}$$

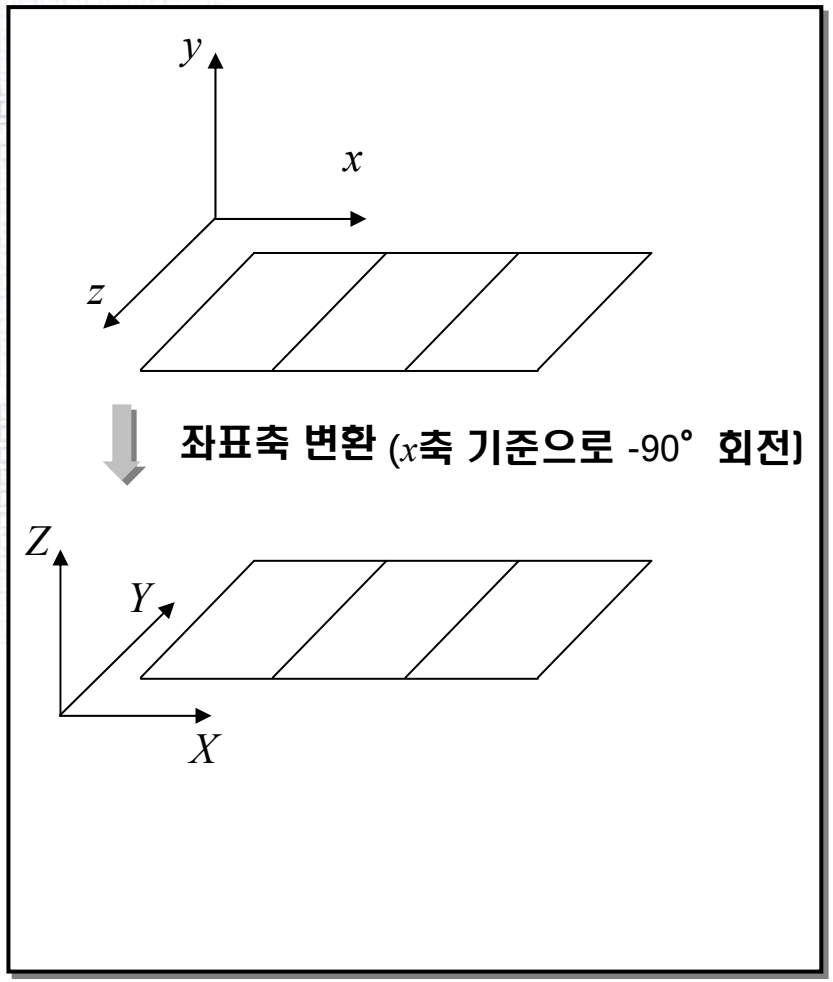
▪ 전체 부재의 절점력과 모멘트

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ M_{x3} \\ f_{y3} \\ M_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.65kN \cdot m \\ 11kN \\ 31kN \cdot m \\ 0 \\ -22kN \\ 0 \\ -31kN \cdot m \\ 11kN \\ 1.65kN \cdot m \end{bmatrix}$$



5.5 축의 변환

▪ y축을 위로 택한 좌표축의 문제점
: 일반적으로 x를 길이 방향, y를 폭방향, z를 높이 방향으로 인지



▪ Grillage의 강성 방정식 (y축이 위를 향하는 좌표계)

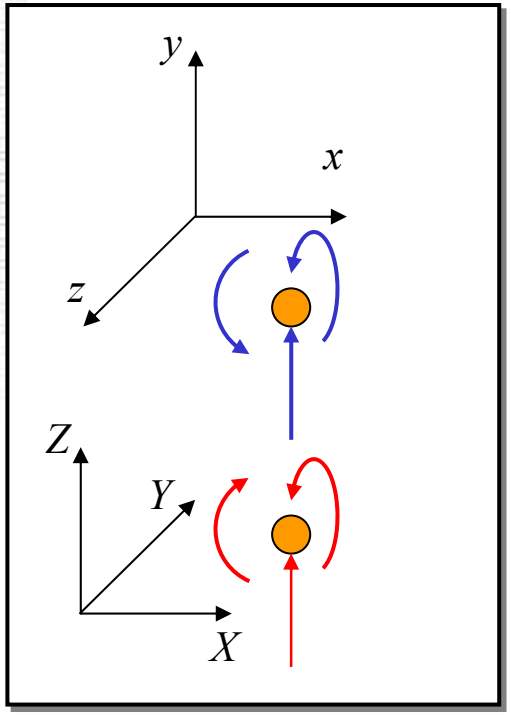
$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

▪ 양변에 x축 기준으로 -90° 회전하는 행렬을 곱함

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 90 & -\sin 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin 90 & \cos 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

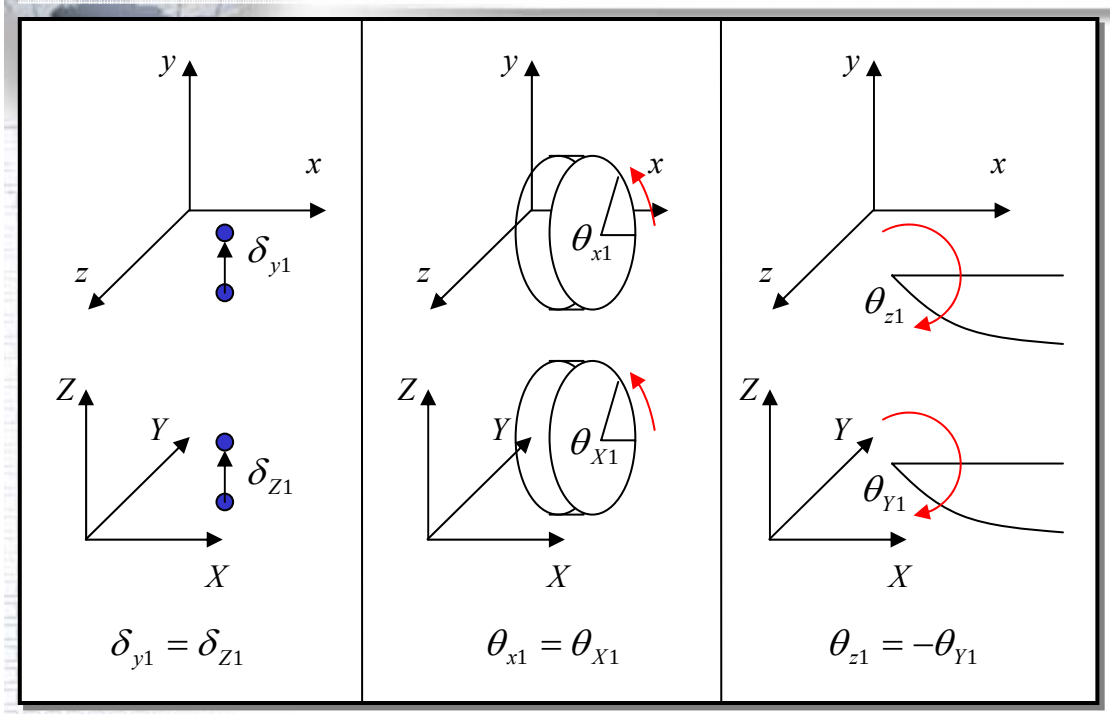
5.5 축의 변환

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x1} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} M_{X1} \\ M_{Y1} \\ f_{Z1} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ f_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x1} \\ -M_{z1} \\ f_{y1} \\ M_{x2} \\ -M_{z2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

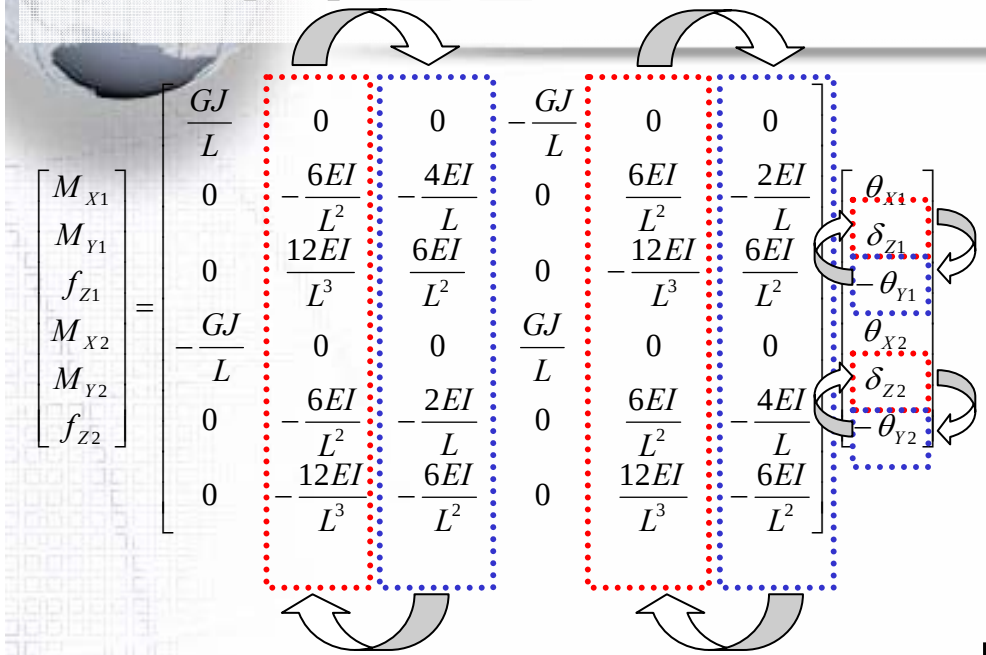
5.5 축의 변환



$$\begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{X1} \\ \delta_{Z1} \\ -\theta_{Y1} \\ \theta_{X2} \\ \delta_{Z2} \\ -\theta_{Y2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{X1} \\ M_{Y1} \\ f_{Z1} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ f_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{X1} \\ \delta_{Z1} \\ -\theta_{Y1} \\ \theta_{X2} \\ \delta_{Z2} \\ -\theta_{Y2} \end{bmatrix}$$

5.5 축의 변환



$$\begin{bmatrix} M_{X1} \\ M_{Y1} \\ f_{Z1} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ f_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{X1} \\ \delta_{Z1} \\ -\theta_{Y1} \\ \theta_{X2} \\ \delta_{Z2} \\ -\theta_{Y2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{X1} \\ M_{Y1} \\ f_{Z1} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ f_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{X1} \\ -\theta_{Y1} \\ \delta_{Z1} \\ \theta_{X2} \\ -\theta_{Y2} \\ \delta_{Z2} \end{bmatrix}$$

θ_Y의 (-)부호를 없애줌

$$\begin{bmatrix} M_{X1} \\ M_{Y1} \\ f_{Z1} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ f_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{X1} \\ \theta_{Y1} \\ \delta_{Z1} \\ \theta_{X2} \\ \theta_{Y2} \\ \delta_{Z2} \end{bmatrix}$$

새로운 축에 대한 Grillage 강성 방정식

$$\begin{bmatrix} M_{X1} \\ M_{Y1} \\ f_{Z1} \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ f_{Z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{X1} \\ \theta_{Y1} \\ \delta_{Z1} \\ \theta_{X2} \\ \theta_{Y2} \\ \delta_{Z2} \end{bmatrix}$$

Ch6. 변위법과 응력법

6.1 구조물의 해석 방법

6.2 정정보에서 힘과 모멘트 평형식

6.3 부정정보에서 힘과 모멘트 평형식

6.4 구조물의 해석 방법

6.5 정정 구조물 해석 (응력법)

6.6 정정 구조물 해석 (변위법)

6.7 부정정 구조물 해석 (응력법)

6.8 응력법 요약

6.9 부정정 구조물 해석 (변위법)

6.10 변위법 요약

6.11 응력법과 변위법의 비교

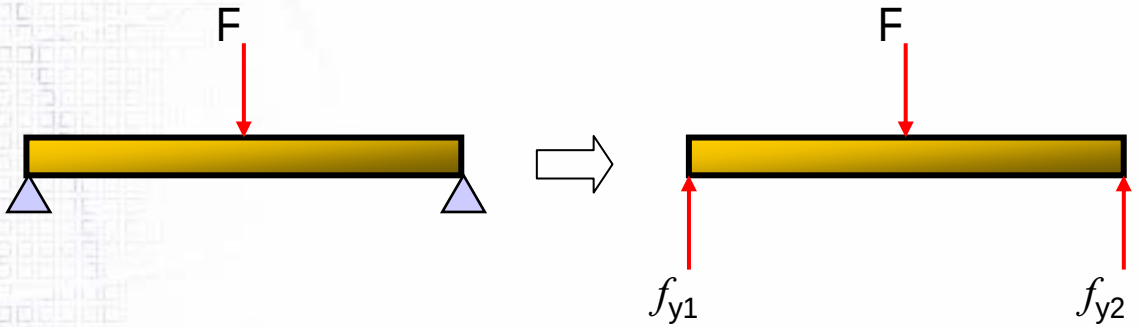
6.12 변위법의 장단점

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

6.1 구조물의 종류

- **구조물의 종류**

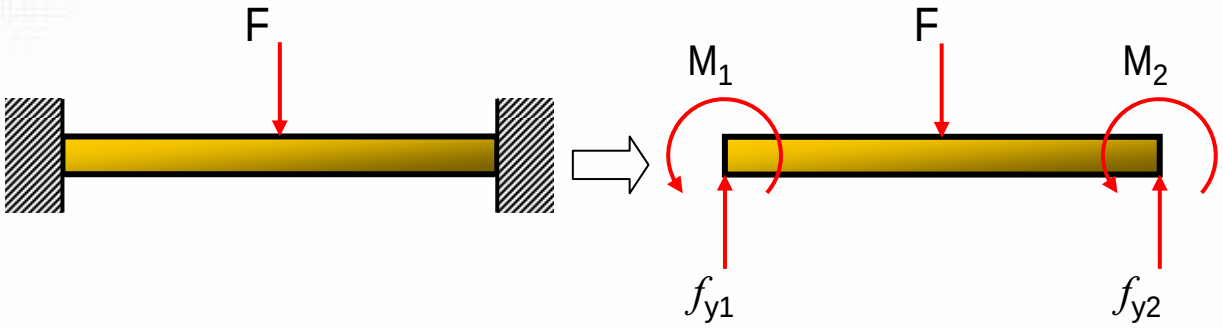
1. **정정 구조물 : 구조물에 존재하는 미지의 반력과 평형식의 개수가 같기 때문에 평형 방정식으로 부터 반력을 구할 수 있는 구조물**



2개의 미지수 (f_{y1}, f_{y2})

2개의 평형식 $\left(\sum f_y = 0, \sum M_2 = 0\right)$

2. **부정정 구조물 : 구조물에 존재하는 미지의 반력보다 평형식의 개수가 적기 때문에 구속 조건을 부여하여 식의 개수를 늘려 반력을 구해야 하는 구조물**



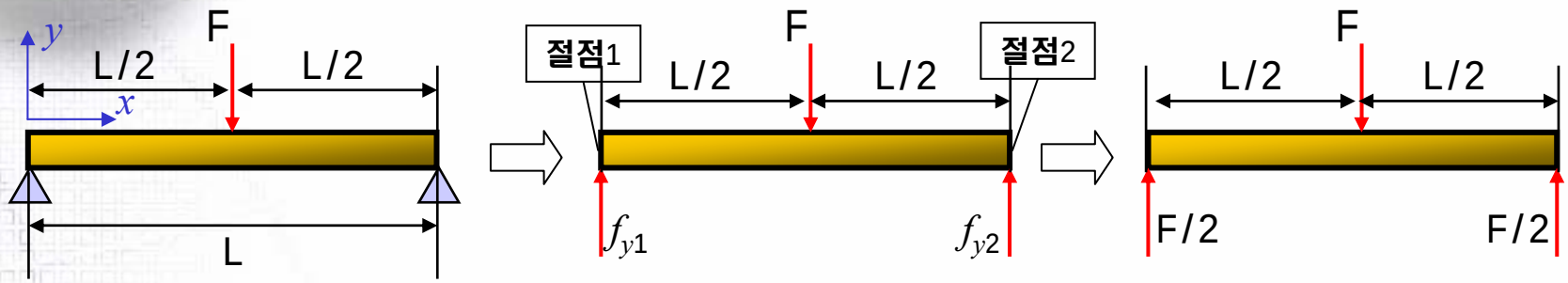
4개의 미지수 $(M_1, F_{y1}, M_2, F_{y2})$

2개의 평형식

We need 2 more Equations

6.2 정정보에서 힘과 모멘트 평형식

※처짐각 : x방향으로 dx만큼 변할 때 이에 따른 y방향으로의 변화량(dy) $\theta = \frac{dy}{dx}$



▪ 반력 구하기

$$\sum F_y = 0 \;:\; -F + f_{y1} + f_{y2} = 0 \Rightarrow \boxed{F = f_{y1} + f_{y2}} \;①$$

$$\sum M_{\text{절점1}} = 0 \;:\; \boxed{f_{y1} \times 0 - \frac{L}{2}F + Lf_{y2} = 0} \;②$$

→ ①과 ②의 두 식을 얻음

Q) 절점 2에서의 모멘트 식이 하나 더 있으므로 식이 더 많은 것 아닌가요?

A) 절점 2에서의 모멘트를 구해보면,

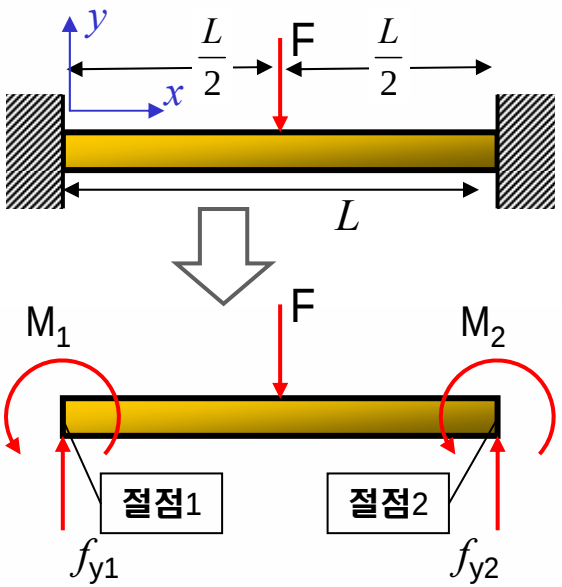
$$\sum M_{\text{절점2}} = 0 : \boxed{-Lf_{y1} + \frac{L}{2}F + 0 \times f_{y2} = 0} \;③$$

②에서 ③을 빼면, ①을 얻는다.
(하나는 Redundant한 식)

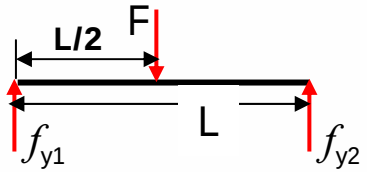
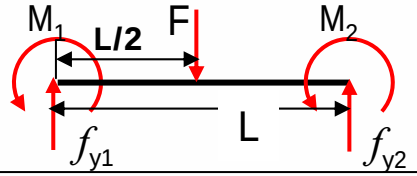
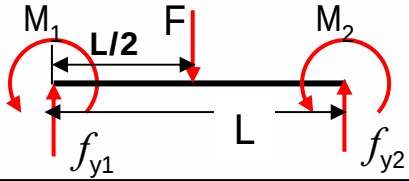
$$(-\frac{L}{2}F + Lf_{y1}) - (\frac{L}{2}F - Lf_{y2}) = -FL + L(f_{y1} + f_{y2}) = 0$$

$$\therefore F = f_{y1} + f_{y2}$$

6.3 부정정보에서 힘과 모멘트 평형식(1)



각 절점에서 힘과 모멘트 평형식

$\sum f_y = 0$	$f_{y1} - F + f_{y2} = 0$	
$\sum M_{\text{절점1}} = 0$	$M_1 + 0 \times f_{y1} - \frac{FL}{2} + f_{y2}L + M_2 = 0$	
$\sum M_{\text{절점2}} = 0$	$M_2 + 0 \times f_{y2} + \frac{FL}{2} - f_{y1}L + M_1 = 0$	

※ 모멘트 평형으로부터 구한 두식을 빼주면,

$$-FL + (f_{y1} + f_{y2})L = 0$$

양변을 L로 나누어주면,

$$-F + f_{y1} + f_{y2} = 0$$

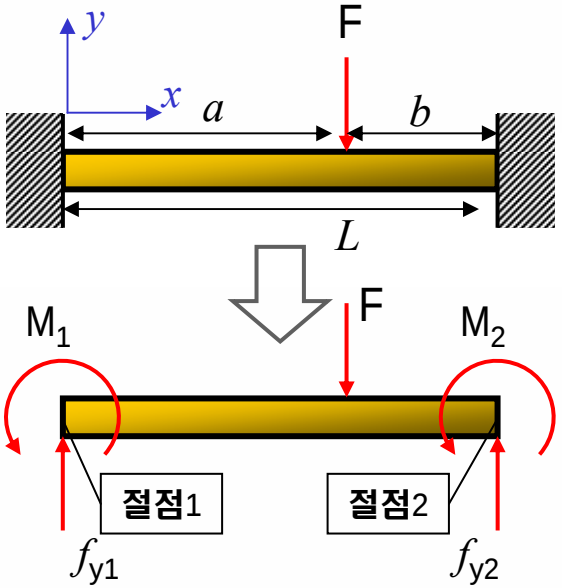
즉, 세 평형식 중 하나의 식은 다른 두개의 식으로 표현된 것
(힘의 평형식으로부터 두 개의 식을 얻음)

→ 미지수가 4개이므로 2개의 조건이 더 필요함

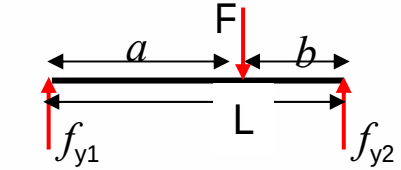
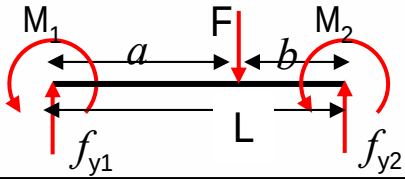
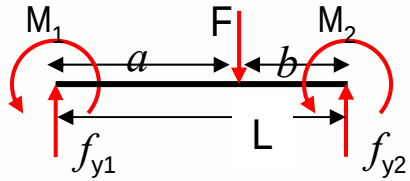
↓

양끝 경계(절점1,2)에서의 처짐각이 0임을 이용하여 두 개의 식을 구함

6.3 부정정보에서 힘과 모멘트 평형식(2)



▪ 각 절점에서 힘과 모멘트 평형식

$\sum f_y = 0$	$f_{y1} - F + f_{y2} = 0$	
$\sum M_{\text{절점1}} = 0$	$M_1 + f_{y1} \times 0 - Fa + f_{y2}L + M_2 = 0$	
$\sum M_{\text{절점2}} = 0$	$M_2 + f_{y2} \times 0 + Fb - f_{y1}L + M_1 = 0$	

※ 모멘트 평형식으로부터 구한 두식을 빼주면,

$$-F(a+b) + (f_{y1} + f_{y2})L = 0$$

$a+b=L$ 이므로, 대입한 후 양변을 L로 나누어주면,

$$-F + f_{y1} + f_{y2} = 0$$

즉, 세 평형식 중 하나의 식은 다른 두개의 식으로 표현된 것
(힘의 평형식으로부터 두 개의 식을 얻음)

→ 미지수가 4개이므로 2개의 조건이 더 필요함

↓

양끝 경계 (절점1,2) 에서의 처짐각이 0임을 이용하여 두 개의 식을 구함

6.4 구조물의 해석 방법

- **구조물의 해석을 위한 기본 조건**
  1. **힘의 평형 조건 : 외력에 대해 구조물의 내력(반력,모멘트)이 평형을 이루어야 함**
  2. **변위의 일치 조건 : 접합 지점은 항상 붙어있어야 함**
  3. **재료 역학적인 특성 : 하중과 변위와의 관계(ex. Hooke의 법칙)**

  ☞ **정정 구조물의 경우 조건 1만으로 문제 해결**

  ☞ **부정정 구조물은 조건 1과 2를 사용함**

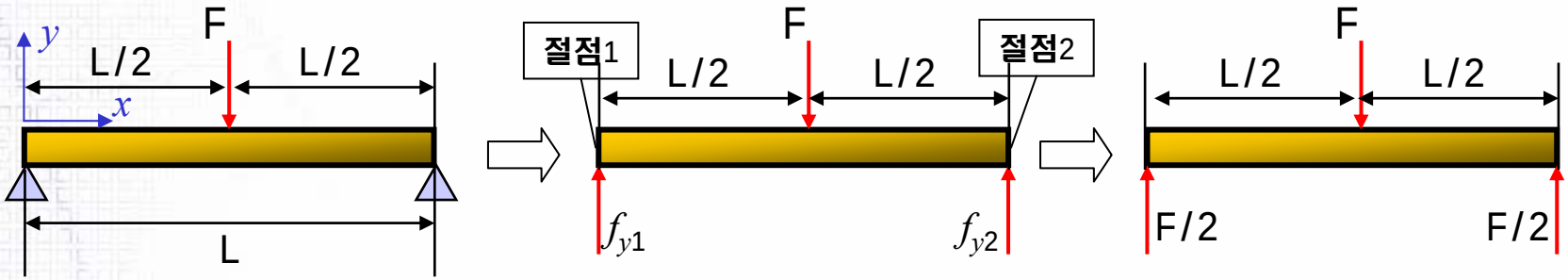
- **구조물의 해석 방법**
  1. **응력법 : 각 절점에서 힘의 평형조건을 만족시킨 다음 변위의 일치조건을 만족시키도록 함**
  2. **변위법 : 변위의 일치 조건을 만족시킨 다음 힘의 평형 조건을 이루도록 함**

※ 응력법과 변위법 모두 정정 구조물과 부정정 구조물을 해석하는데 사용 가능

6.5 정정 구조물 해석 (응력법)

※처짐각 : x방향으로 dx만큼 변할 때 이에 따른 y방향으로의 변화량(dy) $\theta = \frac{dy}{dx}$

▪ 길이가 L인 단순지지보의 끝단에서 반력과 처짐각을 구하고, 가운데 지점 (x=L/2)인 지점에서의 처짐을 구하시오.



1) 반력 구하기

$$\sum F_y = 0 \;:\; -F + f_{y1} + f_{y2} = 0 \Rightarrow \boxed{F = f_{y1} + f_{y2}} \quad ①$$

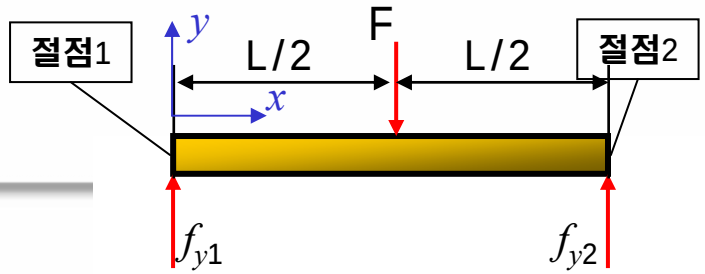
$$\sum M_{\text{절점1}} = 0 \;:\; \boxed{f_{y1} \times 0 - \frac{L}{2}F + Lf_{y2} = 0} \quad ②$$

①②를 F에 관해 연립하여 풀면,

②를 정리 : $f_{y2} = \frac{F}{2}$

①에 대입 : $f_{y1} = \frac{F}{2}$

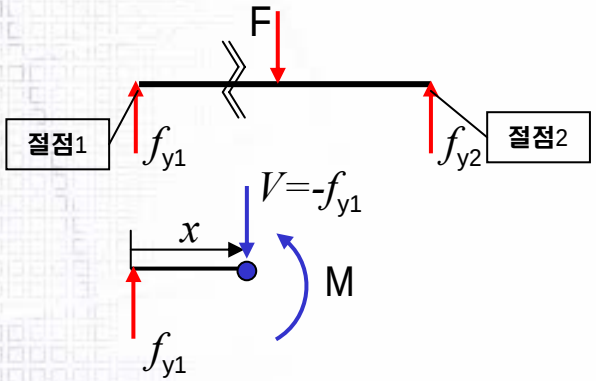
6.5 정정 구조물 해석 (응력법)



2) 처짐각 구하기

(1) x만큼 떨어진 지점에서의 모멘트

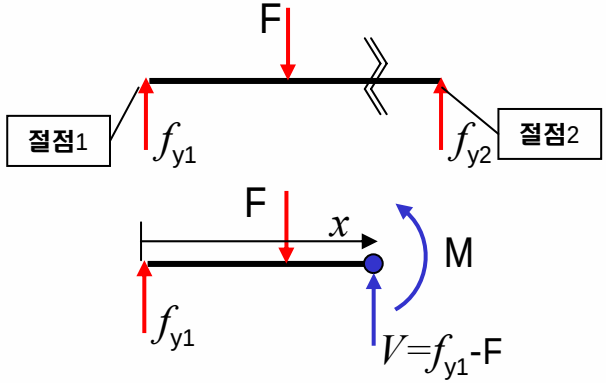
a) $0 \le x \le \frac{L}{2}$ 일 때,



$$\Rightarrow \quad -f_{y1}x + M = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = f_{y1}x$$

b) $\frac{L}{2} \le x \le L$ 일 때,

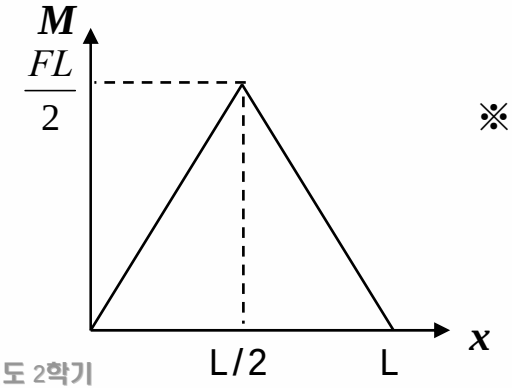


$$\Rightarrow \quad -f_{y1}x + F(x - \frac{L}{2}) + M = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = f_{y1}x - F(x - \frac{L}{2}) = (f_{y1} - F)x + \frac{FL}{2}$$

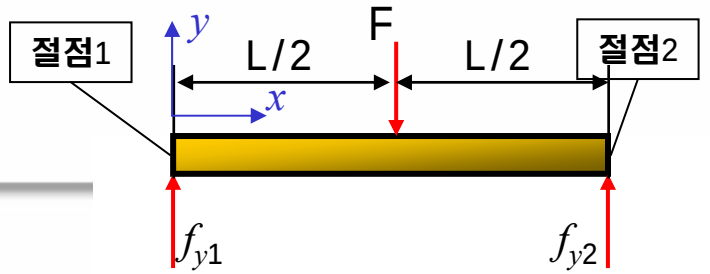
c) $f_{y1} = \frac{F}{2}$, $f_{y2} = \frac{F}{2}$ 이므로, 대입하면

$$M = \begin{cases} \frac{F}{2}x & (0 \le x \le L/2) \\ \frac{F}{2}(L-x) & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$



※ [+]모멘트 발생시 오목하게 변형

6.5 정정 구조물 해석 (응력법)



(1) x만큼 떨어진 지점에서의 모멘트

$$M = \begin{cases} \frac{F}{2}x & (0 \le x \le \frac{L}{2}) \\ \frac{F}{2}(L-x) & (\frac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$$

(2) 보의 처짐 방정식 (2계 미분방정식)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \quad \text{(Ch1.2 참고)}$$

(3) 위 식을 한번 적분하면,

$$EI\frac{dy}{dx} = \int M\,dx = \begin{cases} \frac{F}{4}x^2 + C_1 & (0 \le x \le \frac{L}{2}) \\ -\frac{F}{4}x^2 + \frac{FL}{2}x + D_1 & (\frac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$$

(4) 다시 한번 적분하면,

$$EIy = \begin{cases} \frac{F}{12}x^3 + C_1x + C_2 & (0 \le x \le \frac{L}{2}) \\ -\frac{F}{12}x^3 + \frac{FL}{4}x^2 + D_1x + D_2 & (\frac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$$

(5) 경계조건을 대입하여 C_1, C_2, D_1, D_2 를 구함

① $y_{x=0} = 0$, ② $y_{x=L} = 0$

③ $y_{x=L/2} = y_{x=L/2}$ ④ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L/2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L/2}$

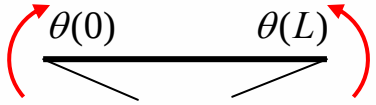
$$\Rightarrow C_1 = -\frac{FL^2}{16},\ C_2 = 0,\ D_1 = -\frac{3FL^2}{16},\ D_2 = \frac{FL^2}{48}$$

(6) 경계점에서의 처짐각 ($\theta = \frac{dy}{dx}$)

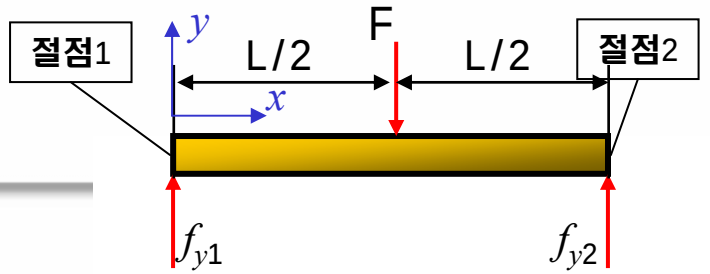
$$\theta = \frac{1}{EI}\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{F}{4EI}x^2 - \frac{FL^2}{16EI} & (0 \le x \le \frac{L}{2}) \\ -\frac{F}{4EI}x^2 + \frac{FL}{2EI}x - \frac{3FL^2}{16EI} & (\frac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$$

$$\theta(x=0) = -\frac{FL^2}{16EI}$$

$$\theta(x=L) = \frac{FL^2}{16EI}$$



6.5 정정 구조물 해석 (응력법)

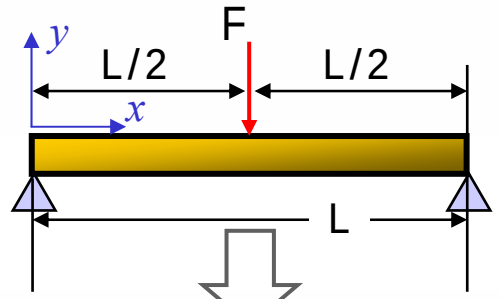


(7) x=L/2인 지점에서의 처짐

$$EIy = \begin{cases} \frac{F}{12}x^3 - \frac{FL^2}{16}x & (0 \le x \le \frac{L}{2}) \\ -\frac{F}{12}x^3 + \frac{FL}{4}x^2 - \frac{3FL^2}{16}x + \frac{FL^2}{48} & (\frac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$$

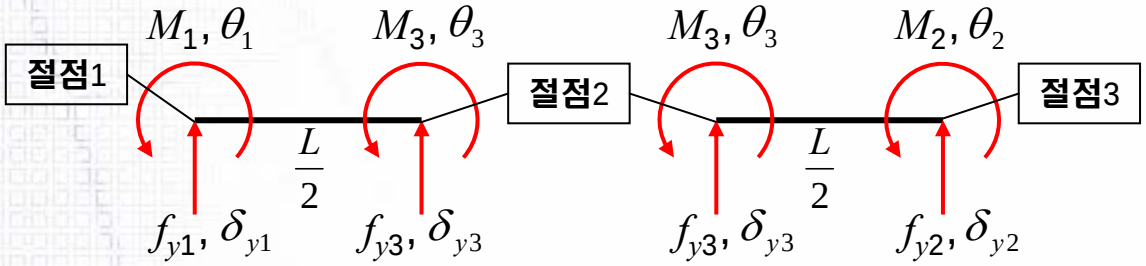
$$y_{x=L/2} = \frac{FL^3}{48EI}$$

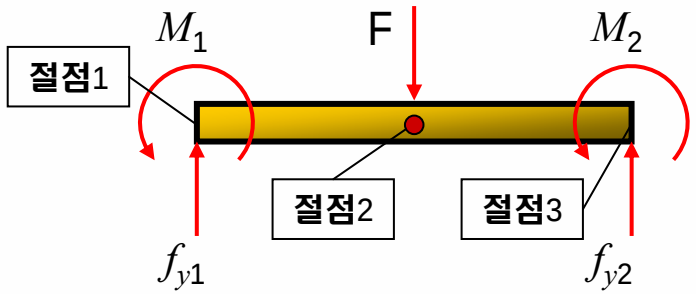
6.6 정정 구조물 해석 (변위법)



▪ 길이 L인 단순 지지보의 가운데에 힘 F가 작용할 때, 반력과 모멘트, 중앙에서의 처짐을 변위법으로 구하시오.

Step1. 보 요소로 나누고 절점에서의 변위를 정의





Step2. 보의 강성 매트릭스 구성

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

중첩 →

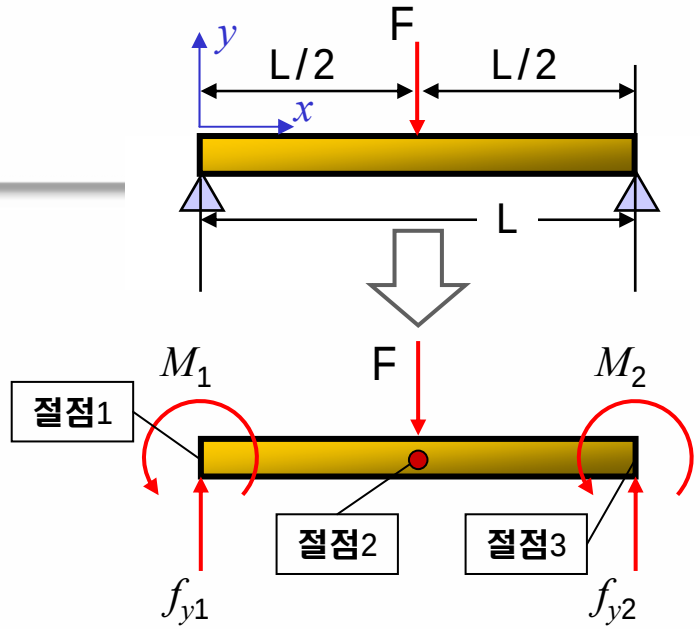
$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & 0 & \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & & \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ & & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ 0 & & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

스프링 상수

힘,모멘트 ← $\mathbf{F} = [\mathbf{K}]\mathbf{u}$

변위벡터(처짐,처짐각)

6.6 정정 구조물 해석 (변위법)



Step3. 경계조건 사용(변위의 일치 조건)

처짐=0: $\delta_{y1}=0,\ \delta_{y2}=0$

모멘트=0: $M_1=0, M_2=0$

Step4. 변위 벡터에 처짐과 처짐각을 대입하고 주어진 힘을 F에 대입하여 $\theta_1, \delta_{y2}, \theta_2, \theta_3$를 구함

given : $f_{y3}=-F,\ M_3=0$

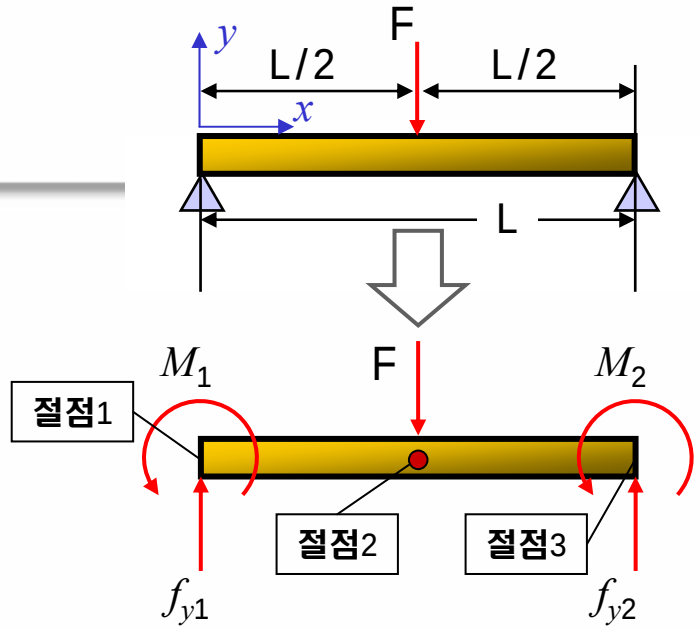
find : δ_{y3}, θ_3

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & 0 & \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & & \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ 0 & & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ & & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1}=0 \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3}=0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1=0 \\ f_{y2}=-F \\ M_2=0 \\ M_3=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 \\ -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & \frac{2EI}{L/2} \\ 0 & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

6.6 정정 구조물 해석 (변위법)

$$\begin{bmatrix} M_1 = 0 \\ f_{y2} = -F \\ M_2 = 0 \\ M_3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 \\ -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & \frac{2EI}{L/2} \\ 0 & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$



4개의 식, 4개의 미지수

$$0 = \frac{4EI}{L/2}\theta_1 - \frac{6EI}{(L/2)^2}\delta_{y2} + \frac{2EI}{L/2}\theta_2 + 0\times\theta_3$$

$$-F = -\frac{6EI}{(L/2)^2}\theta_1 + \frac{24EI}{(L/2)^3}\delta_{y2} + 0\times\theta_2 + \frac{6EI}{(L/2)^2}\theta_3$$

$$0 = \frac{2EI}{L/2}\theta_1 + 0\times\delta_{y2} + \frac{8EI}{L/2}\theta_2 + \frac{2EI}{L/2}\theta_3$$

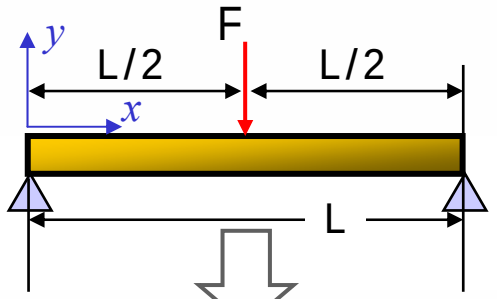
$$0 = 0\times\theta_1 + \frac{6EI}{(L/2)^2}\delta_{y2} + \frac{2EI}{L/2}\theta_2 + \frac{4EI}{L/2}\theta_3$$

연립방정식 풀이

$$\theta_1 = -\frac{FL^2}{16EI},\ \theta_3 = \frac{FL^2}{16EI}$$

$$\delta_{y2} = -\frac{FL^2}{48EI},\ \theta_2 = 0$$

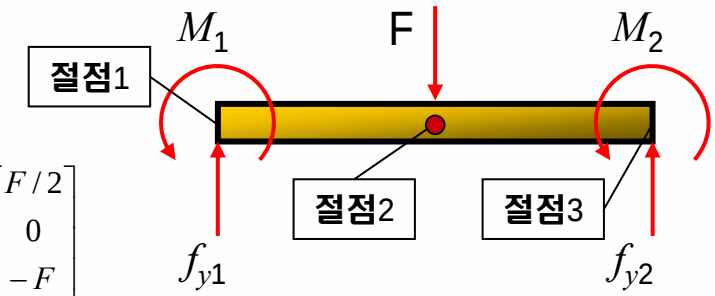
6.6 정정 구조물 해석 (변위법)



Step5. 구한 변위(처짐,처짐각)를 변위벡터에 대입하여 힘과 모멘트 계산

$$\mathbf{F} = [\mathbf{K}]\mathbf{u}$$

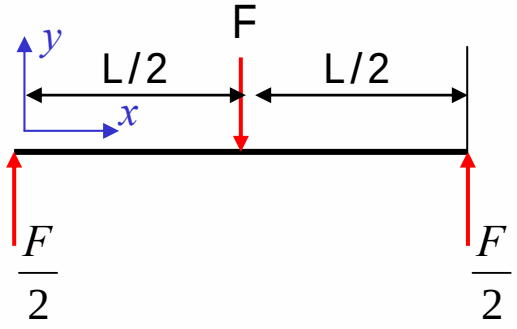
$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y3} \\ M_3 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & & 0 \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & & \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ & & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ \delta_{y3} \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/2 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ F/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



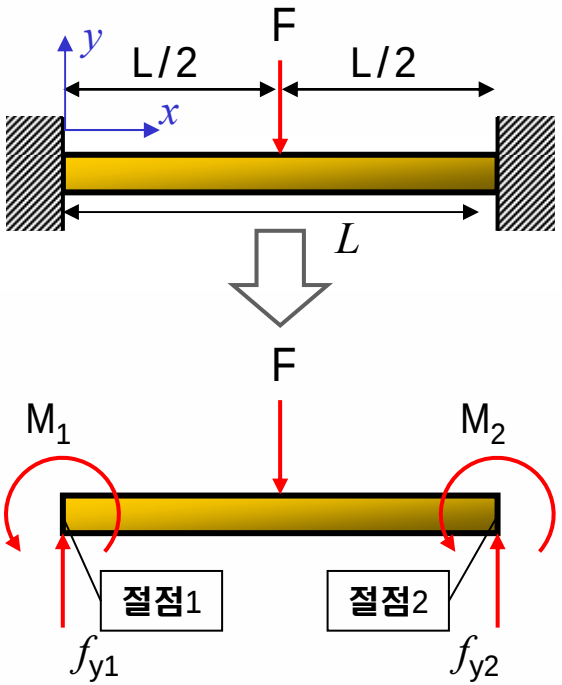
$$\theta_1 = -\frac{FL^2}{16EI},\ \theta_3 = \frac{FL^2}{16EI}$$

$$\delta_{y2} = -\frac{FL^2}{48EI},\ \theta_2 = 0$$

※보에 걸리는 힘과 모멘트

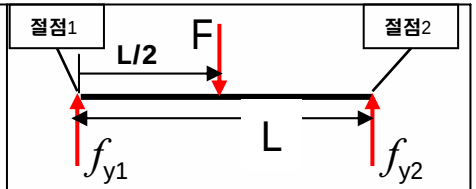
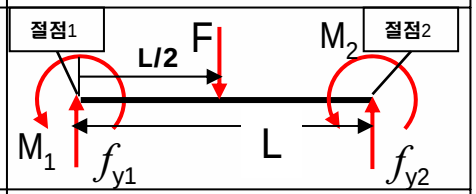
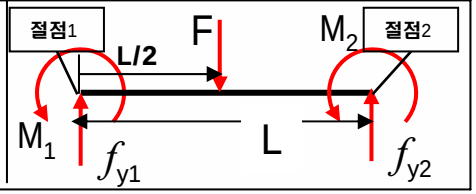


6.7 부정정 구조물 해석 (응력법)



▪ 길이 L인 고정지지보의 가운데에 힘 F가 작용할 때,
반력과 모멘트, 중앙에서의 처짐을 응력법으로 구하시오.

Step1. 각 절점에서 힘과 모멘트 평형식

$\sum f_y = 0$	$f_{y1} - F + f_{y2} = 0$	
$\sum M_{\text{절점1}} = 0$	$M_1 + 0 \times f_{y1} - \frac{FL}{2} + f_{y2}L + M_2 = 0$	
$\sum M_{\text{절점2}} = 0$	$M_2 + 0 \times f_{y2} + \frac{FL}{2} - f_{y1}L + M_1 = 0$	

※ 두 개의 모멘트 평형식을 더해보면,

$$M_1 + M_2 = 0$$

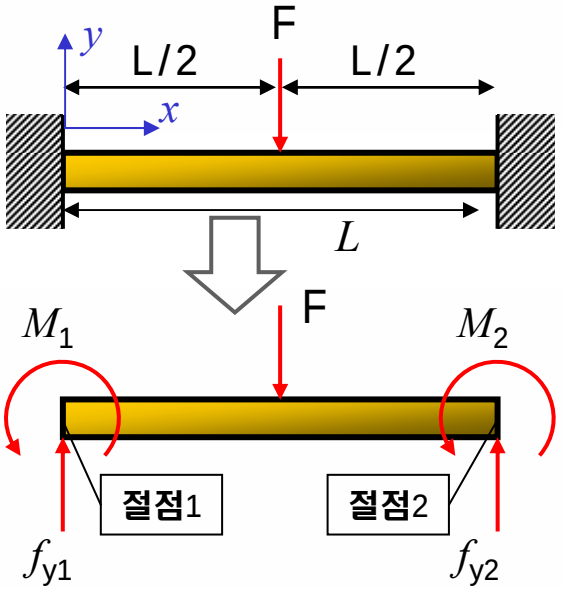
※ 왼쪽의 결과를 각 모멘트 평형식에 대입하면,

$$\sum M_{\text{절점1}} = -\frac{FL}{2} + f_{y2}L = 0$$

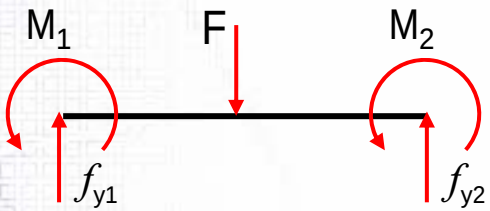
$$\sum M_{\text{절점2}} = \frac{FL}{2} - f_{y1}L = 0$$

$$\therefore f_{y1} = f_{y2} = \frac{F}{2}$$

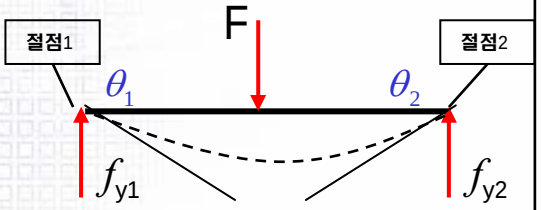
6.7 부정정 구조물 해석 (응력법)



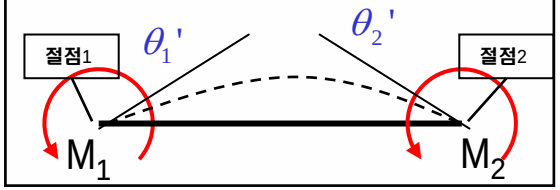
Step2. 변위 일치 조건사용



(1) 하중 F만 받는 상태



(2) 양단의 모멘트만 받는 상태



변위 일치 조건 : 양 끝단에서 처짐각($\theta = dy/dx$)이 0

$$\theta_1 + \theta_1' = 0\ ,\quad \theta_2 + \theta_2' = 0$$

$EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = M$ **에서 구하거나 보의 처짐공식 Table[1]을 사용함**

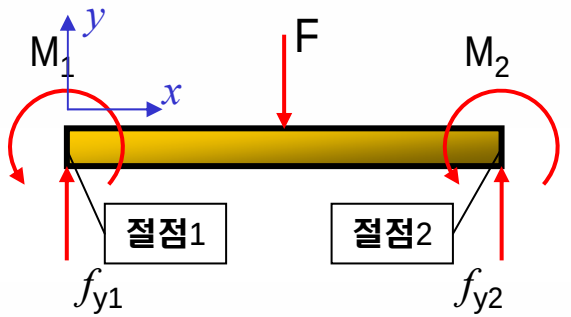
$$\theta_1 = -\frac{FL^2}{16EI},\quad \theta_1' = \frac{M_1 L}{3EI} - \frac{M_2 L}{6EI} = \frac{M_1 L}{2EI}\quad (M_1 + M_2 = 0)$$

$$\Rightarrow\ \theta_1 + \theta_1' = -\frac{FL^2}{16EI} + \frac{M_1 L}{2EI} = 0$$

$$M_1 = \frac{FL}{8},\ M_2 = -\frac{FL}{8}$$

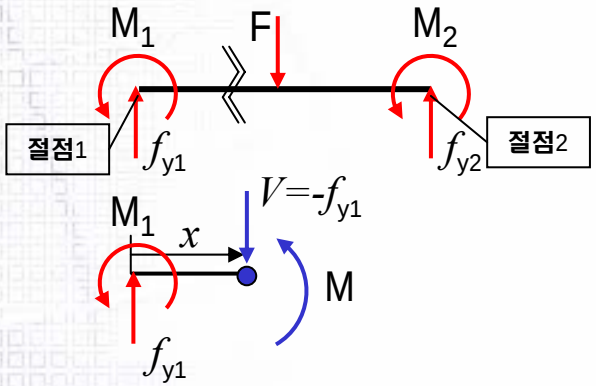
1) Appendix A. 보의 처짐 공식 Table 참고

6.7 부정정 구조물 해석 (응력법)



Step3. x만큼 떨어진 지점에서의 모멘트를 구한다.

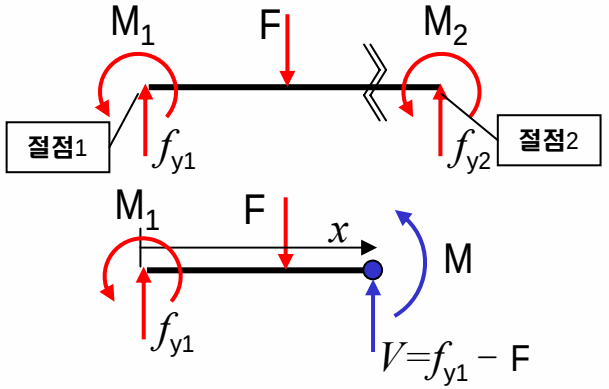
a) $0 \le x \le \frac{L}{2}$ 일 때,



$$\Rightarrow \quad M_1 - f_{y1}x + M = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = f_{y1}x - M_1$$

b) $\frac{L}{2} \le x \le L$ 일 때,



$$\Rightarrow \quad M_1 - f_{y1}x + F(x - \frac{L}{2}) + M = 0$$

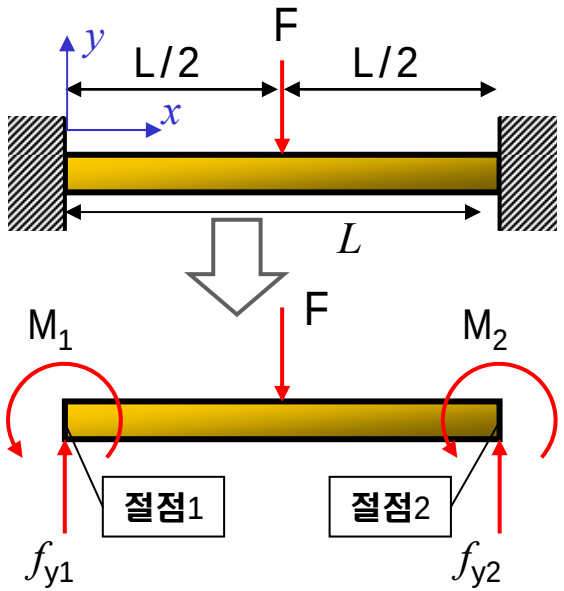
$$\Rightarrow \quad M = f_{y1}x - F(x - \frac{L}{2}) - M_1 = (f_{y1} - F)x + \frac{FL}{2} - M_1$$

c) $f_{y1} = \frac{F}{2}$, $f_{y2} = \frac{F}{2}$ 이므로, 대입하면

$$M = \begin{cases} \frac{F}{2}x - \frac{FL}{8} & (0 \le x \le L/2) \\ -\frac{F}{2}x + \frac{3FL}{8} & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$

6.7 부정정 구조물 해석 (응력법)

Step4. 모멘트와 보의 처짐 방정식으로부터 변위를 유도한다.



- x만큼 떨어진 지점에서의 모멘트

$$M = \begin{cases} \frac{F}{2}x - \frac{FL}{8} & (0 \le x \le L/2) \\ -\frac{F}{2}x + \frac{3FL}{8} & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$

- 보의 처짐 방정식(2계 미분방정식)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$ (Ch1.2 참고)

- 위 식을 한번 적분하면,

$$EI\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{F}{4}x^2 - \frac{FL}{8}x + C_1 & (0 \le x \le L/2) \\ -\frac{F}{4}x^2 + \frac{3FL}{8}x + D_1 & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$

- 다시 한번 적분하면,

$$EIy = \begin{cases} \frac{F}{12}x^3 - \frac{FL}{16}x^2 + C_1x + C_2 & (0 \le x \le L/2) \\ -\frac{F}{12}x^3 + \frac{3FL}{16}x^2 + D_1x + D_2 & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$

절점 1,2에서 처짐과 처짐각이 0

- 경계조건을 대입하여 C_1, C_2, D_1, D_2를 구함

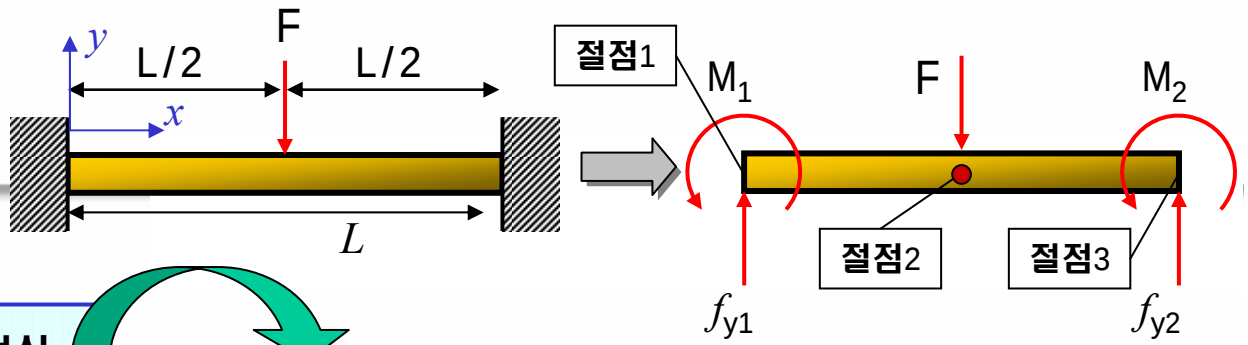
① $y_{x=0} = 0$ ② $y_{x=L} = 0$ ③ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0$, ④ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = 0$

$$C_1 = C_2 = 0, \quad D_1 = -\frac{FL^2}{8}, \quad D_2 = \frac{FL^2}{48}$$

- x=L/2를 대입하여 변위를 구함

$$y_{x=L/2} = -\frac{FL^3}{192EI}$$

6.8 응력법 요약



▪ 응력법

Step1. 각 절점에서 힘과 모멘트 평형식

- 구해진 평형식들을 정리하여 부족한 식의 개수를 판단

$\sum f_y = 0,\ \sum M_{\text{절점1}} = 0,\ \sum M_{\text{절점2}} = 0$ 를 이용하여

평형 조건식을 구하고 부족한 식의 개수 파악

Step2. 변위 일치 조건사용

- 부족한 식을 확보하여 미지의 반력과 모멘트를 구함

양끝단에서의 처짐각 또는 처짐은 0이 됨을 이용함

$\theta_1 + \theta_1' = 0 \quad \theta_2 + \theta_2' = 0$

Step3. x**만큼 떨어진 지점에서의 모멘트를 구한다.**

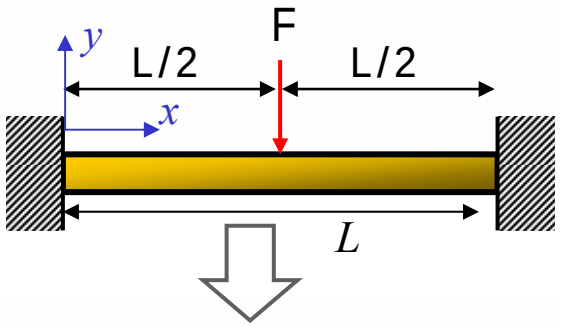
Step4. 모멘트와 보의 처짐 방정식으로부터 변위를 유도한다.

$EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ 를 사용하여, 두번 적분한 뒤

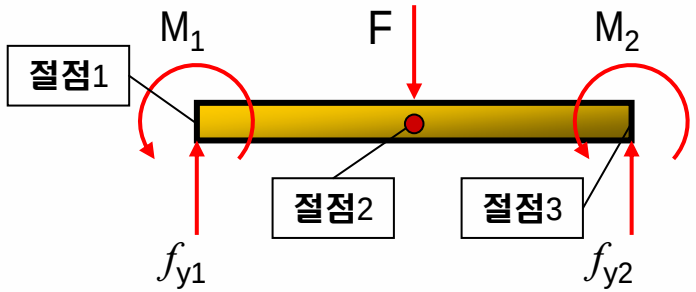
경계조건으로부터 미지수를 구하고,

x=L/2를 대입하여 처짐을 구함

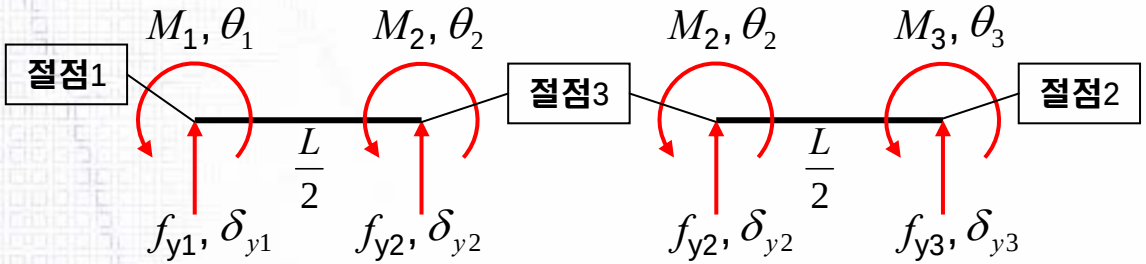
6.9 부정정 구조물 해석 (변위법)



▪ 길이 L인 고정지지보의 가운데에 힘 F가 작용할 때,
반력과 모멘트, 중앙에서의 처짐을 변위법으로 구하시오.



Step1. 보 요소로 나누고 절점에서의 변위를 정의



Step2. 보의 강성 매트릭스 구성(Ch4 참고)

스프링 상수

힘,모멘트 $\leftarrow \mathbf{F} = [\mathbf{K}]\mathbf{u}$ → 변위벡터(처짐,처짐각)

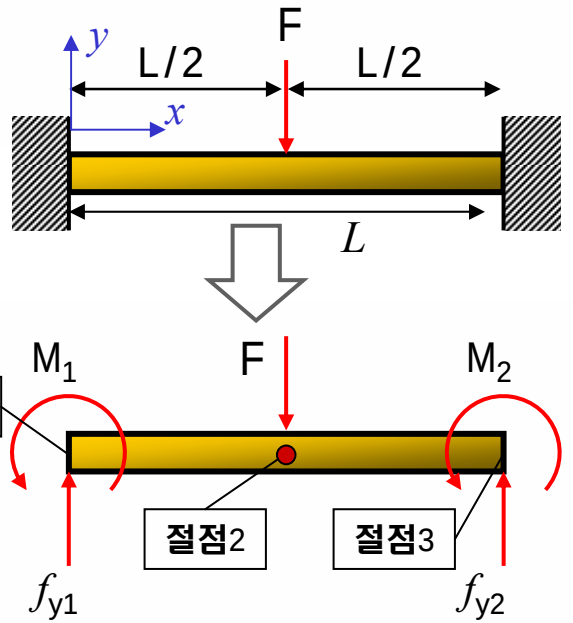
$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

중첩 →

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & 0 & \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & & \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ & & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ 0 & & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

6.9 부정정 구조물 해석 (변위법)



Step3. 경계조건 사용(변위의 일치 조건)

처짐=0: $\delta_{y1}=0,\ \delta_{y2}=0$

처짐각=0: $\theta_1=0,\ \theta_2=0$

Step4. 변위 벡터에 처짐과 처짐각을 대입하고 주어진 힘을 F에 대입하여 δ_{y3}, θ_3를 구함

given : $f_{y3}=-F,\ M_3=0$

find : $\delta_{y3},\ \theta_3$

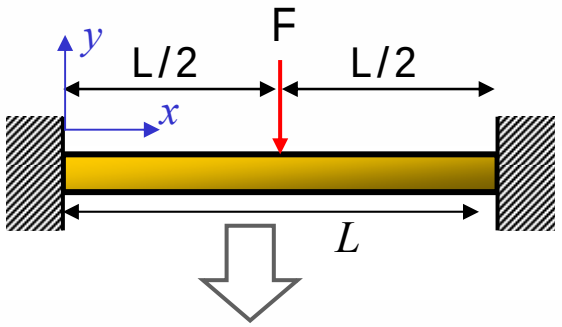
$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & & \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ 0 & & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ & & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1}=0 \\ \theta_1=0 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3}=0 \\ \theta_3=0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_2=-F \\ M_2=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{y2}=-\frac{FL^3}{192EI},\ \theta_2=0$$

NAOE/SNU
@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

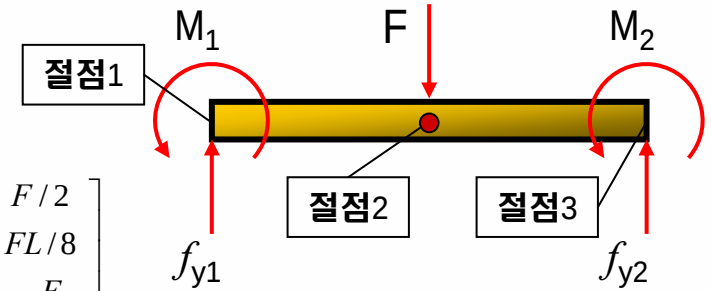
6.9 부정정 구조물 해석 (변위법)



Step5. 구한 변위(처짐,처짐각)를 변위벡터에 대입하여 힘과 모멘트 계산

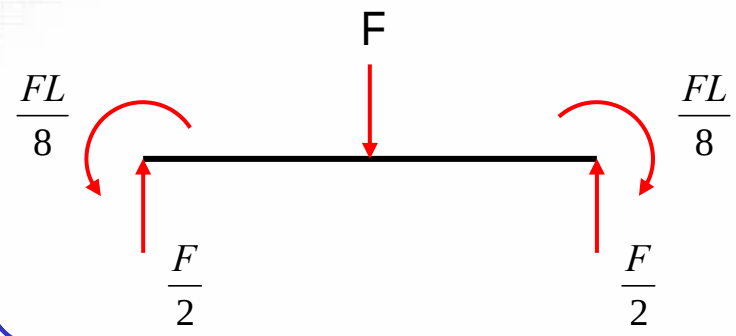
$$\mathbf{F} = [\mathbf{K}]\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y3} \\ M_3 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} & 0 & \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & & \\ -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{24EI}{(L/2)^3} & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & \frac{6EI}{(L/2)^2} \\ \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & 0 & \frac{8EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} \\ & 0 & -\frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{12EI}{(L/2)^3} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} \\ & & \frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{2EI}{L/2} & -\frac{6EI}{(L/2)^2} & \frac{4EI}{L/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{y3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/2 \\ FL/8 \\ -F \\ 0 \\ F/2 \\ -FL/8 \end{bmatrix}$$

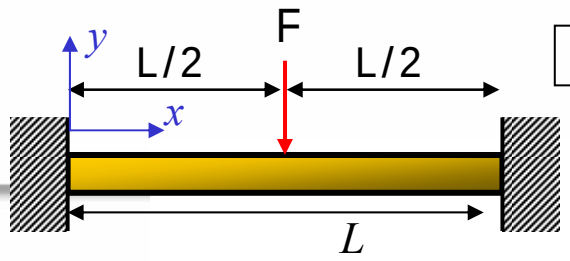


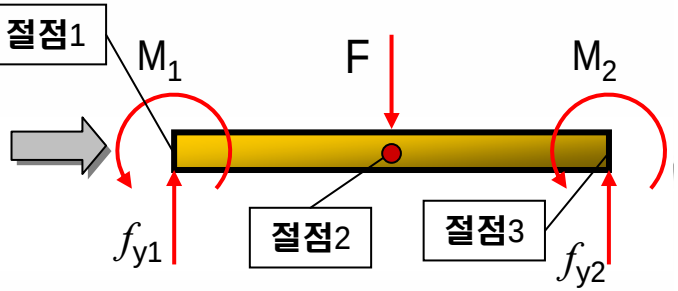
$$\delta_{y3} = -\frac{FL^3}{192EI}, \quad \theta_3 = 0$$

※보에 걸리는 힘과 모멘트



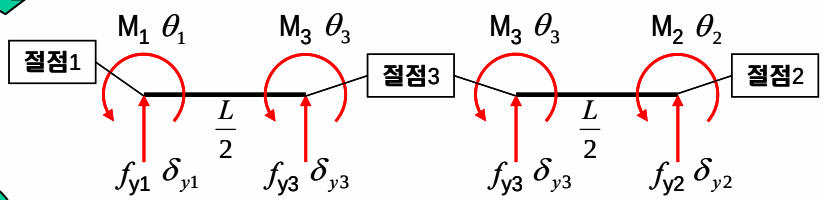
6.10 변위법 요약





▪ 변위법

Step1. 보를 요소로 나누고 절점에서의 변위를 정의



Step2. 보의 강성 매트릭스 구성
(중첩된 강성 매트릭스)

$$\mathbf{F} = [\mathbf{K}]\mathbf{u}$$

→ 중첩된 강성 매트릭스 구성

Step3. 경계조건 사용(변위의 일치 조건)

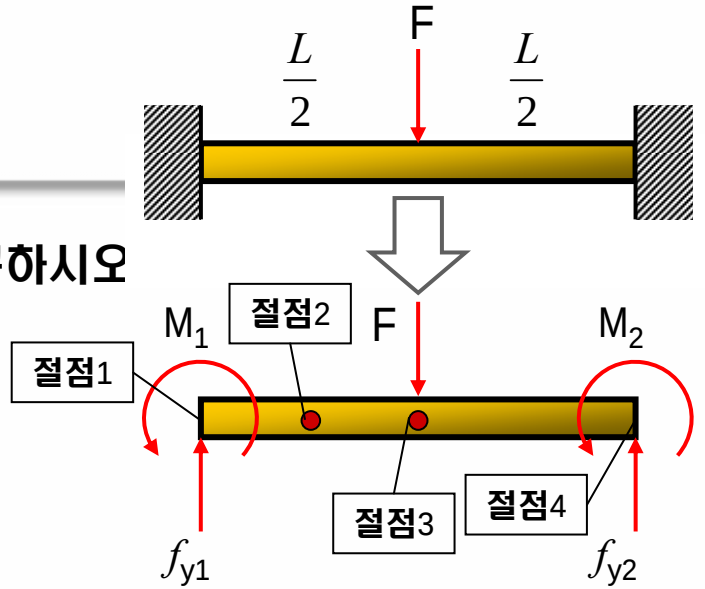
양끝(절점1,2)에서의
처짐과 처짐각 =0

$$\begin{pmatrix} \delta_{y1} = 0,\ \delta_{y2} = 0 \\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = 0 \end{pmatrix}$$

Step4. 변위 벡터에 경계조건에서 구한 처짐과 처짐각을 대입하고 주어진 힘을 F에 대입하여 δ_{y3}, θ_3 를 구함

Step5. 구한 변위를 변위 벡터에 대입하여 힘과 모멘트 계산

6.11 응력법과 변위법의 비교



(Q) L=4m라고 했을 때, x=1m(=L/4)인 지점에서의 처짐을 구하시오

sol1) **응력법**

$$EIy = \begin{cases} \frac{F}{12}x^3 - \frac{FL}{16}x^2 & (0 \le x \le L/2) \\ -\frac{F}{12}x^3 + \frac{3FL}{16}x^2 - \frac{FL^2}{8}x + \frac{FL^2}{48} & (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$

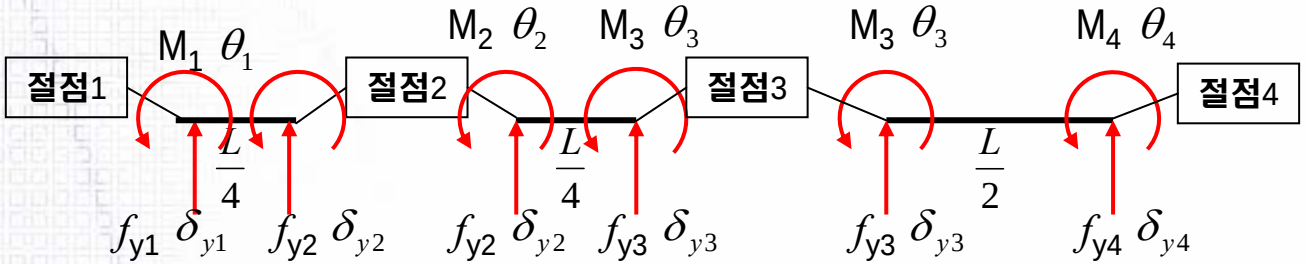
$$EIy\Big]_{\substack{x=1 \\ L=4}} = \frac{F}{12} - \frac{F \times 4}{16} = -\frac{F}{6}$$

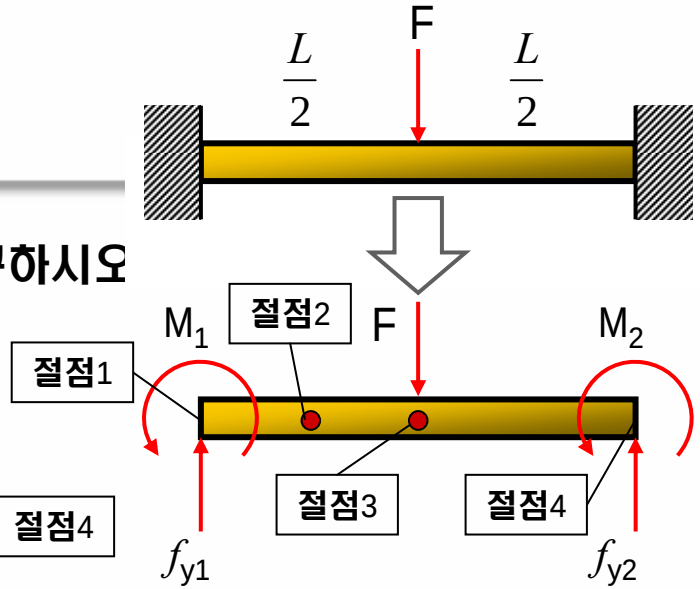
$$\therefore y_{x=1} = -\frac{F}{6EI} = -0.167\frac{F}{EI}$$

6.11 응력법과 변위법의 비교

(Q) L=4m라고 했을 때, x=1m(=L/4)인 지점에서의 처짐을 구하시오

sol2) **변위법**





$$\begin{bmatrix} f_{y1} \\ M_1 \\ f_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

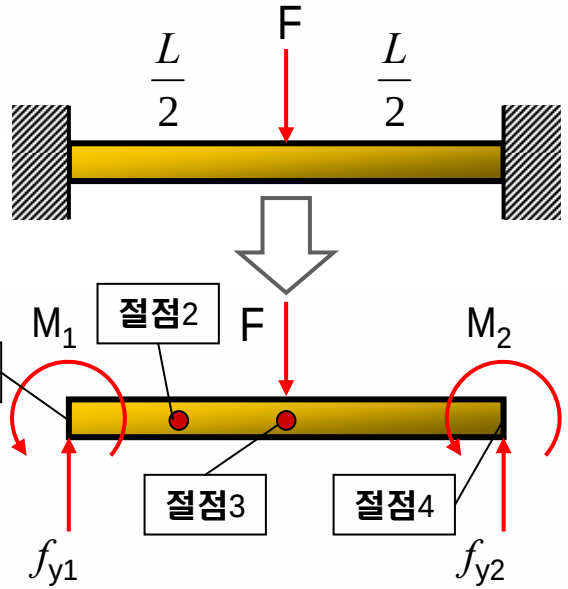
$$\begin{bmatrix} f_{y2} \\ M_2 \\ f_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{y3} \\ M_3 \\ f_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{y3} \\ \theta_3 \\ \delta_{y4} \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

중첩 →

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{y3} \\ M_3 \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 13.5 & -4.5 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4.5 & 6 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \theta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

6.11 응력법과 변위법의 비교



(Q) L=4라고 했을 때, x=1m(=L/4)인 지점에서의 처짐을 구하시오

처짐=0: $\delta_{y1}=0,\ \delta_{y2}=0$

쳐짐각=0: $\theta_1=0,\ \theta_2=0$

given : $f_{y2}=0,\ M_2=0,\ f_{y3}=-F,\ M_3=0$

$$\begin{bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{y3} \\ M_3 \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 13.5 & -4.5 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4.5 & 6 & -1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \theta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{y2}=0 \\ M_2=0 \\ F_{y3}=-F \\ M_3=0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 8 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 13.5 & -4.5 \\ 6 & 2 & -4.5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

연립방정식 풀이

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = -\frac{F}{EI} \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0.25 \\ 0.333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.12 변위법의 장단점

- **변위법의 장점**

  1. **각 절점에서 변위와 힘을 이용해 강성 매트릭스를 구성하여 Known과 Unknown 변수에 따라 해석하므로 정정 구조물과 부정정 구조물 모두에서 동일한 방법으로 해석을 수행**
  2. **힘과 모멘트, 변위의 식으로 구성된 연립 방정식을 매트릭스 형태로 계산할 수 있으므로 답을 내는데 간편하다.**
     cf) 응력법의 경우 변위를 구하기 위해서 미분방정식을 풀어야 한다.
  3. **임의의 형상이나 복잡한 형태의 구조물도 해석 가능**

- **변위법의 단점**

  1. **절점이 아닌 곳의 변위를 구하기 위해서는 다시 구하고자 하는 곳의 위치를 절점으로 잡고 재계산을 수행해야 함**
     cf)응력법 구해진 식에 바로 대입하여 계산 가능

Ch7. 격자 구조(Grillage) 해석 방법을 이용한 선박 화물창 구조 해석

7.1 선박 화물창의 격자 구조 (Grillage) 해석

7.2 선박 화물창의 격자 구조 (Grillage) 해석 필요성

7.3 선박 화물창의 해석 범위

7.4 선박이 받는 응력

7.5 종강도 해석과 Primary Stress (σ_1)

7.6 Grillage 해석과 Secondary Stress (σ_2)

7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

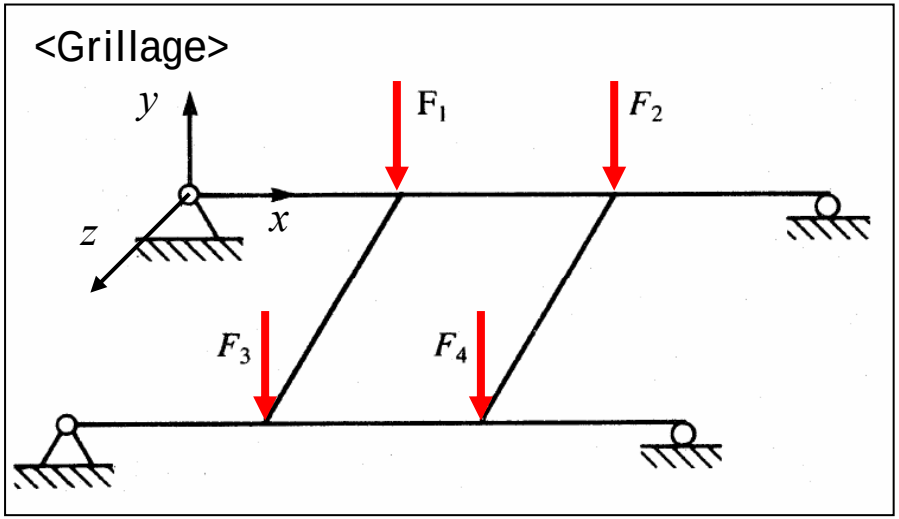
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

7.1 선박 화물창의 격자 구조 (Grillage) 해석

- 선박의 화물창 해석
  - 정의 : 화물창에 화물을 실었을 때, 하중에 의해 화물창의 각 부재가 받는 응력과 모멘트, 그에 따른 변형을 알아보는 것

- 화물창의 격자 구조 (Grillage) 해석
  - Grillage : 하중이 구조물의 평면에 수직하게 작용하는 구조물
  - Grillage 해석 : 화물창을 beam 요소로 분해한 뒤 Grillage를 구성하여 화물창 해석을 시행

<Grillage>



7.2 선박 화물창의 격자 구조 (Grillage) 해석 필요성

- **선박 화물창의 격자 구조(Grillage) 해석 필요성**

1. **부재와 부재가 만나는 곳에서 큰 응력이 발생하므로, 허용응력보다 작도록 보강하기 위해 부재와 부재의 교차지점에서 작용하는 모멘트와 힘을 계산할 필요성이 있음**
2. **구조 해석 프로그램(Patran, Ansys,...)을 사용하여 정확하게 원하는 지점에서의 응력을 계산해 낼 수 있지만, 시간이 오래 걸리고, 설계를 다 마치기 전까지는 전선 모델링이 불가능 하므로 해석할 수 없음**
3. Grillage **해석 방법을 도입할 경우,**
   1) **빠른 시간에 부재가 만나는 지점에서의 변위와 응력 계산 가능**
   2) **설계가 완전히 끝나지 않았을 경우에도 개략적으로 적용 가능**
   3) **정확하진 않지만, 개략적인 응력의 분포를 알 수 있음 (어느 부재 교차점에 큰 응력이 발생하는지 알 수 있음)**

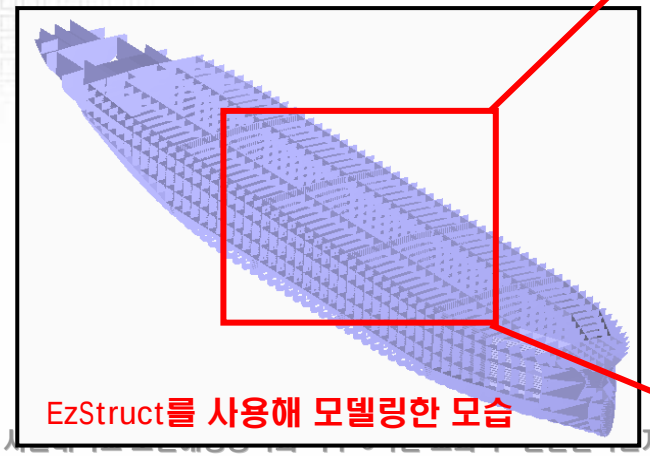
7.3 선박 화물창의 해석 범위

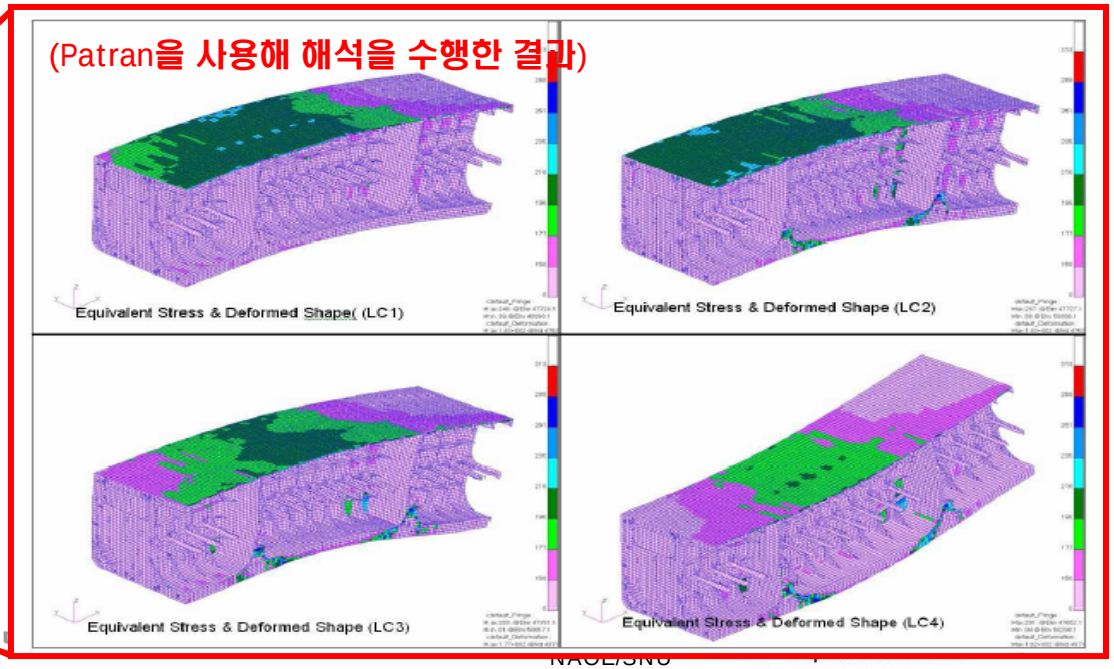
▪ **화물창 해석 범위** : 2 Hold **해석** (½ Hold + 1 Hold + ½ Hold)

① 1 Hold 해석만 수행할 경우 Boundary Condition의 영향으로 인해 해석 결과가 실제와 큰 차이를 보임

② 전체 선박을 모델링 할 경우 시간이 오래 걸리고, 계산 시간도 많이 소요됨

③ 따라서, 2Hold 해석을 수행하여 Boundary Condition의 영향을 최소화 하고, 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있음





7.4 선박이 받는 응력

- **선박이 받는 응력**

$$\sigma_T = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

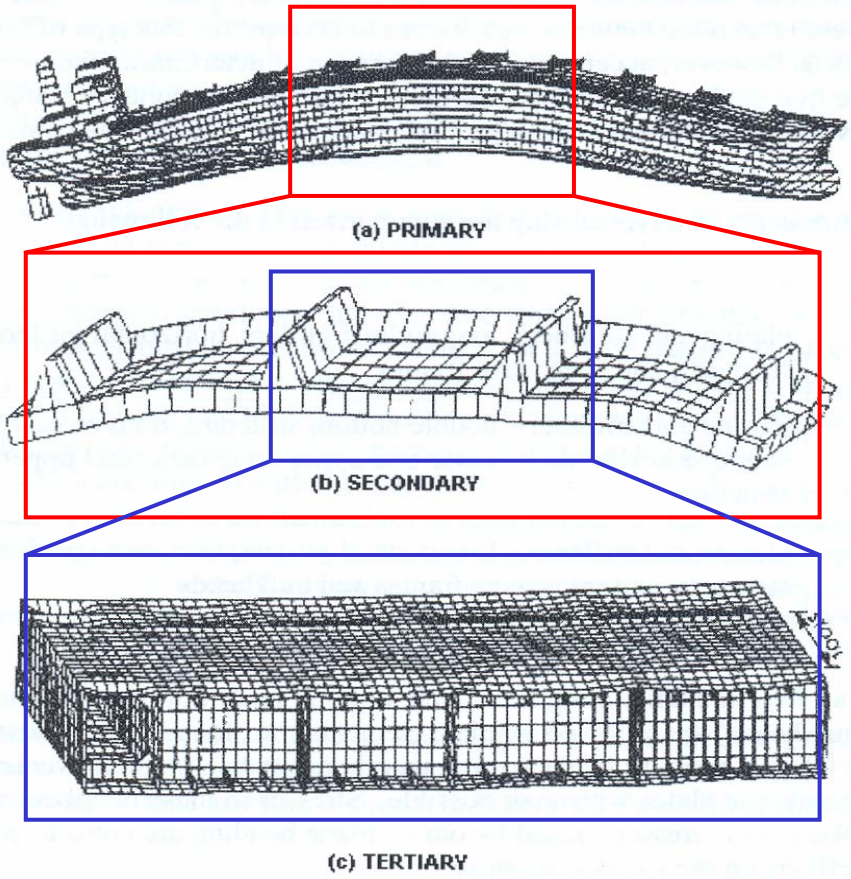
= Primary Stress +Secondary Stress

+ Tertiary Stress

σ_1 : **선박 중량과 부력의 차이에 의해 발생, 배를 하나의 보로 보았을 때, 길이 방향으로 굽히려는 힘.**

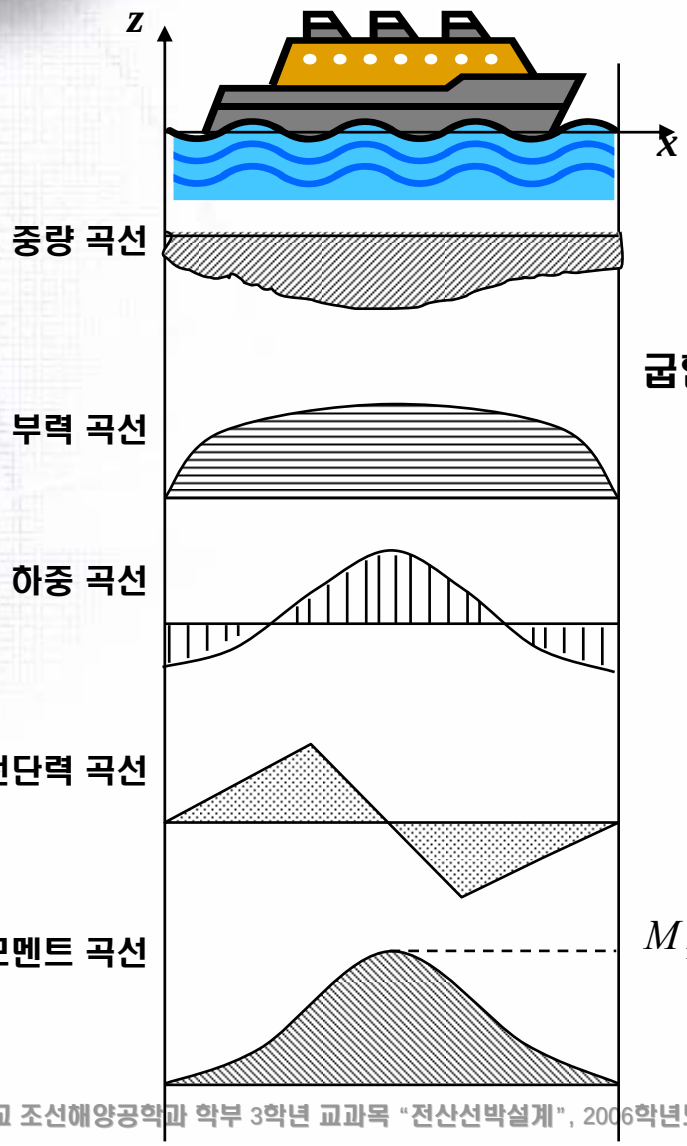
σ_2 : **화물의 하중에 의한 처짐과 이 때 발생하는 응력으로** Girder**와** Bulkhead, Side shell, Web Frame**같이 비교적 큰 부재에서의 응력 계산**

σ_3 : **화물창 내부에서 화물 하중에 의한 상대적인 처짐과 이 때 발생하는 응력으로** Stiffener**와 같이 작은 부재를 모두 고려하여 변위 및 응력을 계산**



7.5 종강도 해석과 Primary Stress (σ_1)

▪ 종강도 해석 과정



하중 곡선 = 중량곡선 + 부력곡선

⇩

전단력 곡선 = $\int$ (하중 곡선) dx

⇩

굽힘 모멘트 곡선 = $\int$ (전단력 곡선) dx

⇩

$$\sigma_L = \frac{M_{max}}{Z} \quad (\text{단면 계수 } Z = \frac{I}{y})$$

⇩

$$\sigma_L \le 175 f_1 \, N/mm^2$$

(f_1 : Material 상수
ex) mild Steel : f_1=1.0)

보이론

w : 보에 작용하는 분산 하중

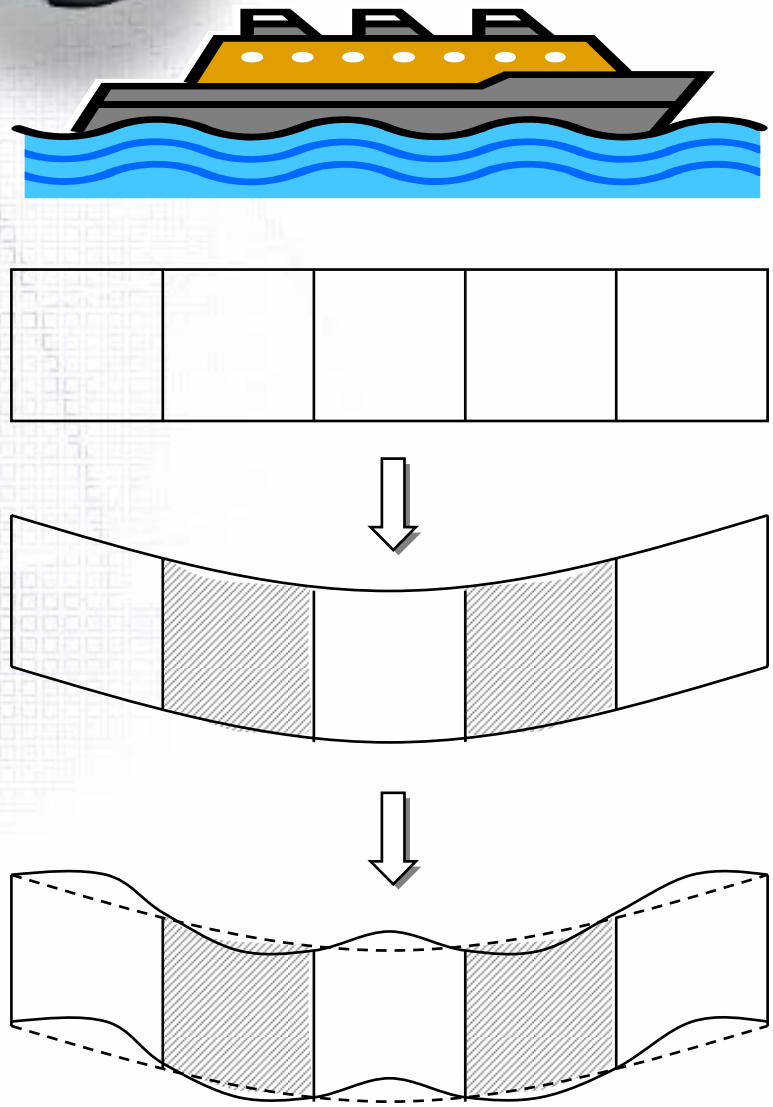
전단력 : $V = -\int w dx$

굽힘응력 : $M = \int V dx$

Primary Stress

☞ $\sigma_L = \sigma_1$

7.6 Grillage 해석과 Secondary Stress (σ_2)



- **종강도 해석 : 선박을 하나의 보로 이상화시켜 해석**

  배의 Midship Section**에서 최대 굽힘 응력 발생하므로**
  175 N/mm^2**보다 작은 응력이 걸리도로록 중앙단면 설계**

- **선박의 변형 : 실제 선박의 변형은 다음 그림과 같이 일어남. 이는 선박의 종횡방향으로 배치된 부재의 변형과 이 때 발생하는 응력과 관련 (** σ_2 **)**

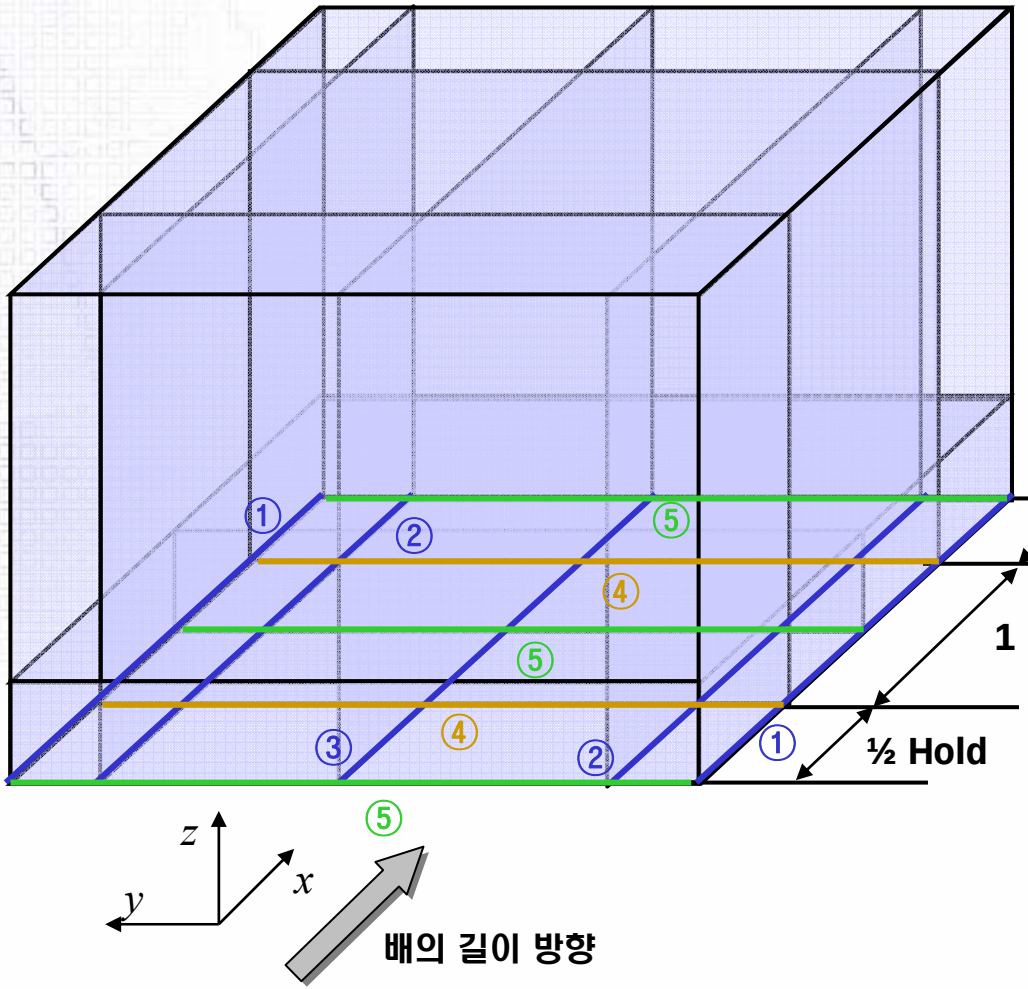
- Grillage **해석 : 각 부재가 받는 응력(**σ_2**)과 변형을 구하는 해석 방법, 하중과 부력만을 고려함**

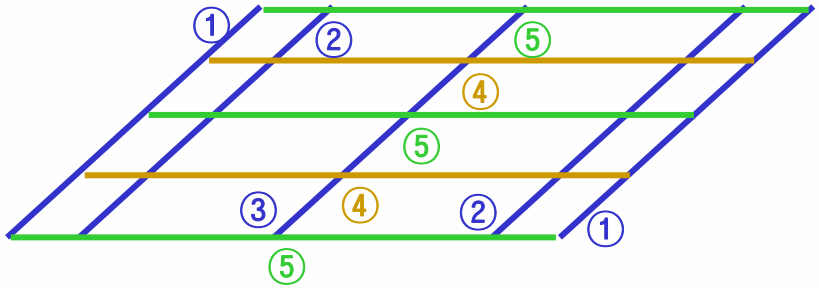
7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

Step1. **화물창을 격자 구조로 표현**

- **화물창 해석 범위** : ½ Hold + 1 Hold + ½ Hold





① Side Shell

② Side Longitudinal Bulkhead

③ Center Girder + Longitudinal Bulkhead

④ Transverse Bulkhead

⑤ Transverse Floor

7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

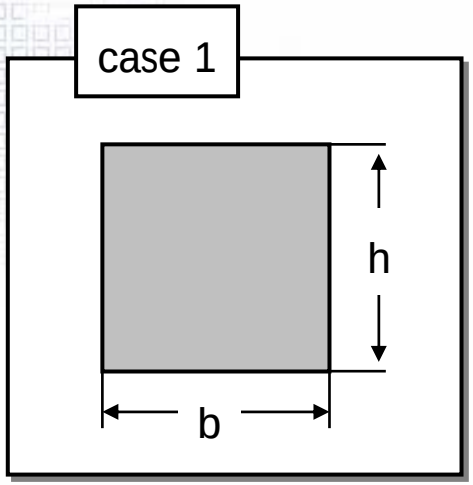
1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

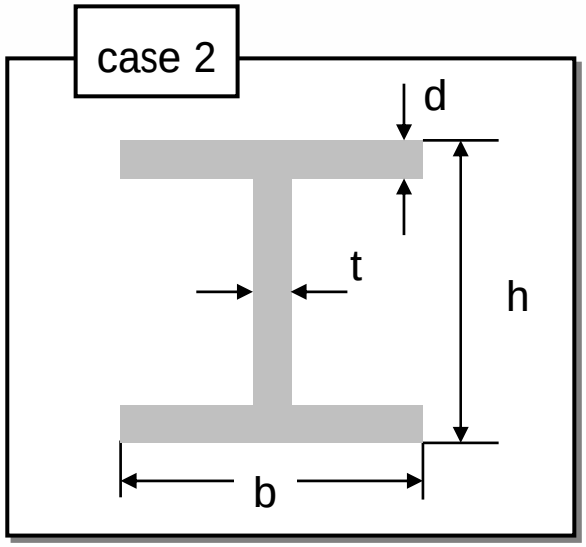
Step2. 각 부재의 Property 계산

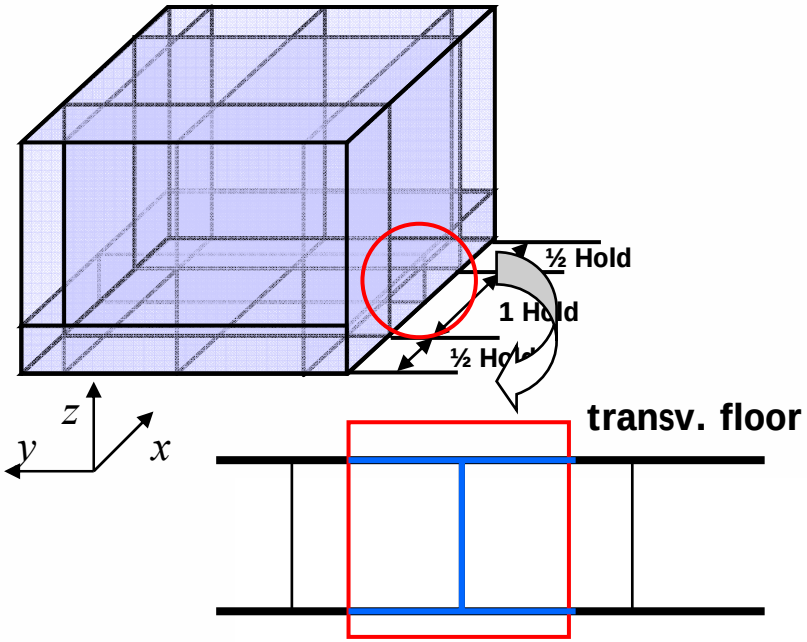
I : Moment of Inertia
J : Torsion Constant

방법1. 각 부재의 치수를 대입하여 직접 계산

	I_x	I_y	$J = I_x + I_y$
case 1	$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_y = \frac{b^3h}{12}$	$J = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12}$
case 2	$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t)(h-2d)^3}{12}$	$I_x = \frac{2db^3}{12} + \frac{(h-2d)t^3}{12}$	$J = I_x + I_y$







7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

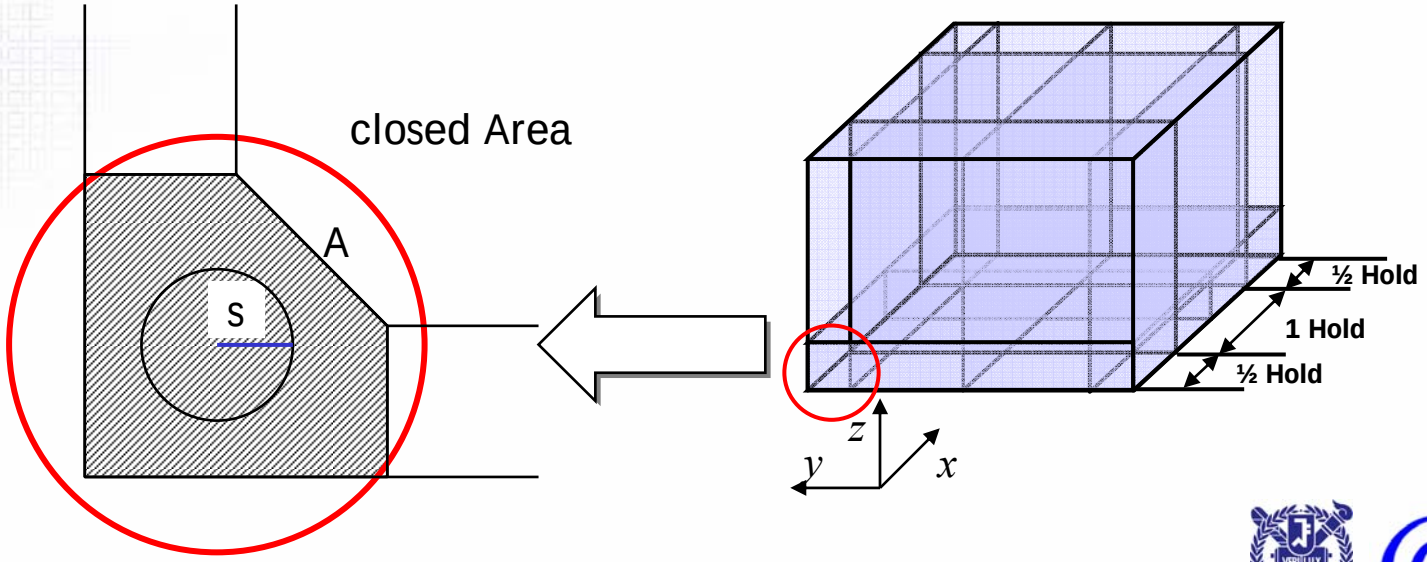
1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

방법2. J(Torsion Constant)를 구하는 일반 식 사용

복잡한 형상을 가진 부재의 경우 J값은 다음 식을 사용한다.

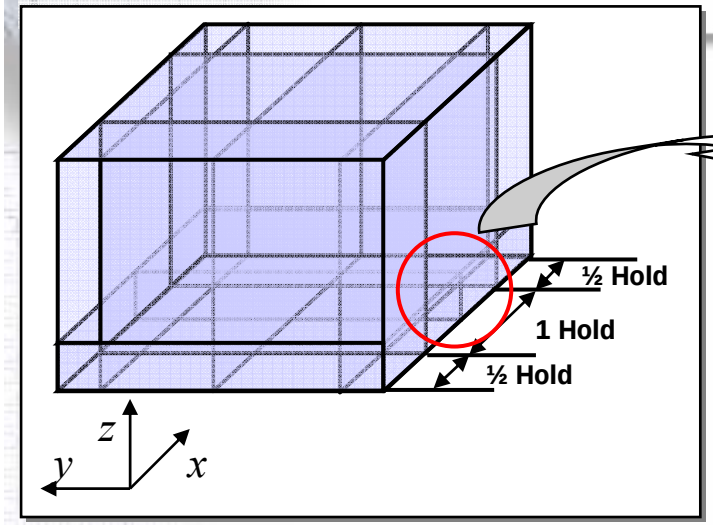
Opened Section : $J = \frac{1}{3}\sum l t^3$ (l : length, t : thickness)

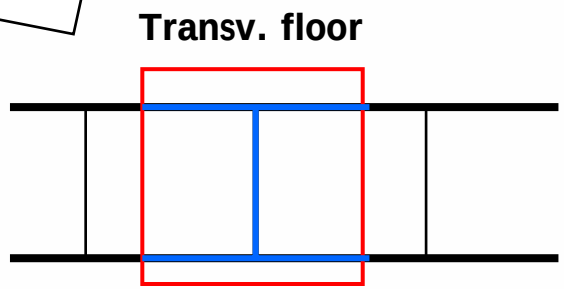
closed Section : $J = \frac{4A^2}{\sum(t/s)}$ (A: Enclosed Area , s : Arc Length, t : thickness)



7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이





방법3. 경험식 사용

BAR TYPE (See Idealization)	TORSION CONSTANT (J)	INERTIA (I)
1.Center Longi. Bulkhead	$5\times I_{\otimes}$	$0.11\times I_{\otimes}$
2. Longitudinal Bulkhead	$5\times I_{\otimes}$	$0.22\times I_{\otimes}$
3. Side Shell	$5\times I_{\otimes}$	$0.17\times I_{\otimes}$
4. Bottom Transv. floor	10^{-5}	I 형 부재의 Inertia
5.Oil-tight Bulkhead	$l\cdot D_T{}^2\cdot(t_B+t_D)/4$	Not less than $0.3\times I_{\otimes}$

※ $5\times I_{\otimes}$가 $l\cdot D_T{}^2\cdot(t_B+t_D)/4$보다 계산결과 약 20배 큰 값을 가짐

☞ 종강도 부재가 횡강보 부재보다 비틂에 잘 견딤을 알 수 있음

NOMENCLATURE(명칭)

D_T - Depth of Tank

$I_{\otimes}$ - Vertical Moment of Inertia of Full Midship Section

l - Spacing of Transverse Bulkheads

t_B - Thickness of Bottom Shell

t_D - Thickness of Deck Plating

7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

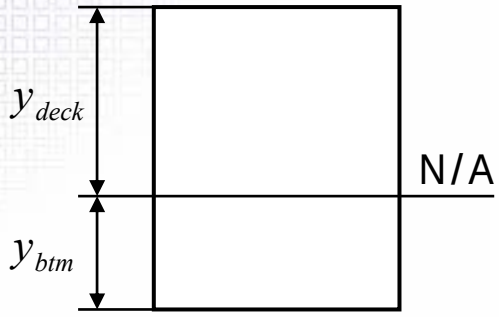
1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

※ 중앙 단면의 2차 모멘트는 Section Modulus의 정보를 이용해 계산

〈기준선박의 Section Modulus(cm^2-m)〉

	Rule REQ	Design
Deck	182745	220364
Bottom	182745	269333

sol)



① $y_{deck} + y_{btm} = Depth$

② $Z_{deck} = \frac{I_{\otimes}}{y_{deck}} \Rightarrow y_{deck} = \frac{I_{\otimes}}{Z_{deck}}$

③ $Z_{btm} = \frac{I_{\otimes}}{y_{btm}} \Rightarrow y_{btm} = \frac{I_{\otimes}}{Z_{btm}}$

④ $\frac{I_{\otimes}}{Z_{deck}} + \frac{I_{\otimes}}{Z_{btm}} = Depth \Rightarrow I_{\otimes} = \frac{Depth \times (Z_{deck} Z_{btm})}{Z_{deck} + Z_{btm}}$

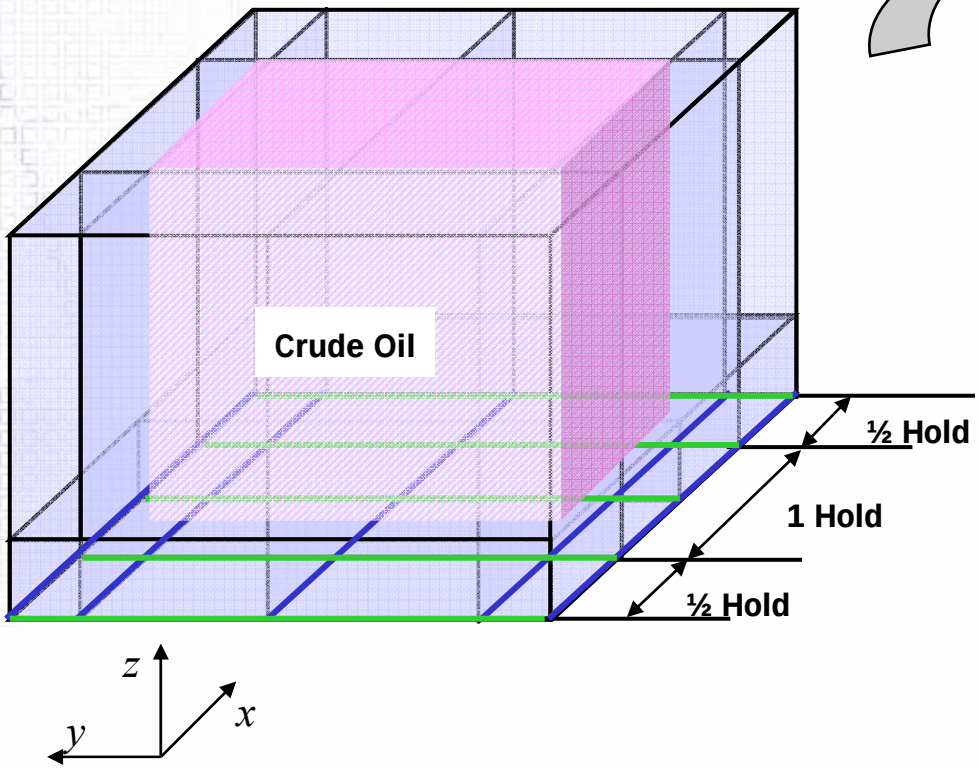
7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

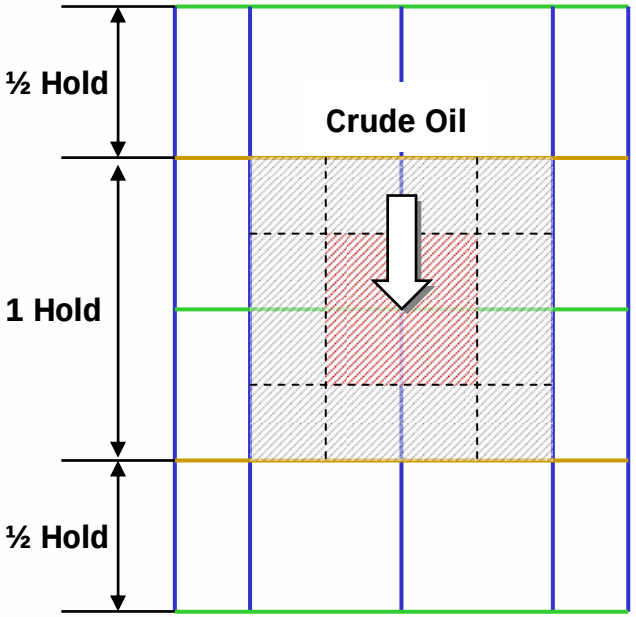
1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

C:cos
S:sin

Step3. 하중 및 모멘트 조건

1. 화물 하중





※ 수압의 경우 배의 바닥에서 가해지는 힘을 위와 같은 방법으로 각 절점에서의 집중하중으로 치환해준다.

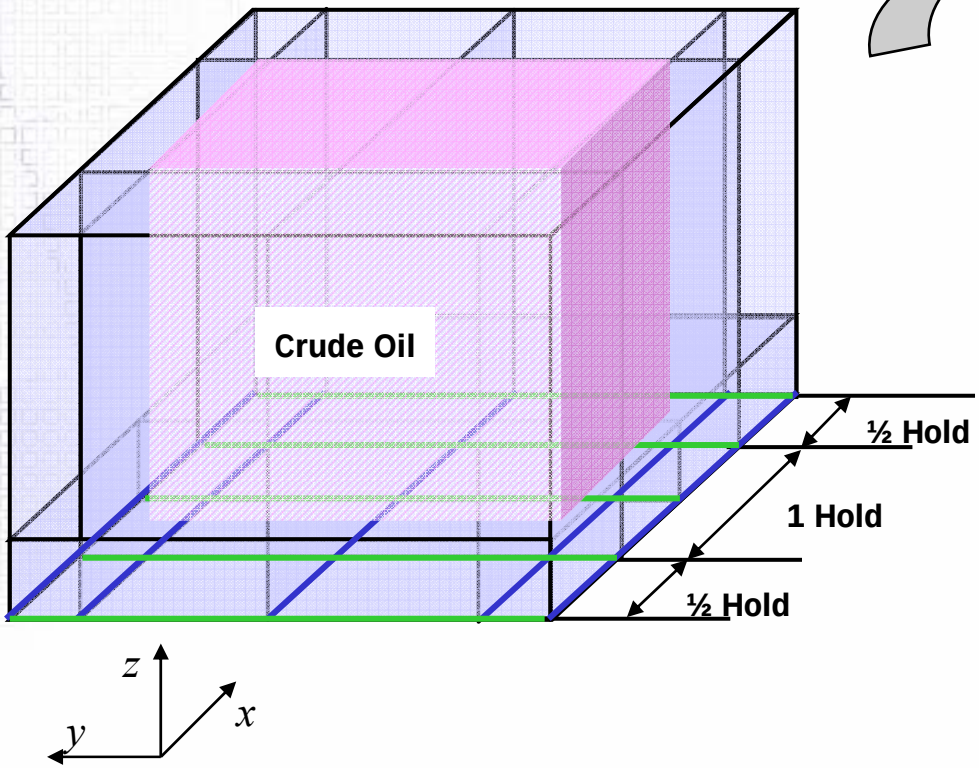
7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

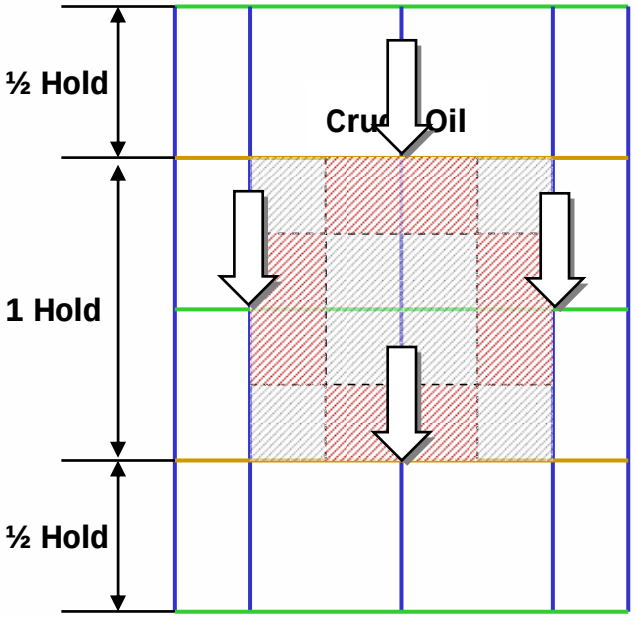
1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

C:cos
S:sin

Step3. 하중 및 모멘트 조건

1. 화물 하중





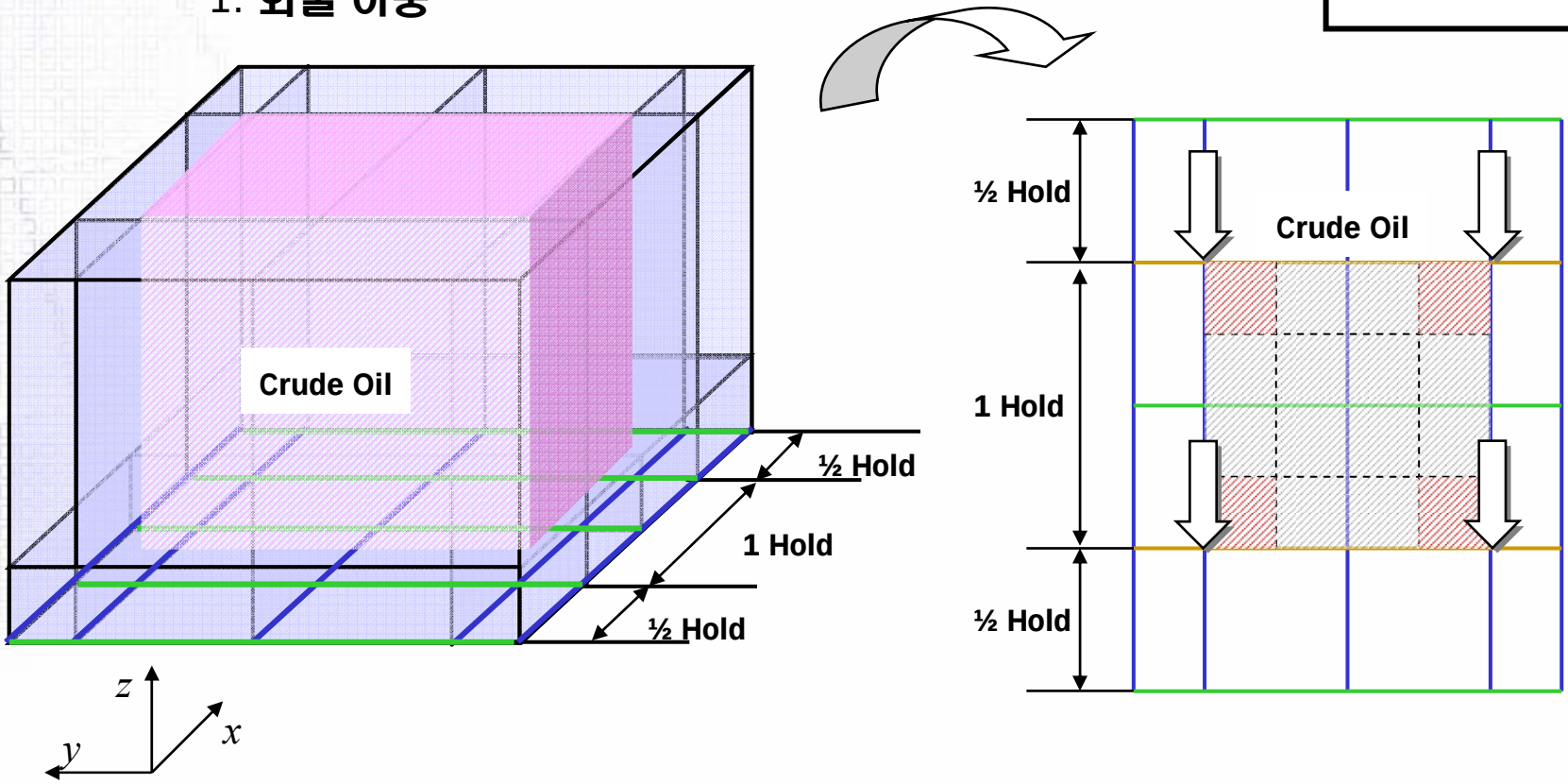
※ 수압의 경우 배의 바닥에서 가해지는 힘을 위와 같은 방법으로 각 절점에서의 집중하중으로 치환해준다.

선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

Step3. 하중 및 모멘트 조건

1. 화물 하중

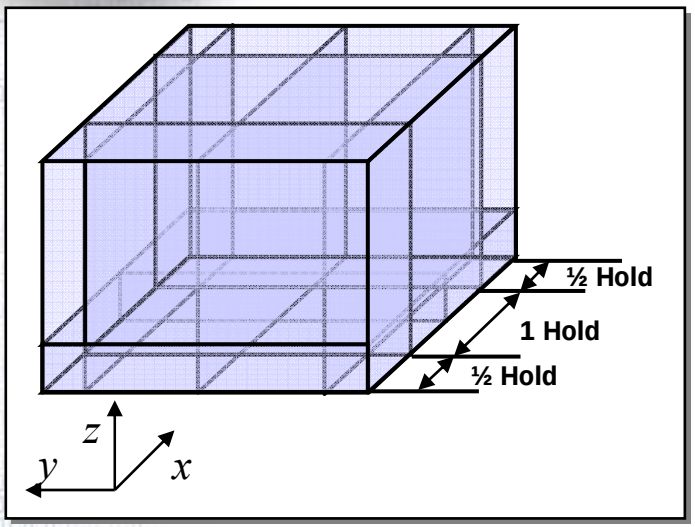


※ 수압의 경우 배의 바닥에서 가해지는 힘을 위와 같은 방법으로 각 절점에서의 집중하중으로 치환해준다.

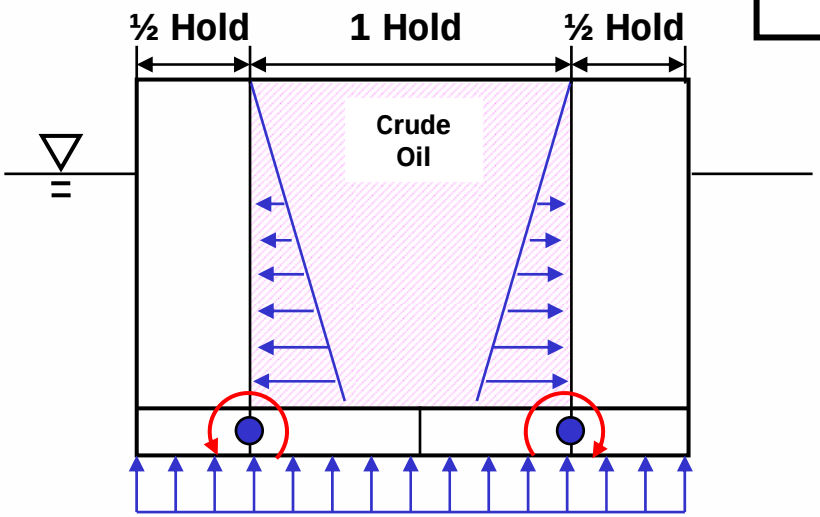
7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

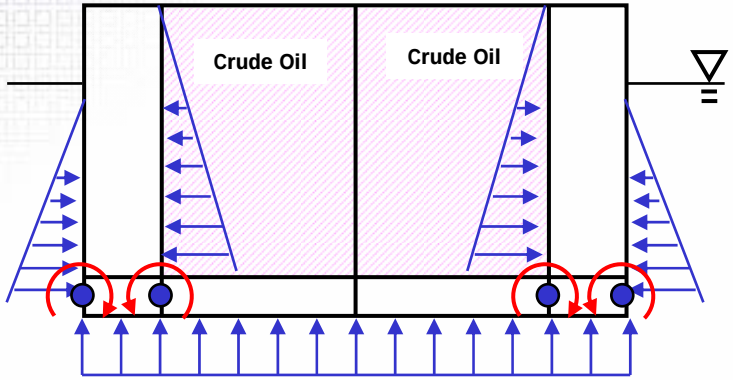
2. 모멘트 : 횡방향의 수압과 화물압에 의해 발생



< 화물창 측면도>



< 화물창 정면도>

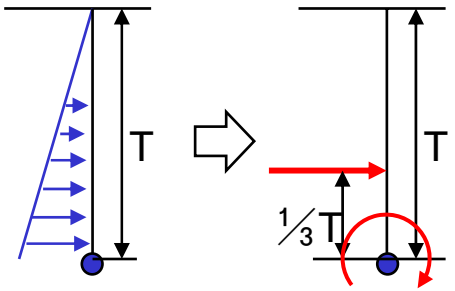


※ 모멘트 계산 방법

$$M = (\text{가해지는 힘의 총합}) \times (\text{도심까지의 거리})$$

$$= (\frac{1}{2}\rho g T \times T) \times (\frac{1}{3}T)$$

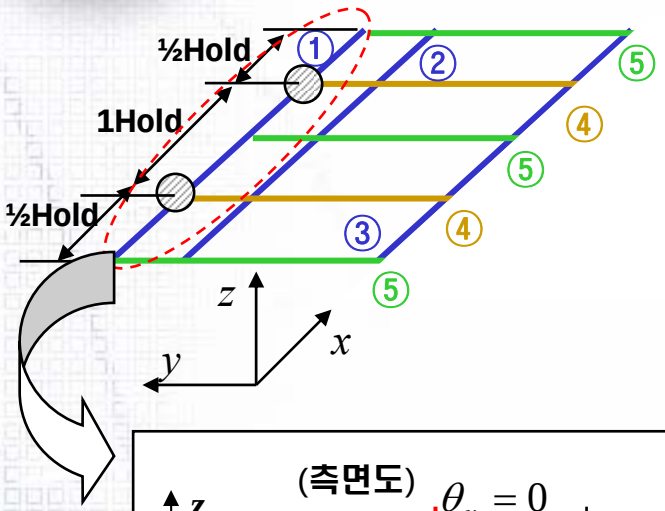
$$= \frac{1}{6}\rho g T^3$$



7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

Step4. 경계 조건의 부여



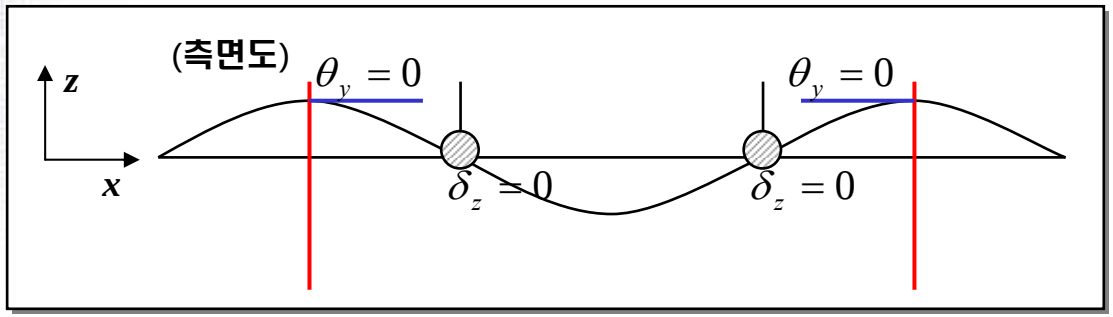
① Side Shell

② Side Longitudinal Bulkhead

③ Center Girder + Longitudinal Bulkhead

④ Transverse Bulkhead

⑤ Transverse Floor



※ $\theta_y = \frac{dz}{dx} = 0$ 을 의미

(1) **반폭만 고려** : Center girder **에서** $\theta_x = 0$

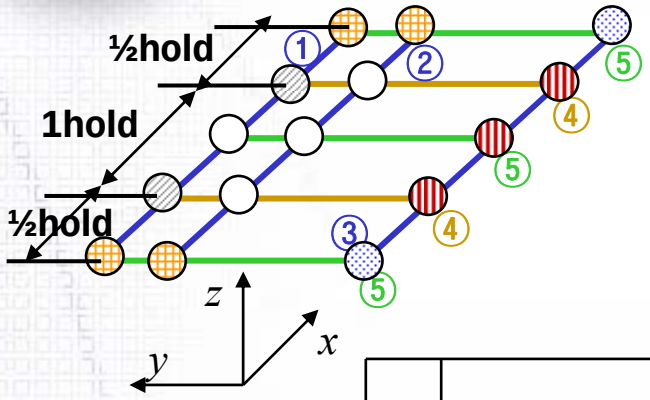
(2) **문제의 해가 존재하기 위한 구속 조건** : $\delta_z = 0$ (Side Shell**과** T.BHD**가 만나는 지점에서 변위**=0)

(3) Symmetric **조건** : **앞뒤 화물창의** ½ Hold**에서 나누었으므로**, $\theta_y = 0$

7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

Step4. 경계 조건의 부여



① Side Shell
② Side Longitudinal Bulkhead
③ Center Girder + Longitudinal Bulkhead
④ Transverse Bulkhead
⑤ Transverse Floor

Grillage Constraints

$$\delta_x = 0$$
$$\delta_y = 0$$
$$\theta_z = 0$$

	Remark	θ_x	θ_y	δ_z	known (0 or Given)	unknown
◍	T.BHD와 Side Shell의 교차점	–	–	0	M_x, M_y, δ_z	$\theta_x,\ \theta_y,\ F_z$
◉	화물창의 가운데 지점 (symmetric condition)	–	0	–	M_x, θ_y, F_z	θ_x, M_y, δ_z
◉	symmetric condition과 대칭조건을 모두 가지는곳	0	0	–	$\theta_x,\ \theta_y,\ F_z$	M_x, M_y, δ_z
◉	좌우 대칭조건	0	–	–	$\theta_x,\ M_y, F_z$	$M_x, \theta_y,\ \delta_z$
○	구속 조건이 없는 절점	–	–	–	M_x, M_y, F_z	$\theta_x,\ \theta_y,\ \delta_z$

7.7 선박 화물창의 격자 구조 해석 과정

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

step5. Grillage **해석 방법에 따라 각 절점에서의 변위를 계산한다.**

<Grillage**의 강성 매트릭스**>

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ f_{z1} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ f_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \delta_{z1} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \delta_{z2} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{K}_{pq}]$

G : **전단탄성계수** (Shearing Modulus)

E : **인장탄성계수** (Modulus of elasticity)

I : **단면의 2차 모멘트** (Moment of Inertia)

J : **비틂 상수** (Torsion Constant)

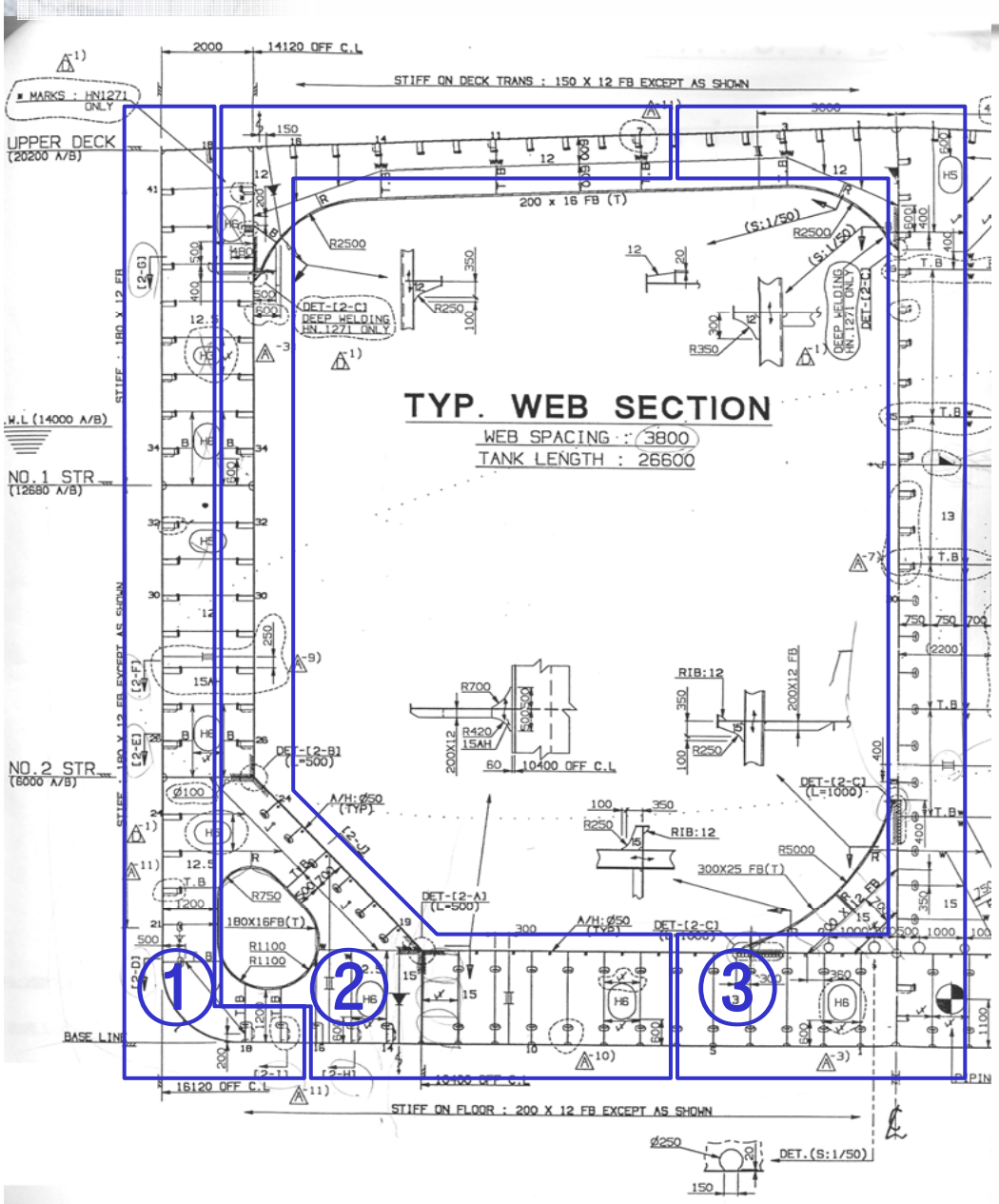
<**좌표축 변환 행렬**>

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<최종 강성 방정식>

$$[\mathbf{F}_{xy}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}_{pq}][\mathbf{T}][\delta_{xy}]$$

7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

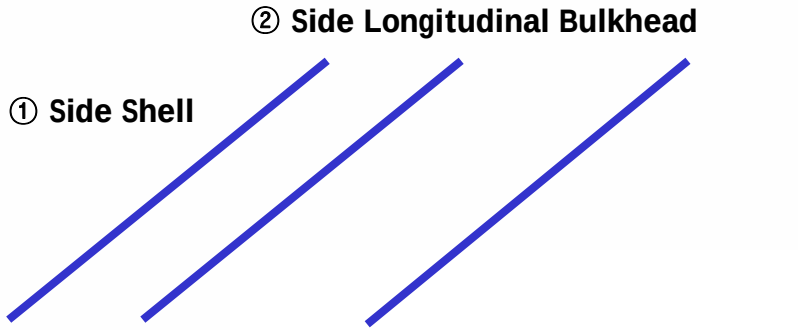


1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

72.5K Oil Tanker의 Principal Dimensions

LOA : 228.50m
LBP : 219.00m
Breadth : 32.24m
Depth : 20.20m
Draft Scantling : 14.00m
Draft Design :12.20m

Web Frame Space : 3800mm
Cargo Tank length : 26600mm
Number of Web between Transverse Bulkhead : 6

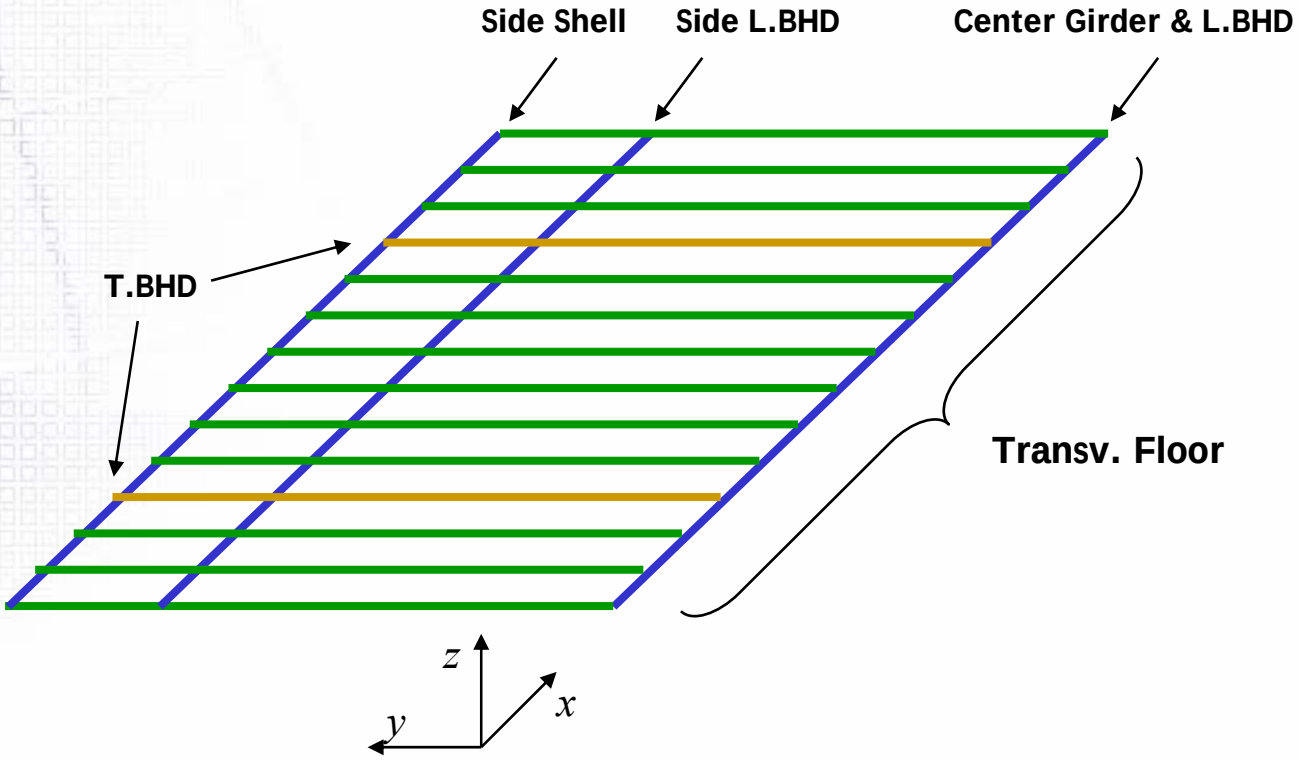


7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

Step1. **화물창을 격자 구조로 표현**

- **화물창 해석 범위** : ½ Hold + 1 Hold + ½ Hold



7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 하중 및 모멘트 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

Step2. 각 부재의 Property 계산

<기준선박의 Section Modulus(cm²-m)>

	Rule REQ	Design
Deck	182745	220364 [cm²-m]= 22.0364 [m³]
Bottom	182745	269333 [cm²-m]= 26.9333 [m³]

$$\therefore I_{\otimes} = \frac{Depth \times (Z_{deck} Z_{btm})}{Z_{deck} + Z_{btm}} = \frac{20.20 \times (22.3464 * 26.9333)}{22.3464 + 26.9333} = 244.824[m^4]$$

BAR TYPE	TORSION CONSTANT (J)	INERTIA (I)
1.Center Longi. Bulkhead	$5 \times I_{\otimes}$ =1224.12 [m⁴]	$0.11 \times I_{\otimes}$ = 26.93 [m⁴]
2. Longitudinal Bulkhead	$5 \times I_{\otimes}$ =1224.12 [m⁴]	$0.22 \times I_{\otimes}$ = 53.86 [m⁴]
3. Side Shell	$5 \times I_{\otimes}$ =1224.12 [m⁴]	$0.17 \times I_{\otimes}$ = 41.62 [m⁴]
4. Bottom Transv. floor	10^{-5} [m⁴]	0.1335 [m⁴]
5.Oil-tight Bulkhead	$l \cdot D_T^{\,2} \cdot (t_B + t_D)/4$ = 65.36 [m⁴]	Not less than $0.3 \times I_{\otimes}$ = 73.45 [m⁴]

NOMENCLATURE(명칭)

D_T - Depth of Tank

$I_{\otimes}$ - Vertical Moment of Inertia of Full Midship Section

l - Spacing of Transverse Bulkheads

t_B - Thickness of Bottom Shell

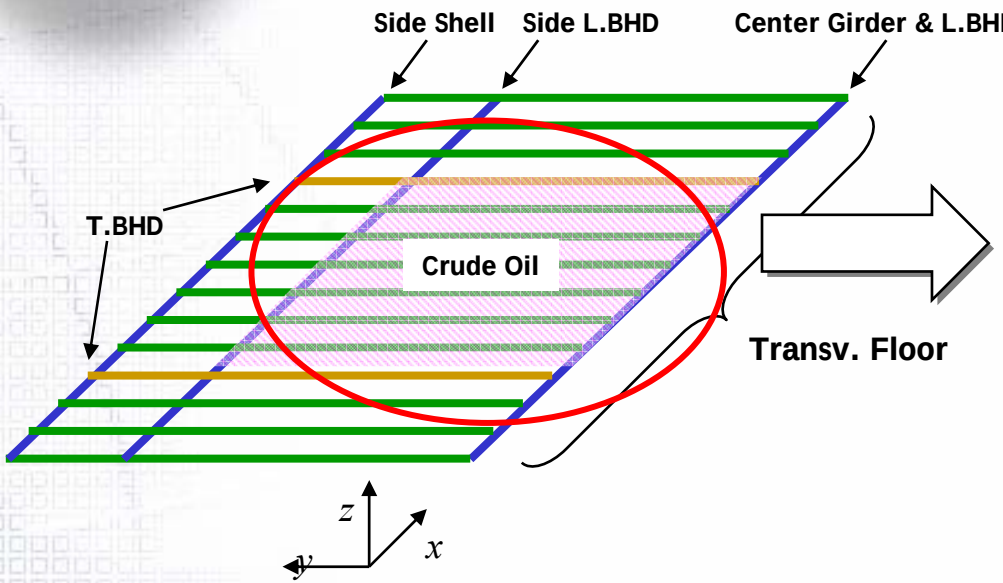
t_D - Thickness of Deck Plating

$$l \cdot D_T^{\,2} \cdot (t_B + t_D)/4$$
$$= 26.6 \cdot 18.1 \cdot (0.015 + 0.015)/4$$
$$= 65.36$$

7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

▪ 화물의 하중이 절점에 작용하는 힘



▪ 화물의 하중

$$W_{oil} = \rho_{oil} g \times (\text{CargoVolume}) = 900 \times 9.81 \times 26.6 \times 14.12 \times 18.1$$
$$= 60021422[N] = 60[MN]$$

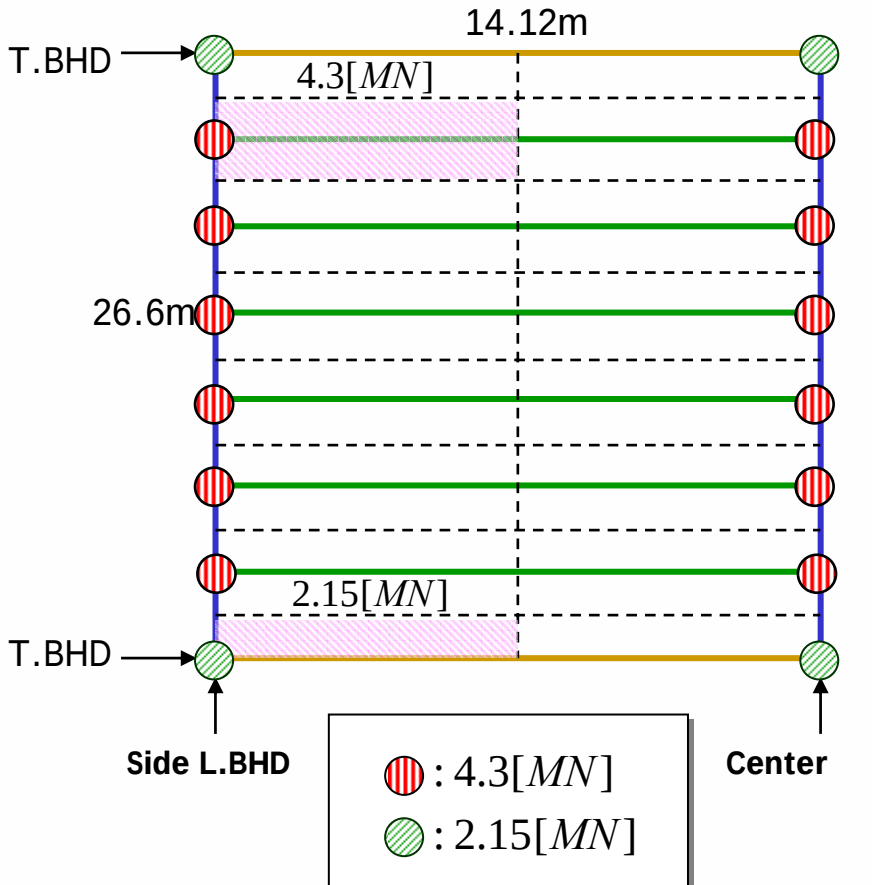
▪ 각 절점에 작용하는 하중

① L.BHD와 Tranv. Floor가 만나는 지점

$W_{oil} / 14 \approx 4.3[MN]$

② L.BHD와 T.BHD가 만나는 지점

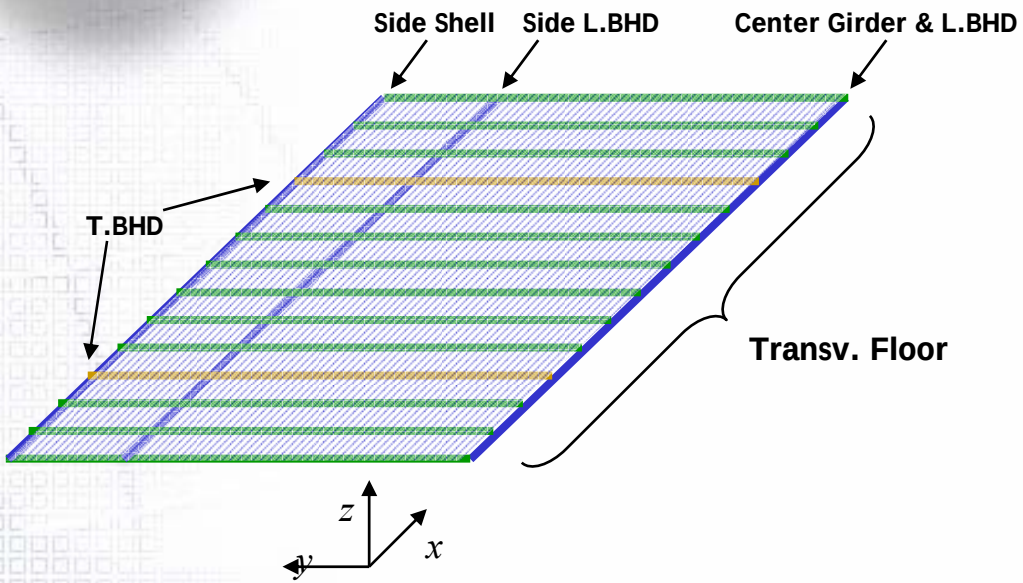
$4.3/2 = 2.15[MN]$



7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

▪ 수압이 절점에 작용하는 힘



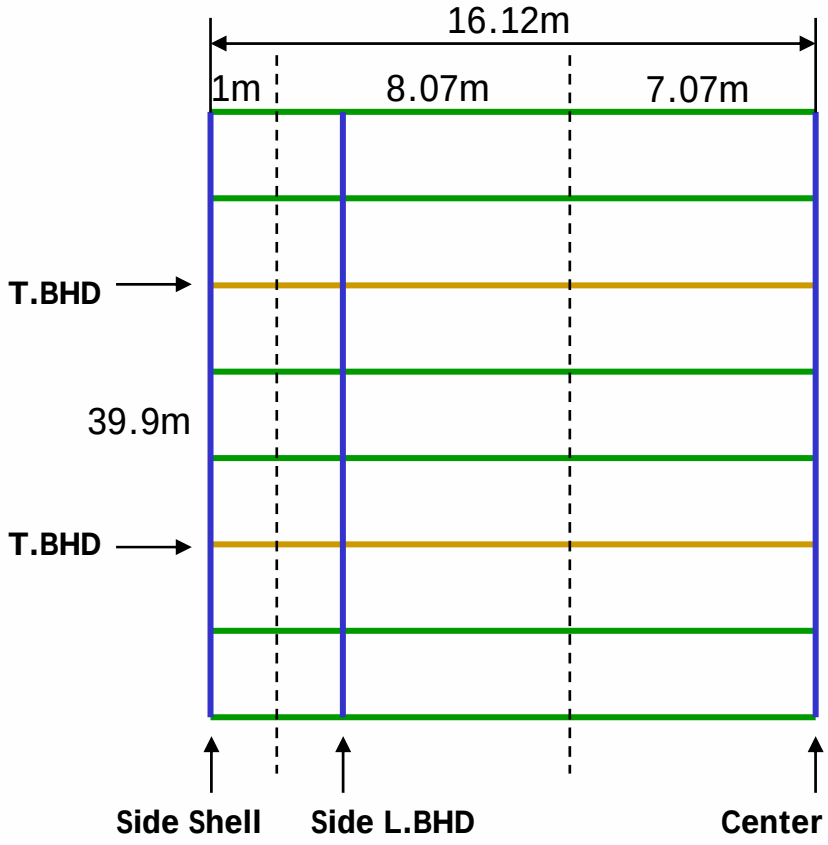
▪ 수압에 의해 받는 힘

$$B = \rho_{sea} g T \times (\text{화물창 } Bottom\text{의 넓이})$$
$$= 1024 \times 9.81 \times 14 \times (16.12 \times 39.9)$$
$$= 90455490[N] = 90.46[MN]$$

▪ 각 절점에 작용하는 하중

① 절점의 폭비로 하중을 분해 준다. (1 : 8.07 : 7.07)

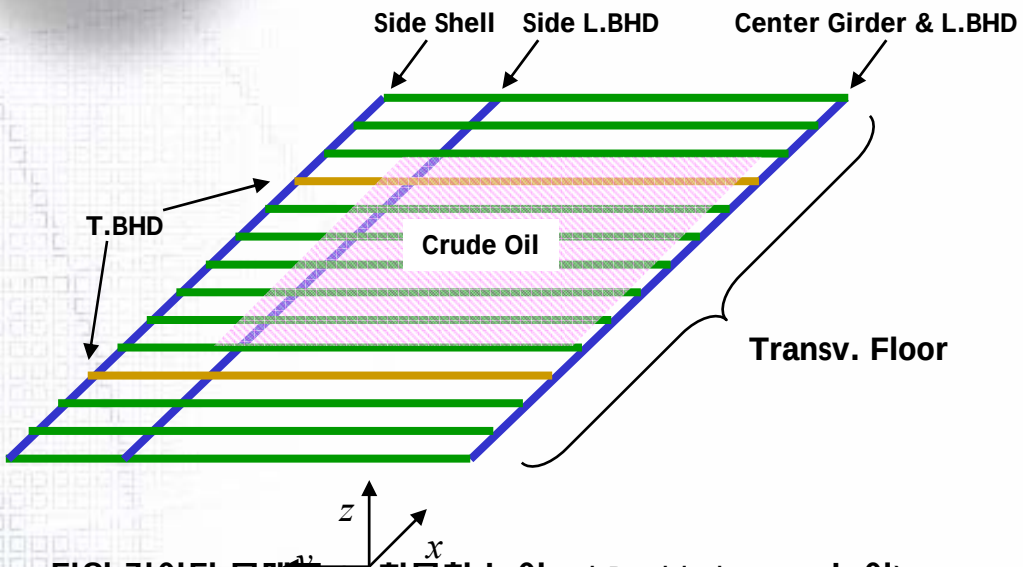
② 분해된 하중을 절점의 개수(14)로 나누어 준다.



7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

▪ 화물의 압력이 절점에 작용하는 모멘트



▪ 단위 길이당 모멘트 (D:화물창 높이 , d:Double bottom 높이)

$$= \rho_{oil} g \cdot \frac{D^2}{2} \cdot \frac{(D + d/2)}{3} = \rho_{oil} g \cdot \frac{D^2 (D + d/2)}{6}$$

$$= 1024 \cdot 9.81 \cdot \frac{18.1^2 \cdot (18.1 + 1.05)}{6}$$

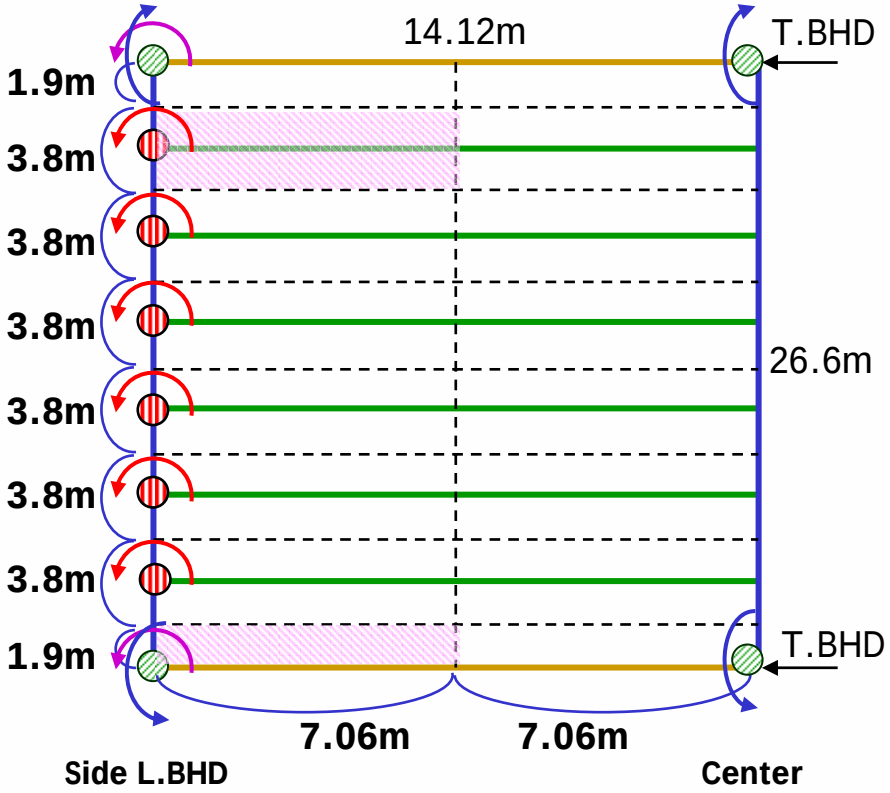
$$= 9231796[N \cdot m/m] = 9.23[MN \cdot m/m]$$

▪ 절점에 작용하는 모멘트

$$M_{x1} = (\text{단위길이당모멘트}) \times 3.8 = 35.08[MN \cdot m]$$

$$M_{x2} = (\text{단위길이당모멘트}) \times 1.9 = 17.54[MN \cdot m]$$

$$M_y = (\text{단위길이당모멘트}) \times 7.06 = 65.18[MN \cdot m]$$

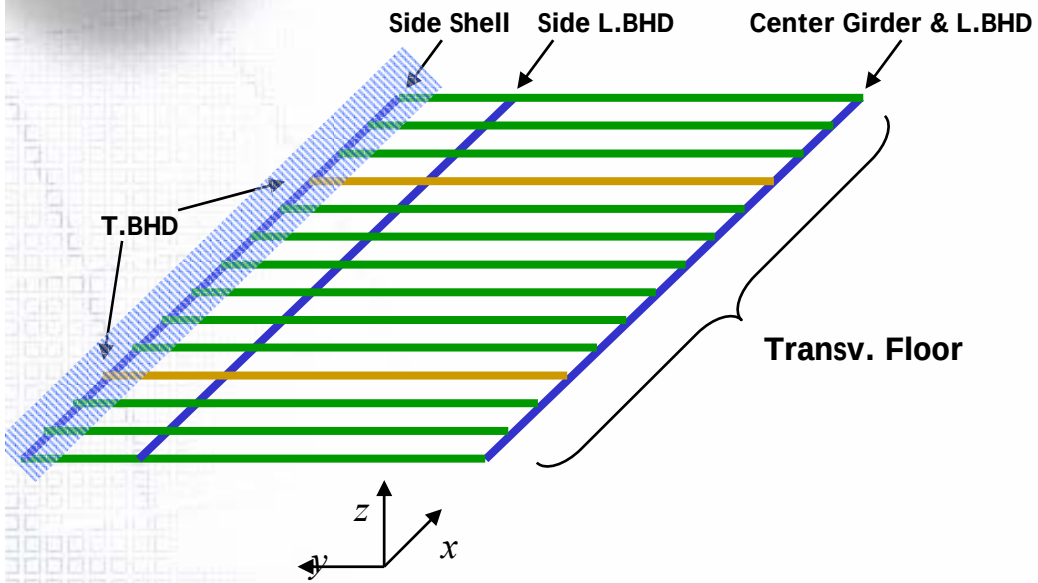


NAOE/SNU
@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이

▪ 수압에 의해 절점에 작용하는 모멘트

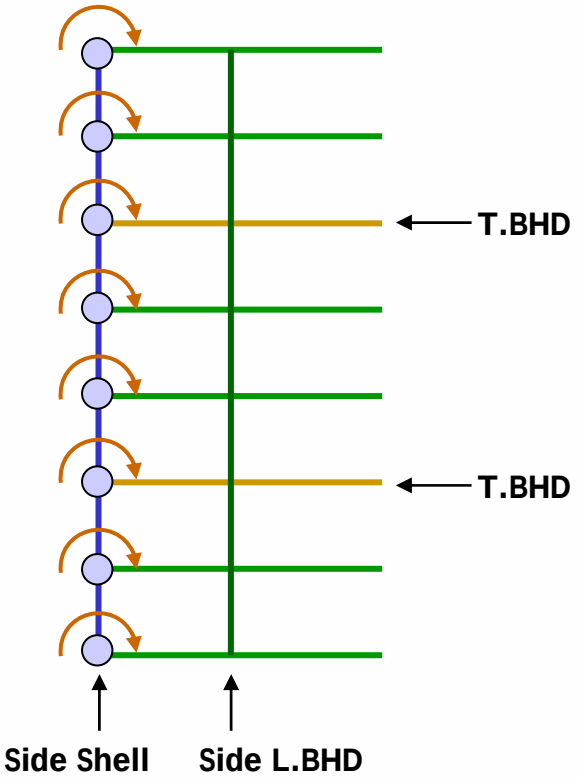


▪ 단위 길이당 모멘트 (T:흘수 , d:Double bottom 높이)

$$= \rho_{oil} g \cdot \frac{(T - d/2)^2}{2} \cdot \frac{(T - d/2)}{3} = \rho_{oil} g \cdot \frac{(T - d/2)^3}{6}$$

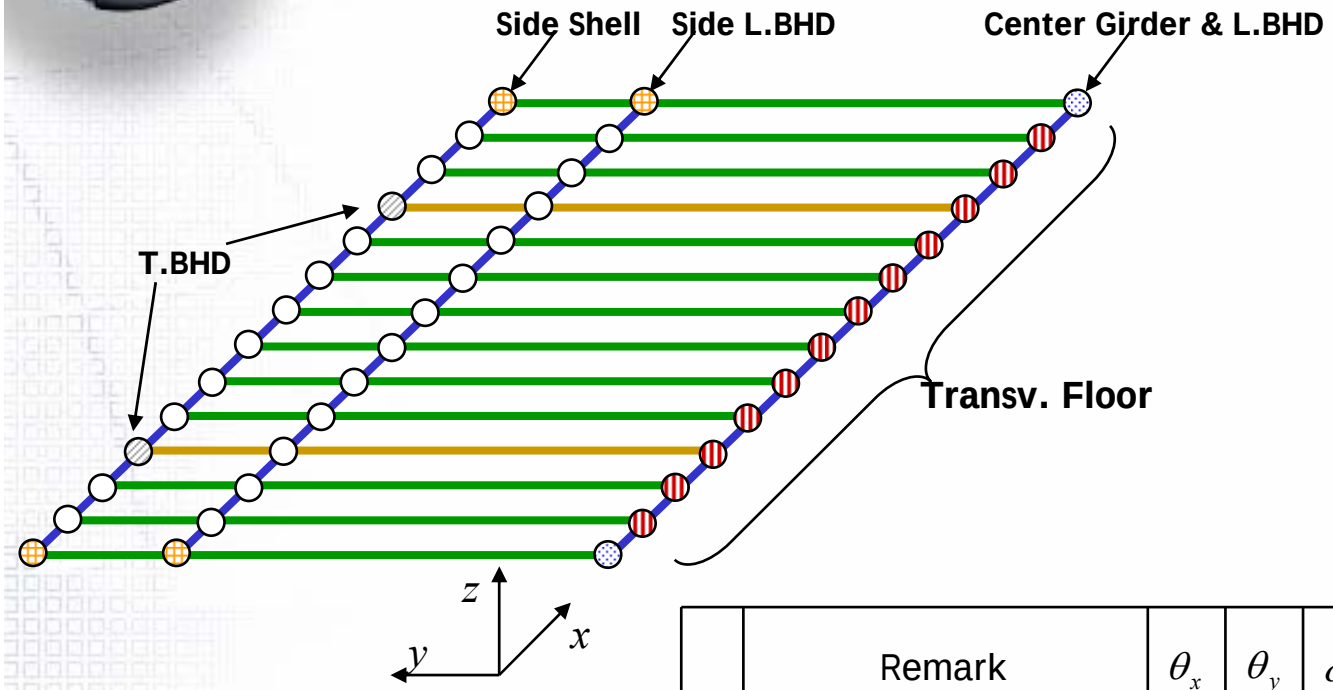
▪ 절점에 작용하는 모멘트

$$M_x = \rho_{oil} g \cdot \frac{(T - d/2)^3}{6} \times 3.8 = 82.90[MN \cdot m]$$



7.8 화물창의 Grillage 구조 해석 예제

1. 화물창을 격자 구조로 표현
2. 각 부재의 Property 계산
3. 하중 및 모멘트 조건
4. 경계 조건
5. 격자 구조 방정식 풀이



	Remark	θ_x	θ_y	δ_z	known (0 or Given)	unknown
◎	T.BHD와 Side Shell의 교차점	–	–	0	M_x, M_y, δ_z	$\theta_x,\ \theta_y,\ F_z$
◎	화물창의 가운데 지점 (symmetric condition)	–	0	–	$M_x,\ \theta_y,\ F_z$	$\theta_x,\ M_y, \delta_z$
◎	symmetric condition과 대칭조건을 모두 가지는곳	0	0	–	$\theta_x,\ \theta_y,\ F_z$	M_x, M_y, δ_z
◎	좌우 대칭조건	0	–	–	$\theta_x,\ M_y, F_z$	$M_x,\ \theta_y,\ \delta_z$
○	구속 조건이 없는 절점	–	–	–	M_x, M_y, F_z	$\theta_x,\ \theta_y,\ \delta_z$

Ch8. Grillage 구조 해석 프로그램 작성 Guide

8.1 Grillage 구조 해석 프로그램 동작 과정

8.2 Class Information

8.3 Node Class

8.4 MaterialProperty Class & NodeConnect Class

8.5 Grillage Class

8.6 Structure Class

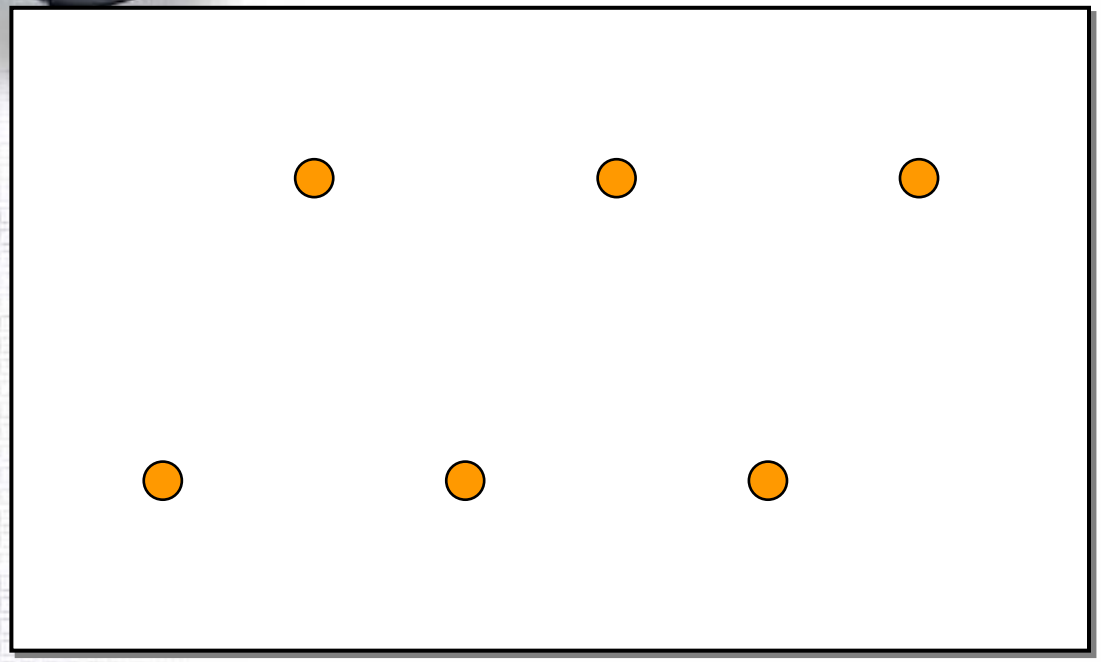
8.7 기타 참고 사항

8.8 Grillage 구조 해석 예제

8.9 화물창 예제 실행 화면

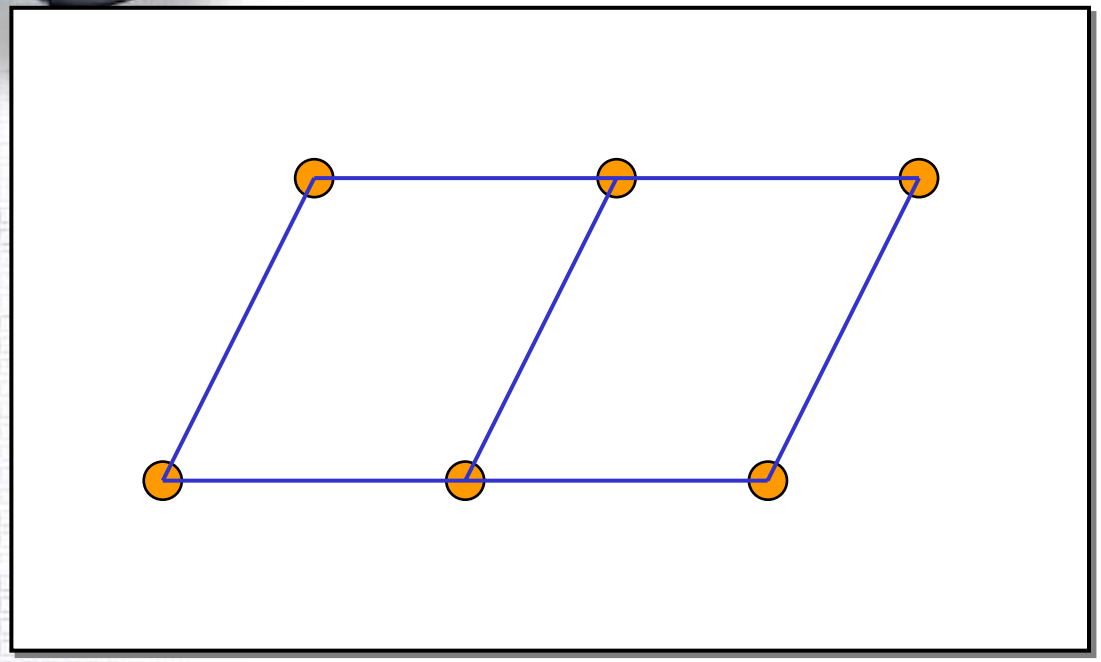
Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

8.1 Grillage 구조 해석 프로그램 동작 과정



Step1. **절점을 입력한다.**

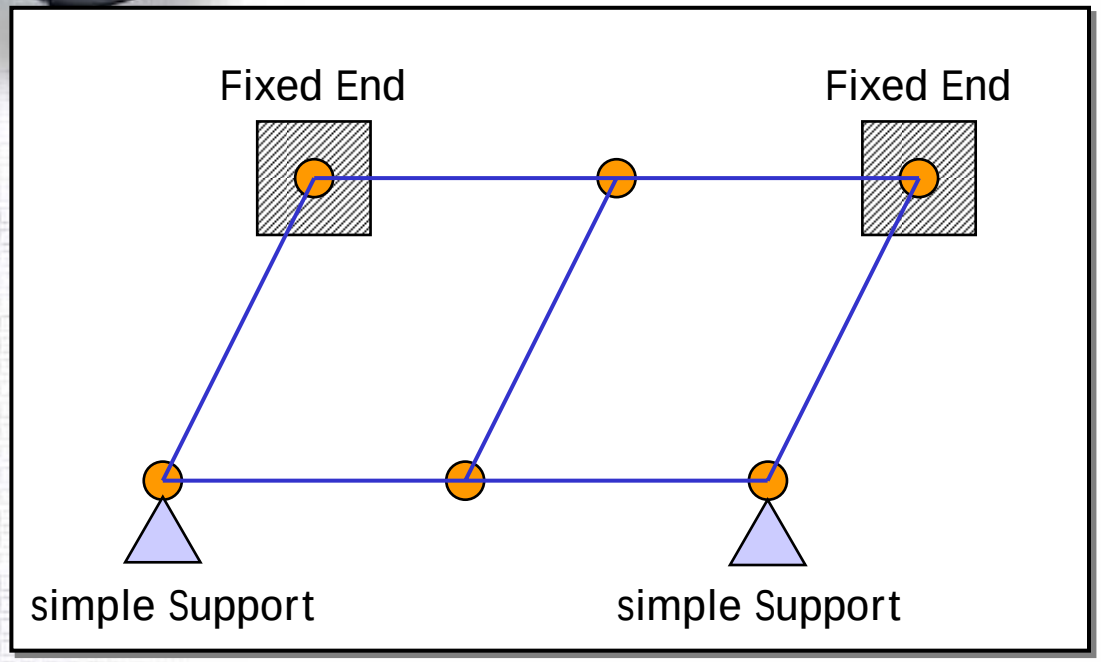
8.1 Grillage 구조 해석 프로그램 동작 과정



Step1. **절점을 입력한다.**

Step2. **절점과 절점을 연결해준다.**

8.1 Grillage 구조 해석 프로그램 동작 과정

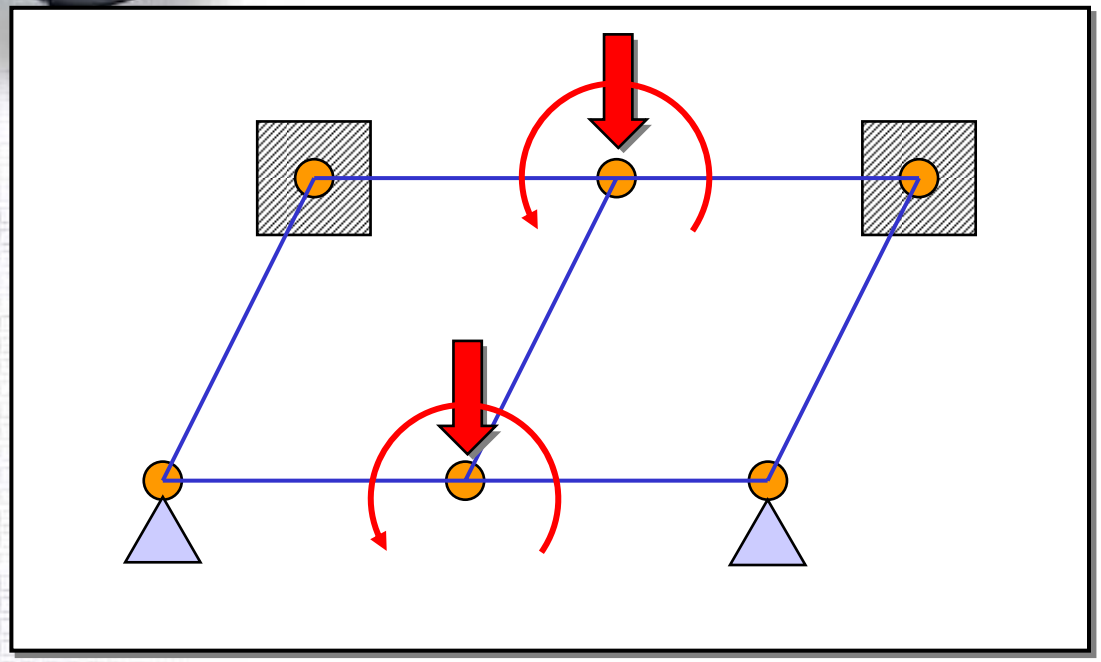


Step1. **절점을 입력한다.**

Step2. **절점과 절점을 연결해준다.**

Step3. **절점에 경계 조건을 부여한다.**

8.1 Grillage 구조 해석 프로그램 동작 과정



Step1. **절점을 입력한다.**

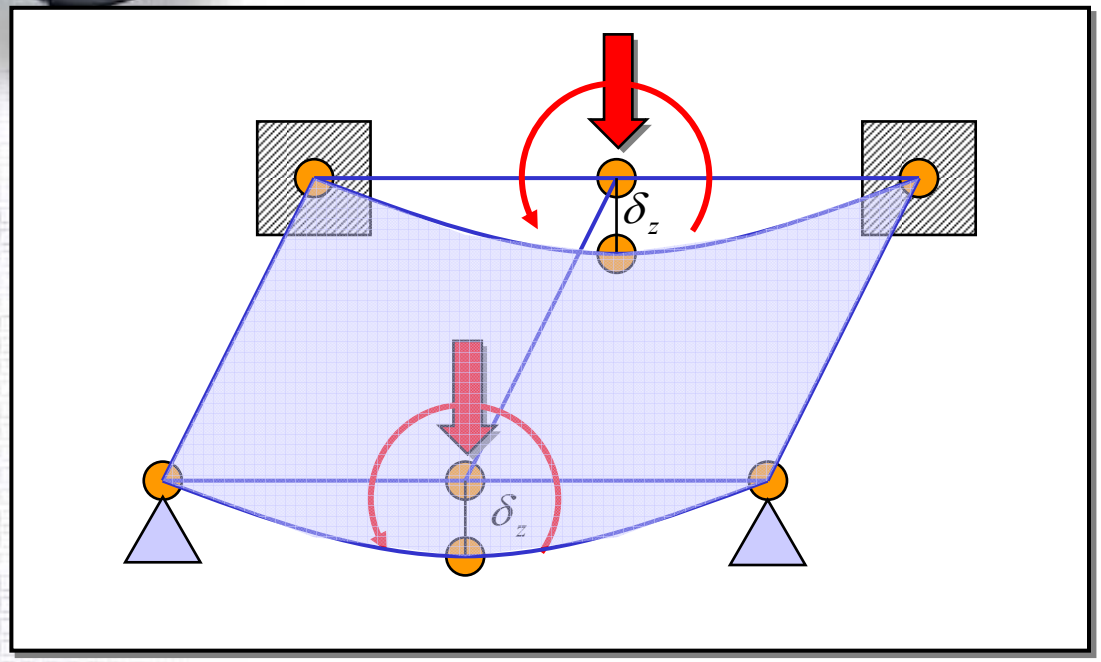
Step2. **절점과 절점을 연결해준다.**

Step3. **절점에 경계 조건을 부여한다.**

Step4. **절점에 힘과 모멘트를 준다.**

Step5. Grillage **구조 해석 수행**

8.1 Grillage 구조 해석 프로그램 동작 과정



Step1. **절점을 입력한다.**

Step2. **절점과 절점을 연결해준다.**

Step3. **절점에 경계 조건을 부여한다.**

Step4. **절점에 힘과 모멘트를 준다.**

Step5. Grillage **구조 해석 수행**

Step6. **해석결과 처짐이 발생**

MxN**개의 점을 지나는** B-spline **곡면 생성**

8.2 Class Information

Input

- **절점의 좌표**
- **경계 조건**
- **절점에 가해지는 힘과 모멘트**
- **연결된 점** (i,j)
- **연결된 점으로 이루어진 부재의 특성**(Beam Property)
- Beam **요소가** Global **좌표계와 이루는 각**

Process

1. **각 요소마다** Grillage **강성 방정식을 세움**
2. **강성 방정식을 중첩**
3. **경계 조건에 따라 알려진 값과 모르는 값을 구별**
4. **알려진 힘과 모르는 변위만으로 구성된 강성 방정식을 세워 변위를 구함**
5. **구한 변위를 중첩된 강성 매트릭스에 대입하여 미지의 힘과 모멘트를 구함**

Output

- **변위**
- **힘**
- **모멘트**

8.2 Class Information

절점의 정보를 저장할 클래스

Class Node

Vector position;

BOUNDARY BoundaryCondition;

double Force, XMoment,YMoment

double RX,RY,DZ;

Input

- **절점의 좌표**
- **경계 조건**
- **절점에 가해지는 힘과 모멘트**
- **연결된 점** (i,j)
- Beam Property
- Beam **요소가** Global **좌표계와 이루는 각**

Process

1. **각 요소마다** Grillage **강성 방정식을 세움**
2. **강성 방정식을 중첩**
3. **경계 조건에 따라 알려진 값과 모르는 값을 구별**
4. **알려진 힘과 모르는 변위만으로 구성된 강성 방정식을 세워 변위를 구함**
5. **구한 변위를 중첩된 강성 매트릭스에 대입하여 미지의 힘과 모멘트를 구함**

Output

- **변위**
- **힘**
- **모멘트**

8.2 Class Information

연결된 보요소의 정보를 저장할 클래스

```
Class NodeConnect
    double G,J,E,I;
    int StartNode,EndNode;
    double Theta
```

Input

- **절점의 좌표**
- **경계 조건**
- **절점에 가해지는 힘과 모멘트**
- **연결된 점** (i,j)
- Beam Property
- Beam **요소가** Global **좌표계와 이루는 각**

Process

1. **각 요소마다** Grillage **강성 방정식을 세움**
2. **강성 방정식을 중첩**
3. **경계 조건에 따라 알려진 값과 모르는 값을 구별**
4. **알려진 힘과 모르는 변위만으로 구성된 강성 방정식을 세워 변위를 구함**
5. **구한 변위를 중첩된 강성 매트릭스에 대입하여 미지의 힘과 모멘트를 구함**

Output

- **변위**
- **힘**
- **모멘트**

8.2 Class Information

Grillage의 강성 방정식을 저장할 클레스

```
Class Grillage
    Matrix K_Local;
    Matrix K_global;
    Matrix T;
```

Input

- 절점의 좌표
- 경계 조건
- 절점에 가해지는 힘과 모멘트
- 연결된 점 (i,j)
- Beam Property
- Beam 요소가 Global 좌표계와 이루는 각

Process

1. 각 요소마다 Grillage 강성 방정식을 세움
2. 강성 방정식을 중첩
3. 경계 조건에 따라 알려진 값과 모르는 값을 구별
4. 알려진 힘과 모르는 변위만으로 구성된 강성 방정식을 세워 변위를 구함
5. 구한 변위를 중첩된 강성 매트릭스에 대입하여 미지의 힘과 모멘트를 구함

Output

- 변위
- 힘
- 모멘트

8.2 Class Information

전체 구조물의 정보를 저장하고
2~5의 Process를 수행할 클래스

Class Structure

```
Node m_Node[100];
NodeConnect m_NodeConnect[100];
Grillage m_Grillage[100];
void CalcStructure();
```

Input

- **절점의 좌표**
- **경계 조건**
- **절점에 가해지는 힘과 모멘트**
- **연결된 점** (i,j)
- Beam Property
- Beam **요소가** Global **좌표계와 이루는 각**

Process

1. **각 요소마다** Grillage **강성 방정식을 세움**
2. **강성 방정식을 중첩**
3. **경계 조건에 따라 알려진 값과 모르는 값을 구별**
4. **알려진 힘과 모르는 변위만으로 구성된 강성 방정식을 세워 변위를 구함**
5. **구한 변위를 중첩된 강성 매트릭스에 대입하여 미지의 힘과 모멘트를 구함**

Output

- **변위**
- **힘**
- **모멘트**

8.3 Node Class

```
class Node
{
public:
   Vector Point;          //절점의 위치
   int PointOrder;        //절점의 번호
   int isConnect;         //Connetion이 있는지 알아보기위한 변수

   BoundaryCondition m_BC;       //Boundary Condition
   double MX,MY,F;     // x축 중심의 moment, y축 중심의 moment, 수직하중
   double ThetaX,ThetaY,DeltaZ; //x축 모멘트에 의한 변형, y축 모멘트에 의한 변형, 수직하중에 의한 변형

   //Setter
   void Set(Vector point,int order, BoudaryCondition BC,double mx,double my,double f);
   ...
   //Getter
   double GetForce();
   double GetXMoment();
   ...
};
```

8.4 MaterialProperty Class & NodeConnect Class

```
class MaterialProperty
{
public:
   double G,J,E,I;     //G: 전단탄성계수, J:비틂상수, E:인장탄성계수, I:단면2차모멘트
   void Set(double _G,double _J,double _E,double _I);
};

class NodeConnect
{
public:
   Node *Start;        //시작 절점의 주소값
   Node *End;          //끝 절점의 주소값
   string Name;        //부재 이름
   MaterialProperty m_Material;          //부재의 Property
};
```

8.5 Grillage Class

```
class Grillage
{
public:
   //constructor
   Grillage (NodeConnect NC);

   //Grillage Property
   double theta,L;                  //부재가 Global 좌표계에서 기울어진 각도, 부재의 길이
   MaterialProperty Material;       //부재의 Property(G,J,E,I)

   //Node Position & Number
   Vector StartNode, EndNode;     //시작 절점의 위치, 끝 절점의 위치
   int Start_nodeNumber, End_nodeNumber;              //시작 절점의 번호, 끝절점의 번호

   //Stiffeness Matrix
   Matrix T;                        //좌표변환을 위한 회전행렬
   Matrix K_Local;                  //Local 좌표계 에서의 강성 매트릭스
   Matrix K_Global;                 //Global 좌표계에서의 강성 매트릭스

   //Member Function
   void Create_K_Local();           //Local 좌표계의 강성 매트릭스 생성
   void Create_T();                 //좌표변환 매트릭스 생성
   void Create_K_Global();          //Global 좌표계의 최종 매트릭스 생성
}
```

8.6 Structure Class (1)

```
class Structure
{
public:

   //member Variables
   Matrix Force;                    //힘과 모멘트를 저장
   Matrix delta;                    //회전변위와 수직변위를 저장
   Matrix TotalMatrix;              //중첩될 메트릭스

   std::vector<Grillage> m_Grillage;          //grillage 를 저장
   std::vector<Node*> m_Node;                 //Node의 정보를 pointer로 저장
   std::vector<NodeConnect> m_NodeConnect;          //연결 Grillage의 정보를 저장
```

8.6 Structure Class (2)

```
//member Function
   void AddNodePoint(Vector);                  //node를 추가
   void DeleteNodePoint(int NodeIndex);        //node를 삭제

   void AddForceMoment(int NodeIndex,double mx,double my,double f);
   void ChangeForce(int NodeIndex,double f);
   void ChangeXMoment(int NodeIndex,double mx);
   void ChangeYMoment(int NodeIndex,double my);

   void AddBoundaryCondition(int NodeIndex,BoudaryCondition BC);
   void ChangeBoundaryCondition(int NodeIndex,BoundaryCondition BC);

   void ConnectNode(int,int,MaterialProperty,string);
   void DisconnectNode(int ConnectIndex);

   void CreateGrillage();              //중첩된 강성 매트릭스를 생성, 변위와 하중조건도 생성
   void DecomposeMatrix(...);          //Matrix를 분해하여 중첩시키는 함수
}
```

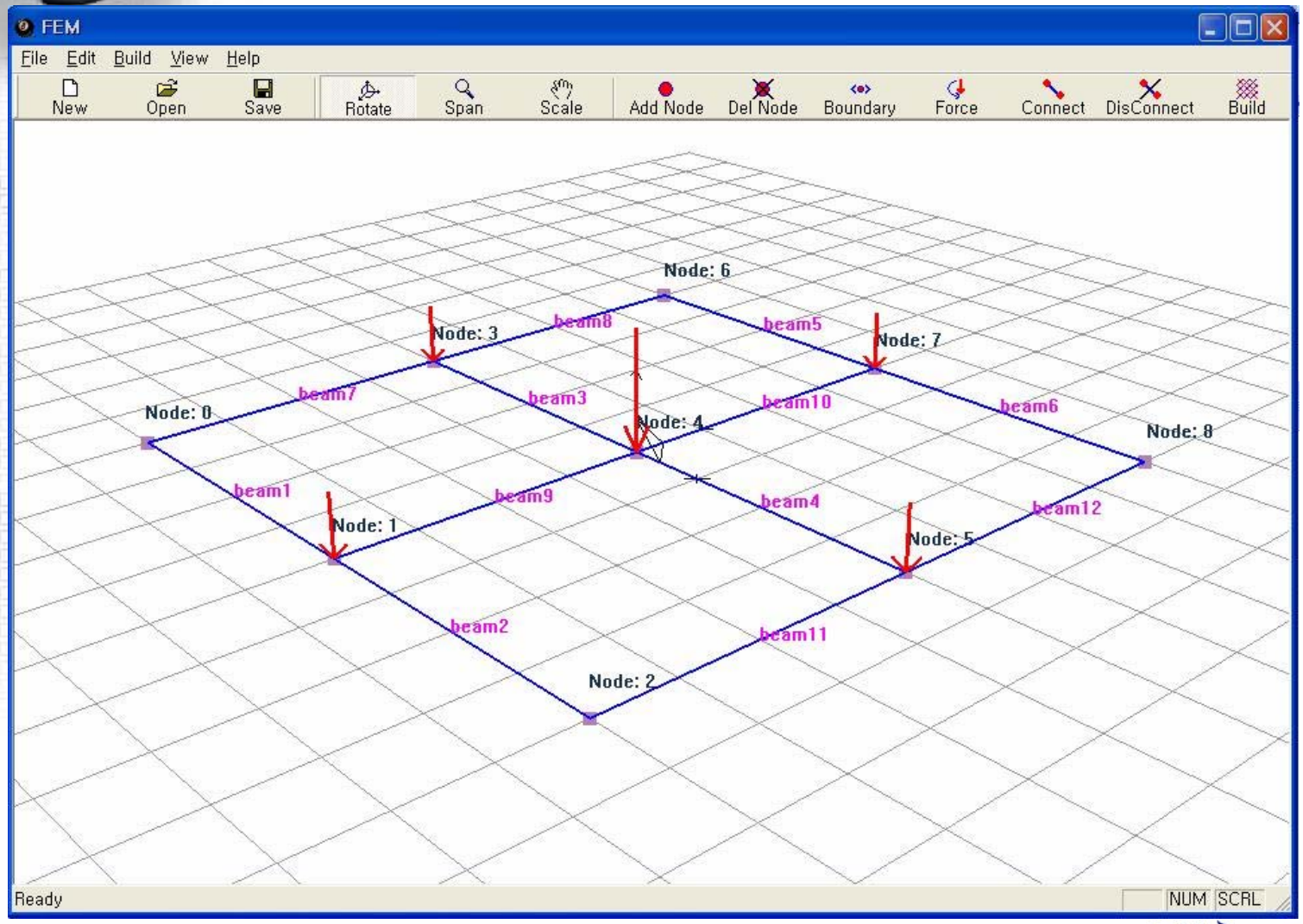
8.7 기타 참고 사항

- Matrix Class : **행렬의 기본적인 모든 연산이 수행될 수 있어야 함**
  ex) Inverse Matrix, Transpose, Determinant, Change Row, Change Column, SetMatrixElement,... **등의 함수 필요**.

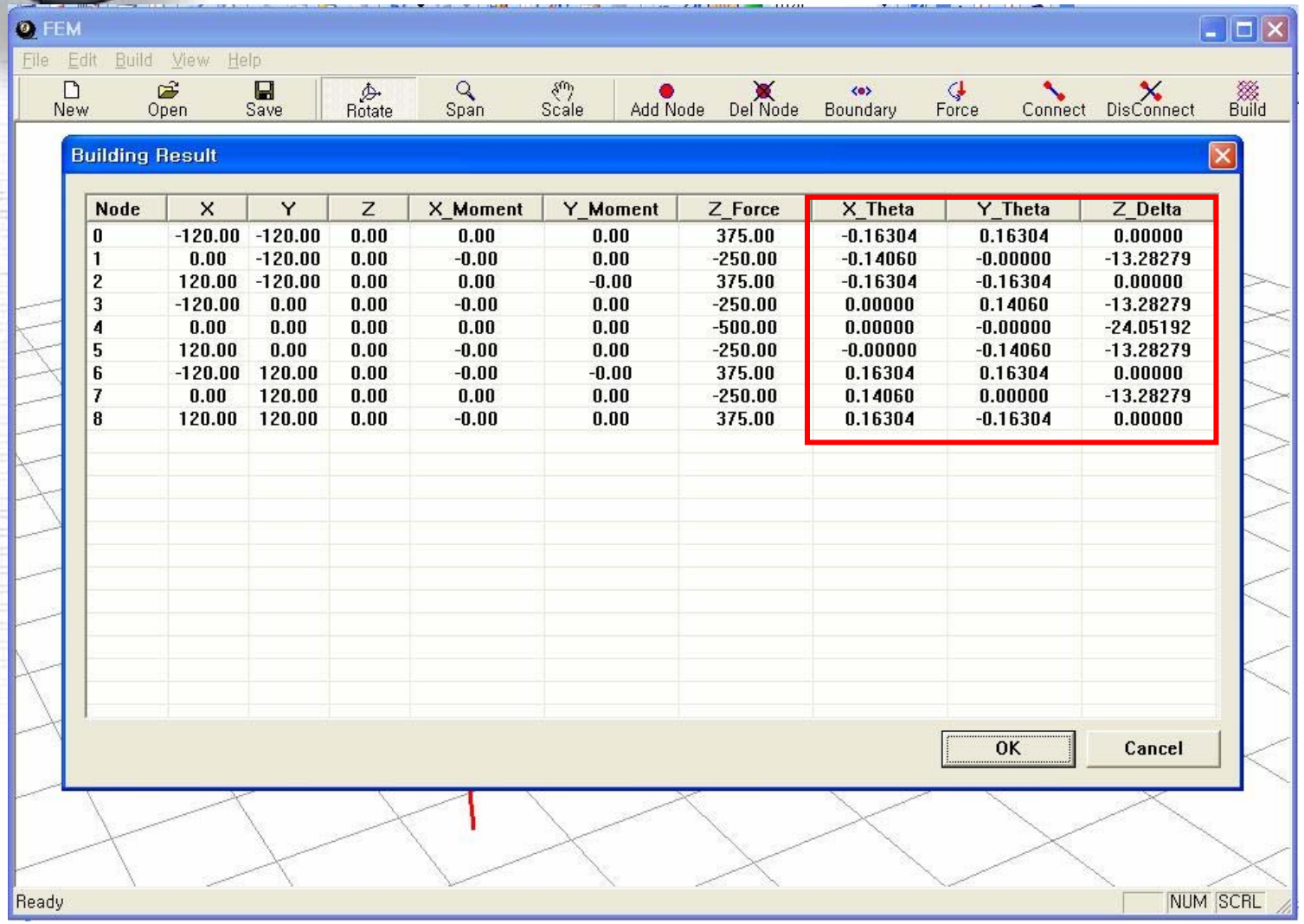
- Vector Class : **점의 좌표를 저장하는 클래스**
  (tip1) **부재의 길이를 계산할 때, 두점 사이의 거리를 계산하도록 한다.**
  (tip2) **부재가** Global **좌표계에서 기울어진 각도를 계산할 수 있도록 한다.**

- std::vector Templete**의 사용**
  (**장점**) 1. **동적할당할 필요없이 배열을 생성할 수 있다.**
  2. **배열에 변수를 추가하거나 삭제하는 것이 용이함.**
  (**단점**) Debug**할 때, 배열에 저장된 값을 볼 수 없다.**

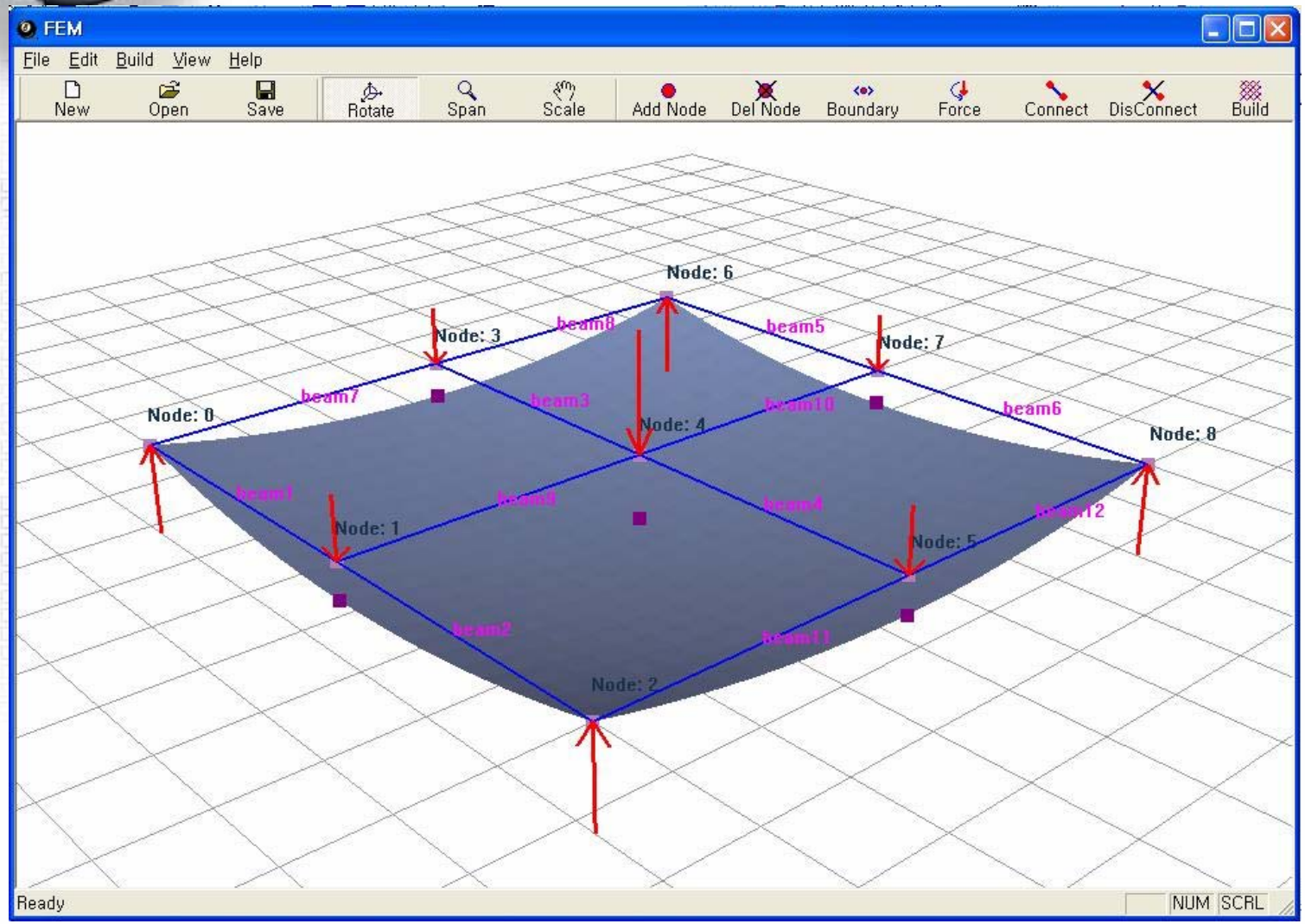
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (1)



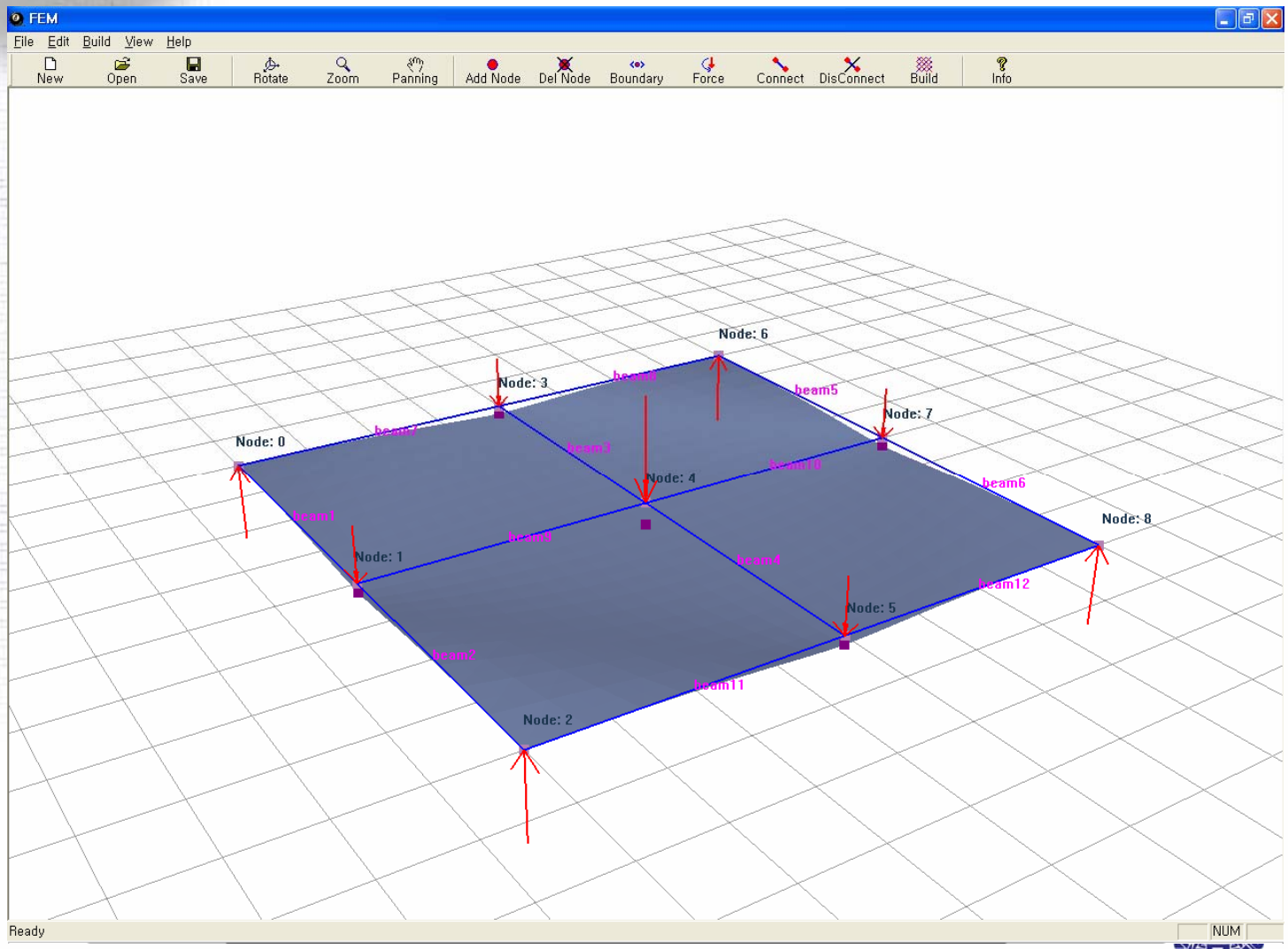
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (1)



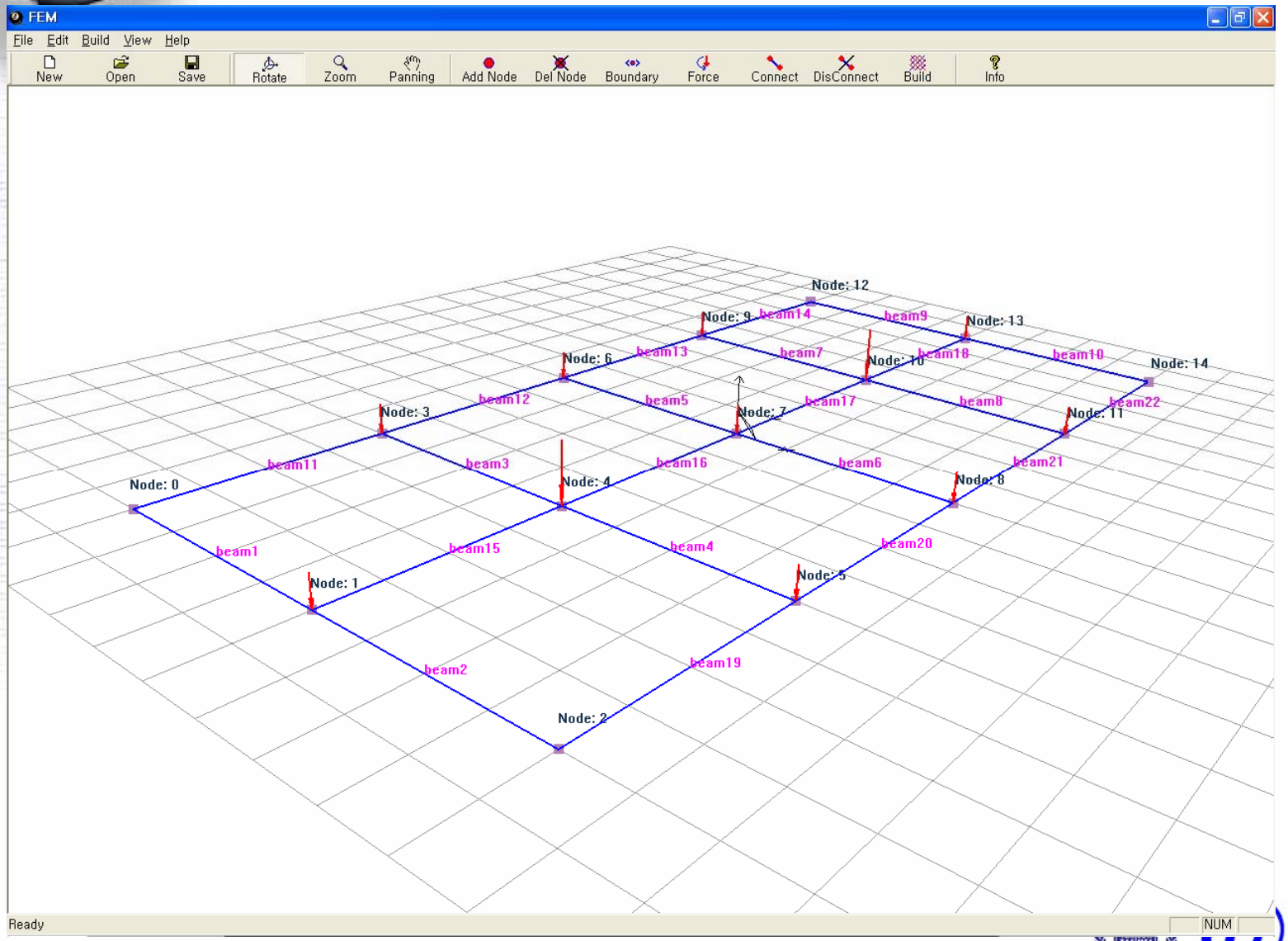
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (1)



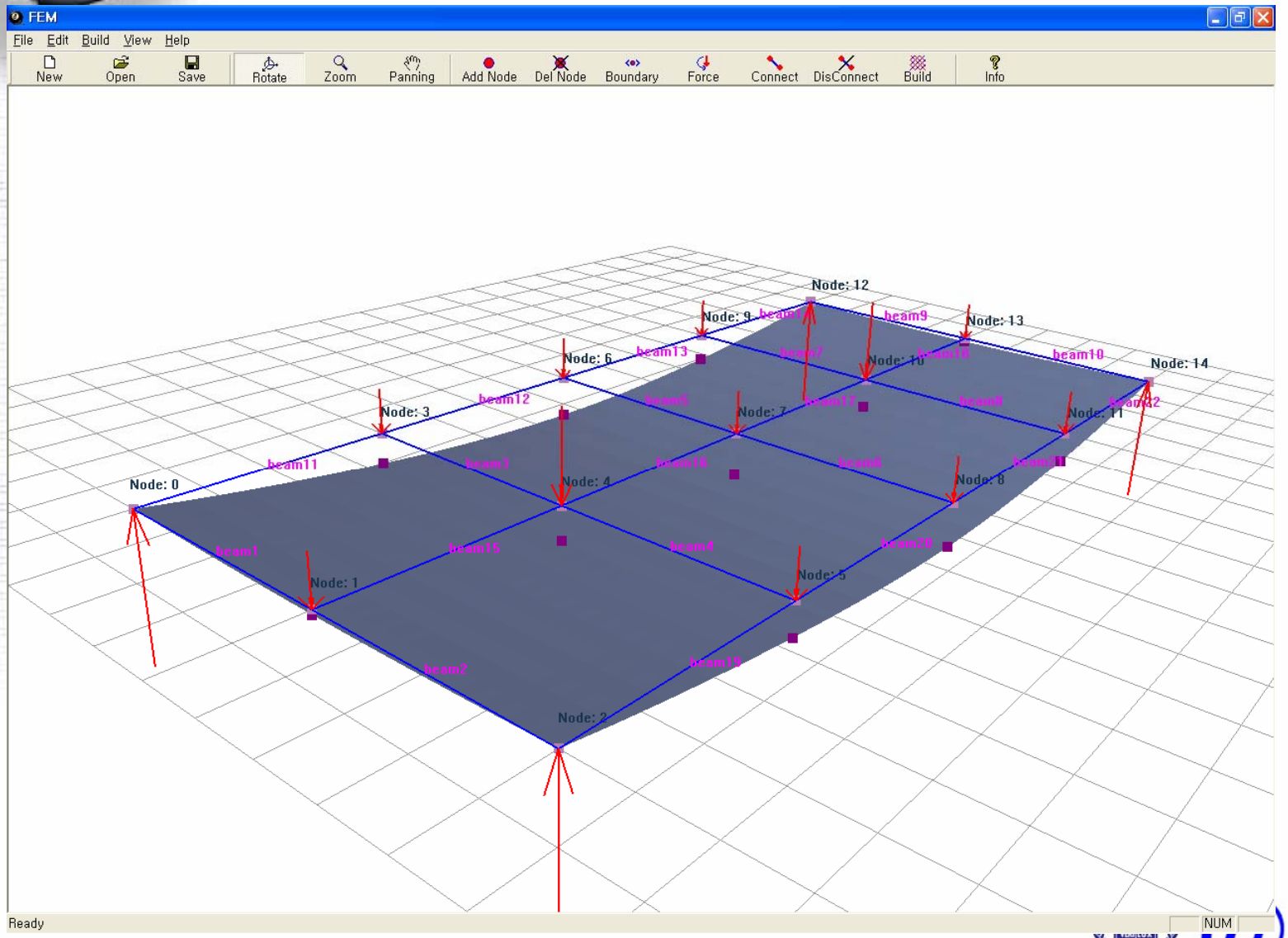
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (1)



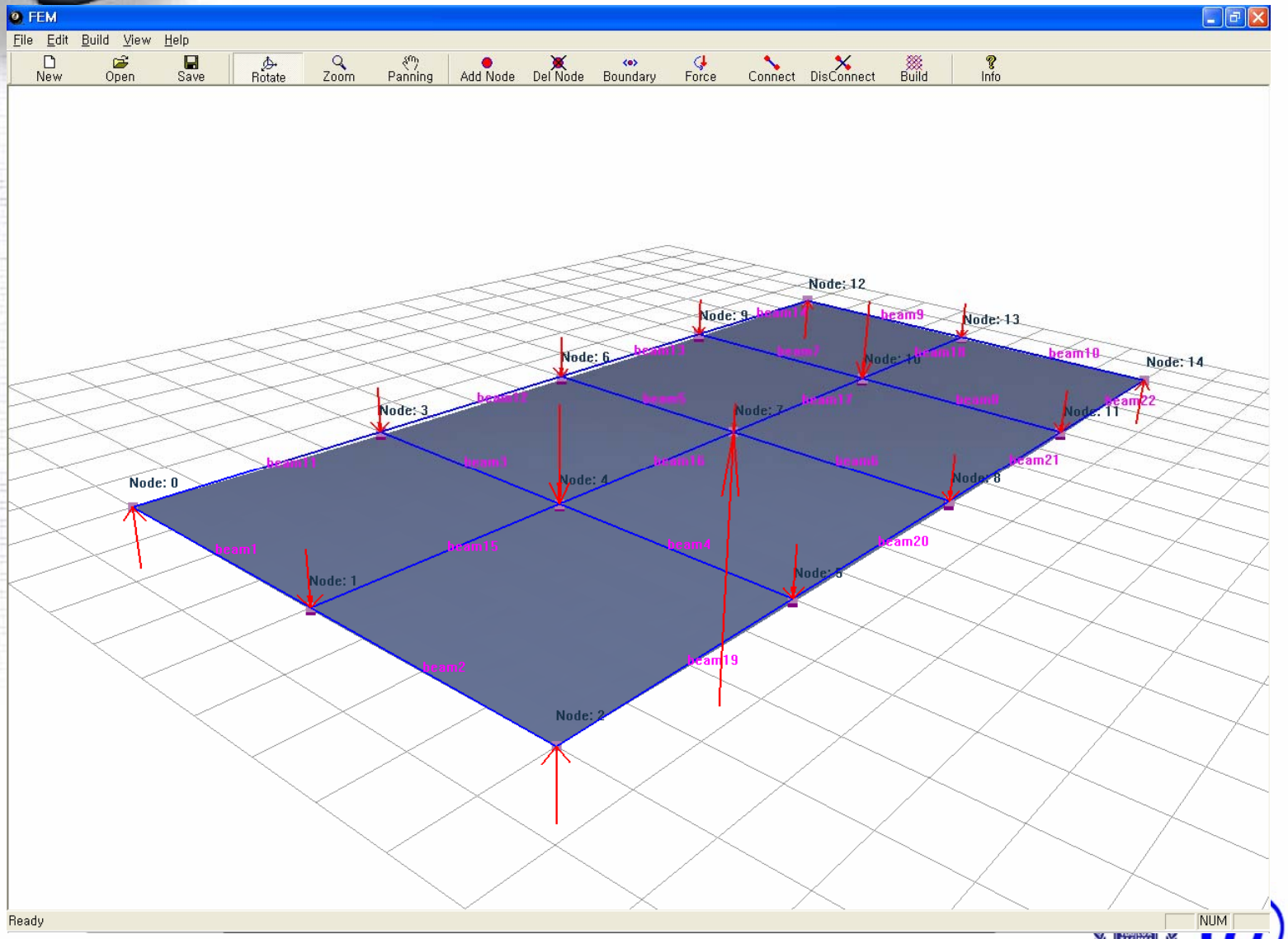
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (2)



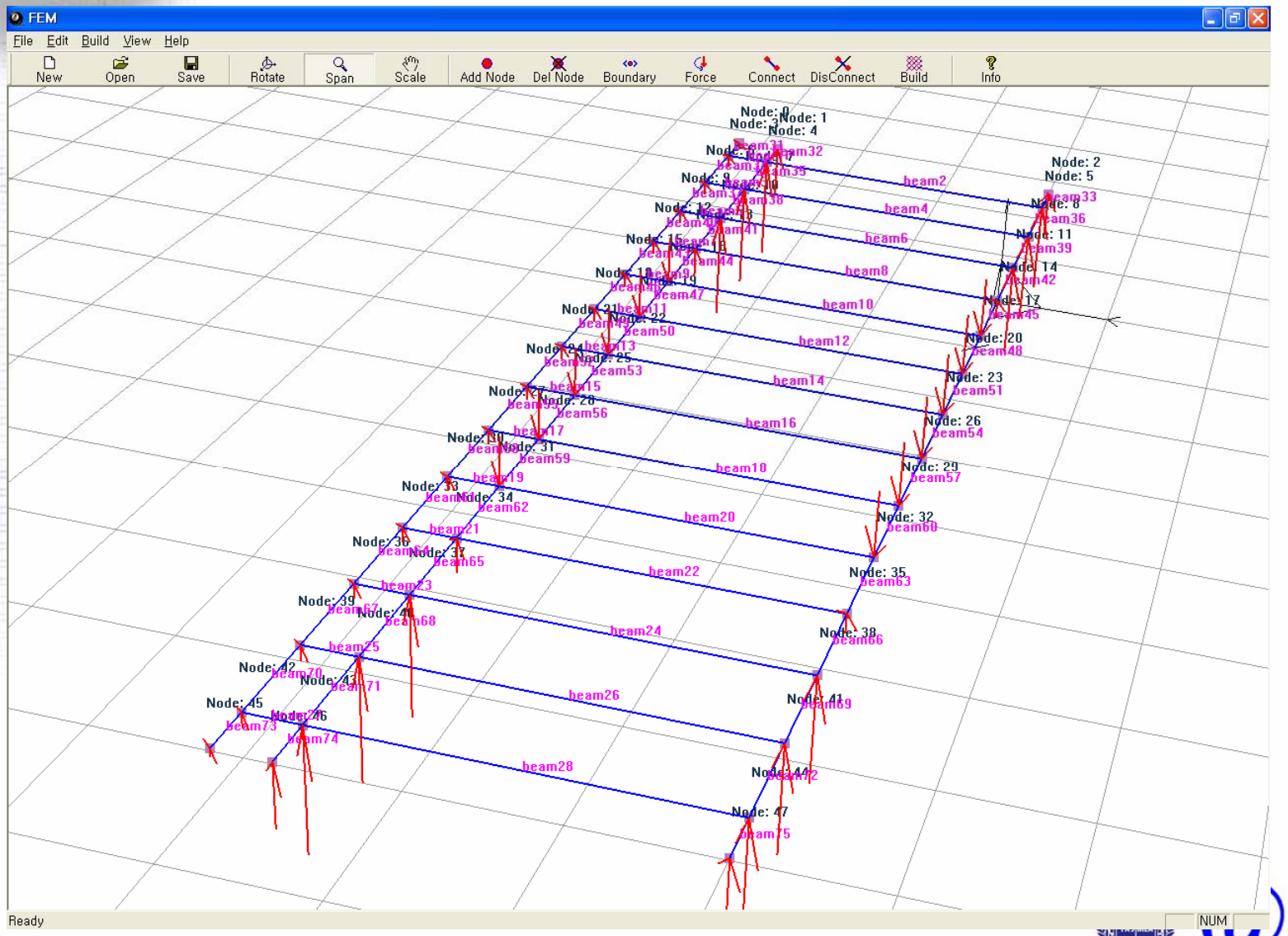
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (2)



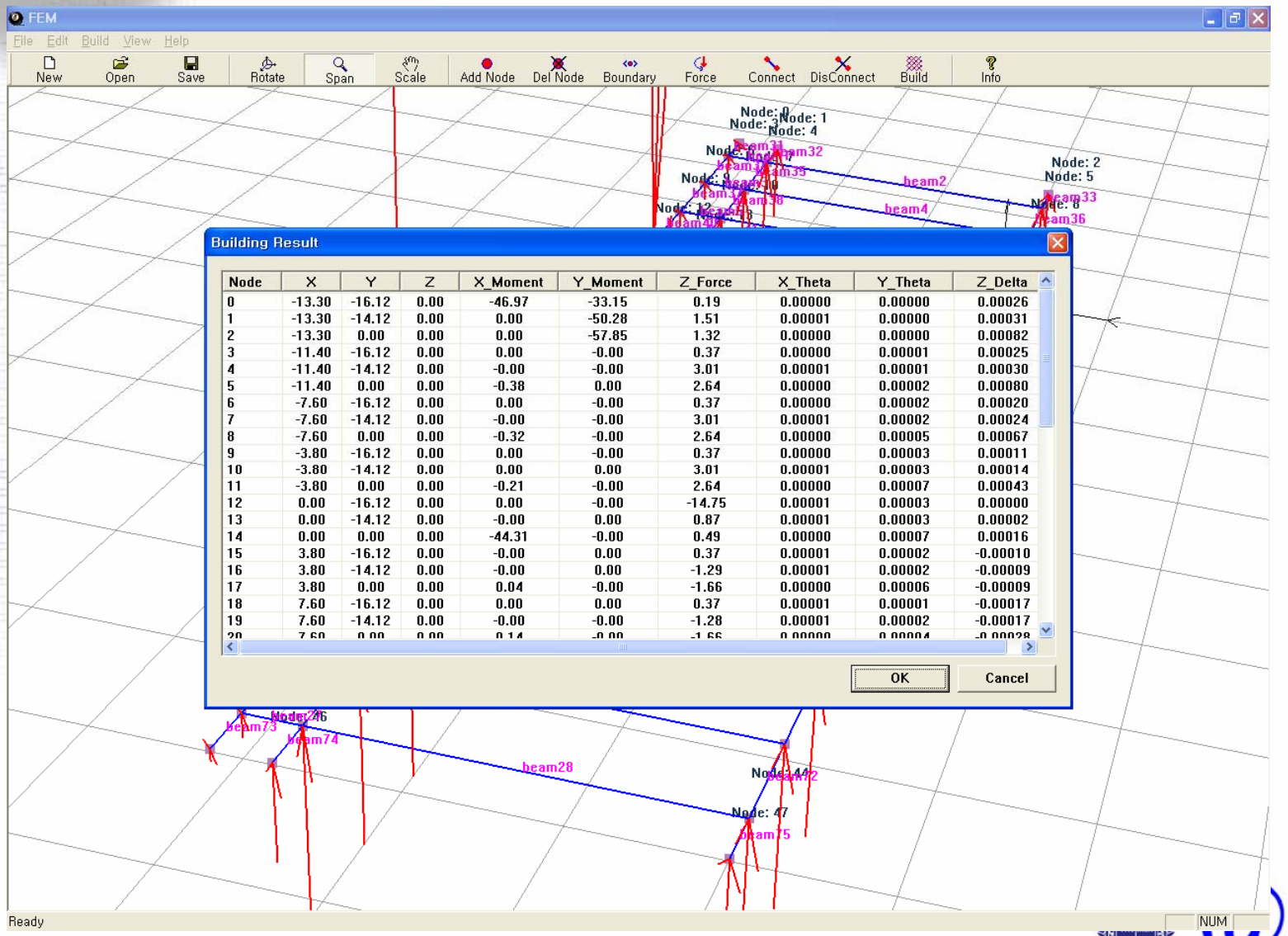
8.8 Grillage 구조 해석 예제 (2)



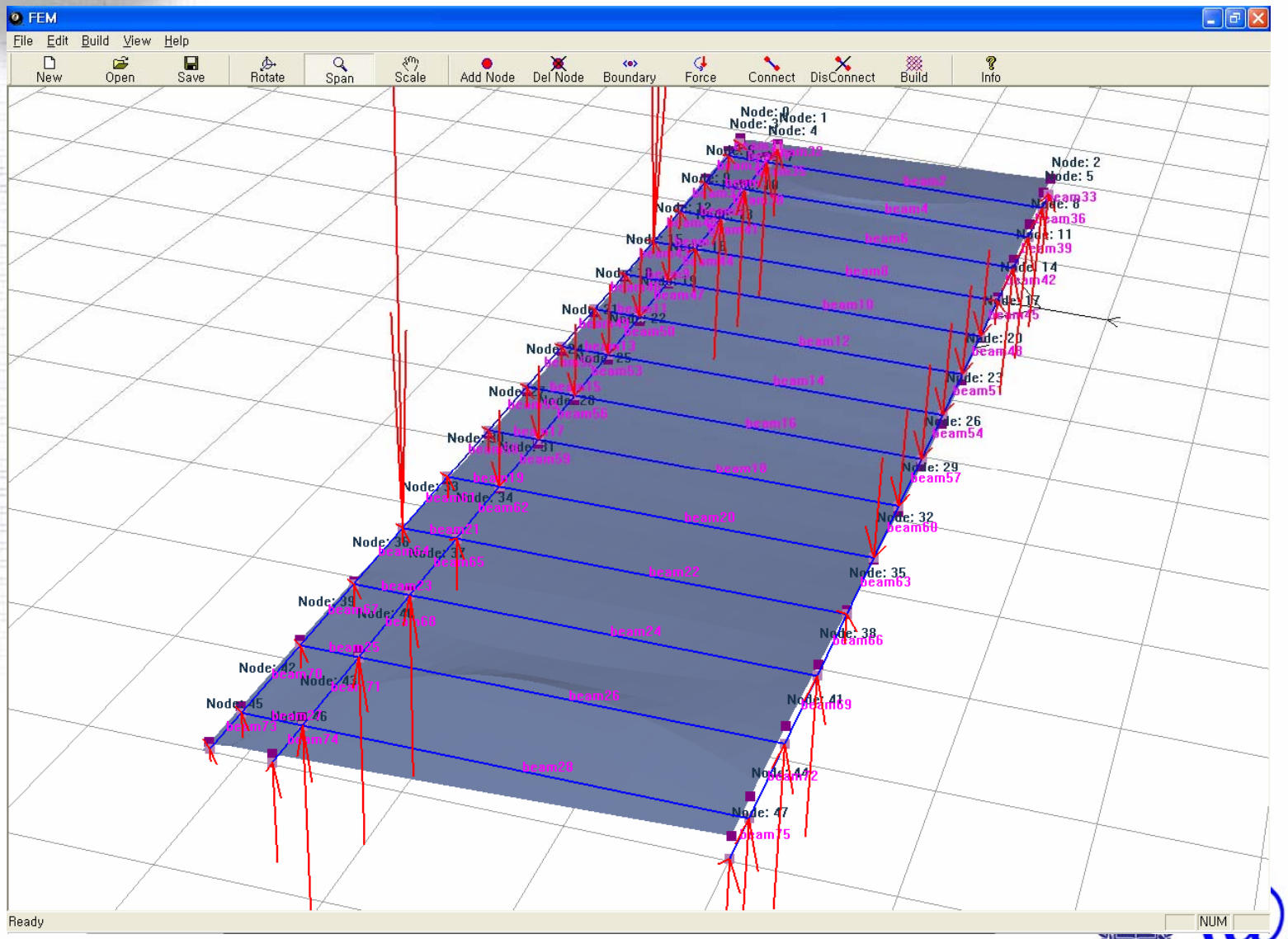
8.9 화물창 예제 실행 화면



8.9 화물창 예제 실행 화면



8.9 화물창 예제 실행 화면



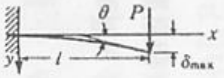
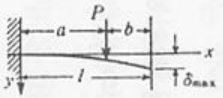
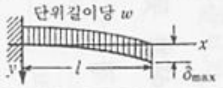
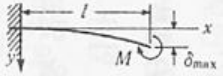
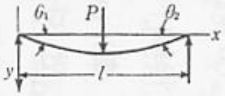
Appendix A
보의 처짐 공식 Table[1)]

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

1) S. Timochenko, **임상전 편저**, "**재료역학**", **문운당** 2002 , pp 288~289

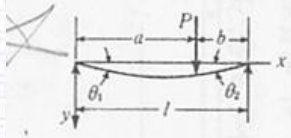
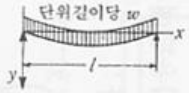
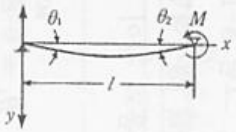
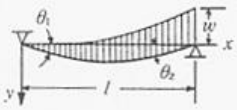
보의 처짐 공식 Table (I)

표 8-1 보의 처짐공식

보 의 형 식	자유단에서의 경사각	임의의 단면 x에서의 처짐 (+의 y-축은 하향임)	최 대 처 짐 량
1. 외팔보－자유단에 집중하중 P			
	$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI}(3l-x)$	$\delta_{max} = \frac{Pl^3}{3EI}$
2. 외팔보－임의점에 집중하중 P			
	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	구간 $0<x<a$에서는 $y = \frac{Px^2}{6EI}(3a-x)$ 구간 $a<x<l$에서는 $y = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)$	$\delta_{max} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$
3. 외팔보－균일분포하중 : 세기 w			
	$\theta = \frac{wl^3}{6EI}$	$y = \frac{wx^2}{24EI}(x^2+6l^2-4lx)$	$\delta_{max} = \frac{wl^4}{8EI}$
4. 외팔보－균일변화하중 : 최대세기 w			
	$\theta = \frac{wl^3}{24EI}$	$y = \frac{wx^2}{120lEI}(10l^3-10l^2x+5lx^2-x^3)$	$\delta_{max} = \frac{wl^4}{30EI}$
5. 외팔보－자유단에 우력 M			
	$\theta = \frac{Ml}{EI}$	$y = \frac{Mx^2}{2EI}$	$\delta_{max} = \frac{Ml^2}{2EI}$
6. 양단자유지지보－중앙점에 집중하중 P			
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	구간 $0<x<\frac{l}{2}$ 에서는 $y = \frac{Px}{12EI}\left(\frac{3l^2}{4}-x^2\right)$	$\delta_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}$

보의 처짐 공식 Table (II)

표 8-1 보의 처짐공식(계속)

보 의 형 식	양단에서의 경사각	임의의 단면 x에서의 처짐 (+의 y-축은 하향임)	최 대 처 짐 량 중앙점의 처짐량
7. 양단자유지지보－임의의 점에 집중하중 P			
	좌단 $\theta_1 = \frac{Pb(l^2-b^2)}{6lEI}$ 우단 $\theta_2 = \frac{Pab(2l-b)}{6lEI}$	구간 $0<x<a$에서는 $y = \frac{Pbx}{6lEI}(l^2-x^2-b^2)$ 구간 $a<x<l$에서는 $y = \frac{Pb}{6lEI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right]$	$x = \sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$ 에서 $\delta_{max} = \frac{Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}lEI}$ $a>b$이면 중앙점에서는 $\delta = \frac{Pb}{48EI}(3l^2-4b^2)$
8. 양단자유지지보－균일분포하중 : 세기 w			
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{wl^3}{24EI}$	$y = \frac{wx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$	$\delta_{max} = \frac{5wl^4}{384EI}$
9. 양단자유지지보－우단에 우력 M			
	$\theta_1 = \frac{Ml}{6EI}$ $\theta_2 = \frac{Ml}{3EI}$	$y = \frac{Mlx}{6EI}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$	$x = l/\sqrt{3}$ 에서 $\delta_{max} = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ 중앙점에서 $\delta = \frac{Ml^2}{16EI}$
10. 양단자유지지보－균일변화하중 : 최대세기 w			
	$\theta_1 = \frac{7wl^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{wl^3}{45EI}$	$y = \frac{wx}{360lEI}(7l^4-10l^2x^2+3x^4)$	$x = 0.519l$에서 $\delta_{max} = 0.00652\frac{wl^4}{EI}$ 중앙점에서 $\delta = 0.00651\frac{wl^4}{EI}$