Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

(벡터미분법, 기울기, 발산, 회전)

NAVER 백과사전

벡터의 정의:

크기와 방향을 가지고 있는 양으로써 두 가지 정보를 모두 표현할 수 있는 화살표로 나타낸다.

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl (벡터미분법, 기울기, 발산, 회전)

- 벡터미분학은 고체역학, 유체의 흐름, 열전도, 전자기학 등에서 유용한 도구.
- 벡터함수와 벡터장이 항공기, 레이저 발생기, 열역학 시스템, 또는 핵융합로와 같은 시스템의 기본.
- 내용 : 벡터의 기본적인 연산, 벡터미분, 곡선상으로의 응용

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **스칼라(Scalar) :** 적당한 척도(scale)를 단위로 하여 그것의 크기에 의하여 결정되는 양

  예) 길이, 온도, 전압

- **벡터(Vector) :** 크기와 방향에 의하여 결정되는 양. 따라서 화살표이거나 또는 방향선분(Directed Line Segment) 임.

  예) 힘, 속도, 자기장, 전기장

- 벡터의 표시: 굵은 소문자 **a**, **b**, **v** 등으로 나타냄. 수기할 때는 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ 와 같이 화살꼴을 사용. 벡터의 꼬리를 시작점(initial point), 뾰족한 끝을 끝점(terminal point)라 함.

- |**a**| : 화살표의 시작점과 끝점 사이의 거리.
  벡터의 길이 (또는 크기) 또는 norm (Euclidean norm)

- 길이가 1인 벡터를 단위벡터(Unit Vector)라 함

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

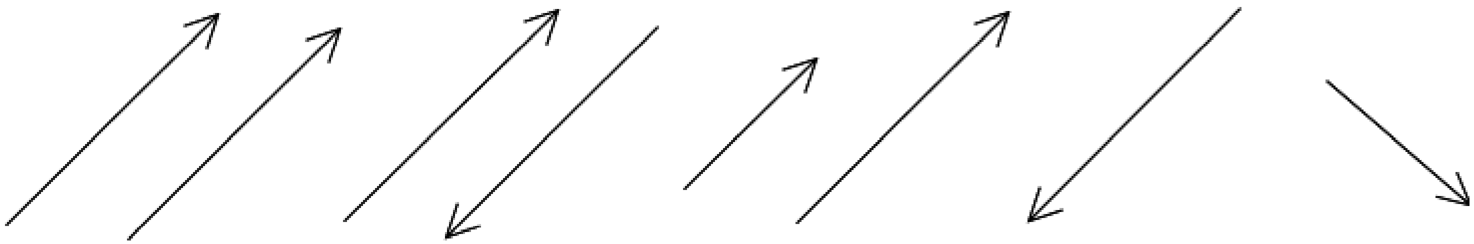
- **두 벡터의 상등**

  두 벡터 **a**, **b**가 같다. → 두 벡터 **a**, **b**의 방향과 길이가 같다.

  → 평행이동한 벡터는 본래의 벡터와 상등이다.

  (벡터의 시작점을 임의로 택할 수 있음)

- **두 벡터 사이의 관계**



상등관계

길이는 같지만 방향이 다른 벡터

방향은 같지만 길이가 다른 벡터

길이와 방향이 모두 다른 벡터

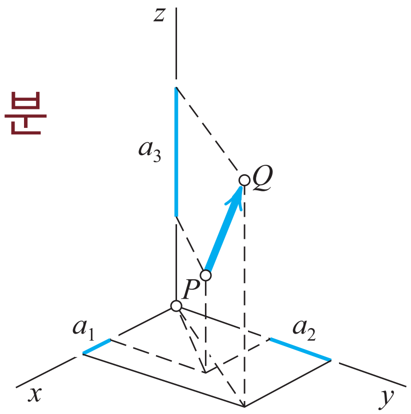
9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

● **벡터의 성분**

x, y, z 직교좌표계(Cartesian Coordinate System)에서

시작점 P:(x_1, y_1, z_1)과 끝점 Q:(x_2, y_2, z_2)을 갖는 벡터 **a**의 성분

→ 세 개의 좌표 상의 차이: a_1, a_2, a_3



$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3]$$

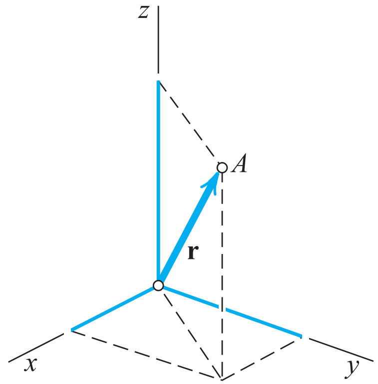
피타고라스의 정리 → $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$ **(증명-HW1)**

Example 1

● **위치벡터(Position Vector)**

직교좌표계에서 점 A:(x, y, z)의 위치벡터(Position Vector) **r**

→ 시작점이 원점이고 끝점이 A인 벡터



9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

▪ **순서를 갖는 실수로 된 삼중수로서의 벡터**

- 고정된 직교좌표가 주어지면 각 벡터는 해당하는 성분으로 된 순서를 갖는 삼중수로 유일하게 결정됨.
- 실수로 이루어진 순서를 갖는 삼중수에 대하여 정확하게 한 개의 벡터가 대응됨.
- 원점은 방향이 없고 길이가 영인 영벡터(Zero Vector)에 대응됨.

▪ **두 벡터의 합**

두 벡터 $\mathbf{a}=[a_1, a_2, a_3]$와 $\mathbf{b}=[b_1, b_2, b_3]$의 합 → $\mathbf{a}+\mathbf{b}=[a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3]$

대수적 방법과 기하학적 방법이 일치함 **(그림 169 (합성력), 그림 170)**

▪ **벡터합의 기본성질**

(a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ **(교환법칙(cummutativity))**

(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ **(결합법칙(associativity))**

(c) $\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

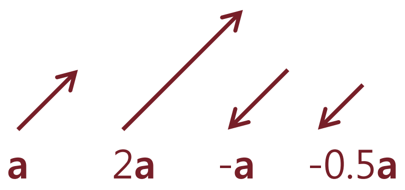
(d) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0$

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

▪ **스칼라곱(실수에 의한 곱)**

임의의 스칼라 c (여기서 c는 실수), 벡터 **a**=[a_1, a_2, a_3]에 대하여 스칼라곱

→ c**a**=[ca_1, ca_2, ca_3]



▪ **스칼라곱의 기본성질**

(a) c(**a**+**b**)=c**a**+c**b**

(b) (c+k)**a**=c**a**+k**a**

(c) c(k**a**)=(ck)**a** or ck**a**

(d) 1**a**=**a**

벡터합과 스칼라곱의 기본성질에 의하여

(a) 0**a**=0

(b) (-1)**a**=-**a**

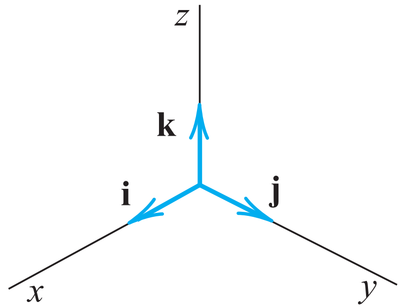
(c) b+(-a)=b-a Example 2

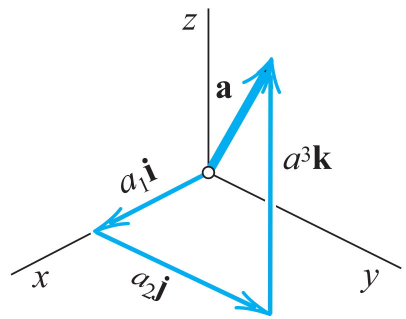
9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **단위벡터 i, j, k를 이용한 a의 또 다른 보편적인 표현법**

i, **j**, **k**: 직계좌표계에서 각 축의 양의 방향에 놓인 단위벡터

$$\mathbf{i}=[1,\ 0,\ 0],\ \mathbf{j}=[0,\ 1,\ 0],\ \mathbf{k}=[0,\ 0,\ 1] \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$$





Example 3

- 모든 벡터 **a**=[a_1, a_2, a_3]=a_1**i**+a_2**j**+a_3**k**의 집합은 두 대수적 연산자, 즉 벡터의 합과 스칼라곱이 정의된 3차원 실수 벡터공간 **R**^{3}을 형성함.

- **i, j, k** : 표준기저 (Standard Basis)

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

PROBLEM SET 9.1

HW: 4, 11, 13, 18, 20, 24, 28, 32, 34, 38