Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 임의의 점 P에서의 **벡터함수**(Vector Function) : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P),\ v_2(P),\ v_3(P)]$
- 임의의 점 P에서의 스칼라함수(Scalar Function) : $f = f(P)$
- 함수의 정의역 ⇒ 공간내의 영역: 3차원 공간, 곡면, 곡선
- **벡터장**(Vector Field) ⇒ 주어진 영역에서의 벡터함수: 곡면, 곡선
- **스칼라장**(Scalar Field) ⇒ 주어진 영역에서의 스칼라함수: 온도장, 기압장
- 벡터함수의 기호 표기

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = [v_1(x,\ y,\ z),\ v_2(x,\ y,\ z),\ v_3(x,\ y,\ z)]$$

Example 1, 2, 3

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 수렴(Convergence)

- 벡터열 $\mathbf{a}_{(n)}$은 수렴(Converge)한다

  : 무한수열 $\mathbf{a}_{(n)}, n=1, 2, \cdots$에 대하여 한 벡터 $\mathbf{a}$가 존재하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{a}_{(n)}-\mathbf{a}\right|=0$이 성립할때

  극한벡터(Limit Vector) : $\mathbf{a}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{a}_{(n)}$

- $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t)=\mathbf{l}$ (벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 t가 t_0로 접근할 때 극한 $\mathbf{l}$을 갖는다.)

  $\Leftrightarrow$ t_0부근(t_0는 제외되어도 무방함)에서 정의된 실변수 t의 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$에 대하여

  $\lim_{t\to t_0}\left|\mathbf{v}(t)-\mathbf{l}\right|=0$이 성립

- 연속성

- 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 $t=t_0$에서 연속(Continuous)이다

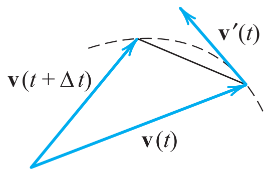
  $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}(t)$가 t_0부근(t_0자신을 포함하여도 무방함)에서 정의되고 $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}(t_0)$을 만족

- $\mathbf{v}(t)=[v_1(t), v_2(t), v_3(t)]$가 t_0에서 연속 $\Leftrightarrow$ 성분함수 $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$가 t_0에서 연속

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 벡터함수의 도함수

  벡터함수 $\mathbf{v}(t)$가 t에서 미분가능(Differentiable) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$ 가 수렴



$\mathbf{v}'(t) = [v_1'(t),\ v_2'(t),\ v_3'(t)]$: $\mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$의 도함수

- 벡터미분공식

  1. $(c\mathbf{v})' = c\mathbf{v}'$ (c는 상수)
  2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
  3. $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}'$ **Prove!**
  4. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ **Prove!**
  5. $(\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w})' = (\mathbf{u}'\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \mathbf{v}'\ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}')$ **Prove!**

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

Example 4

- 벡터함수의 편도함수

$$\mathbf{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_l} = \frac{\partial v_1}{\partial t_l}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_l}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_l}\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{k}$$

Example 5

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

PROBLEM SET 9.4

HW: 7, 24

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **미분기하학**(Differential Geometry) : 공간곡선이나 곡면을 연구하는 학문

  상대성이론, 항공, 지리학, 측지학, 기존 공학설계 및 컴퓨터를 이용한 설계,

  역학 분야 등 물리학이나 기하학에서 중요한 역할을 한다.

- **매개변수표현법**(Parametric Representation)

  공간에서 움직이는 물체의 경로인 곡선을 표현

  : $\mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

Example 1, 2, 3, 4

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

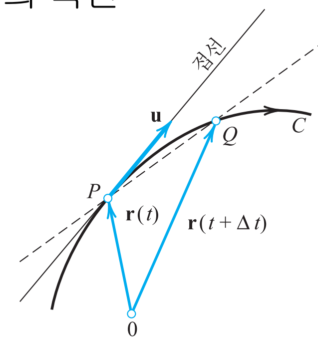
● 곡선의 접선

- 곡선 C위의 한 점 P에서의 **접선(Tangent Line)**

  $\Rightarrow$ 점 P에 근접한곡선 C상의 점 Q에대해 P, Q를 지나는 직선 L의 극한

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

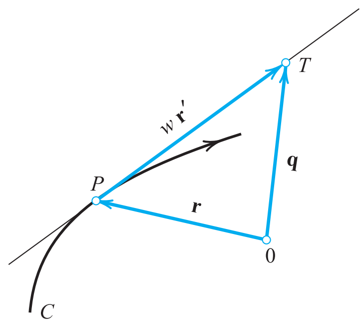
$\mathbf{r}'(t)$: 공간곡선 상의 임의의 점에서의 접선벡터(Tangent Vector)



- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(t)$: 점 P에서의 곡선 C의 접선 벡터

  $\Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'$: 곡선 C의 단위 접선 벡터

- 점 P에서의 곡선 C의 접선 벡터방정식 : $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}'$



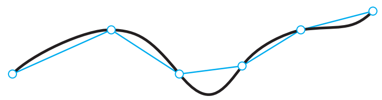
Example 3 참고

Example 5 풀기!

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- 곡선의 길이

$$C\text{의 길이} : l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'}\,dt \quad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$



- 곡선에서의 호의 길이 (arc length)

$$\text{호의 길이} : \ s(t) = \int_a^t \sqrt{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'}\,d\tilde{t} \quad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}}\right)$$

$$*\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = d\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ds를 C의 선소(linear element)라 함.

* 매개변수로서의 호의 길이

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}' \xrightarrow{\text{변수 } t \text{ 대신 } s\text{를 사용}} \mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s) : \text{단위접선벡터}$$

Example 6

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- 역학에서의 곡선. 속도와 가속도
  - $\mathbf{r}(t)$:움직이는 물체의 경로 C
  - $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$: 곡선 C의 접선벡터인 속도벡터(Velocity Vector)
  - $\mathbf{a}(t)=\mathbf{v}'(t)=\mathbf{r}''(t)$: 속도의 도함수인 가속도벡터(Acceleration)
- 접선가속도와 법선가속도 $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{\tan}+\mathbf{a}_{\text{norm}}$
  - 접선가속도 벡터(Tangential Acceleration Vector) : 경로와 접선방향 $\mathbf{a}_{\tan}$
  - 법선가속도 벡터(Normal Acceleration Vector) : 경로와 수직방향 $\mathbf{a}_{\text{norm}}$

$$* \ \mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}, \quad \mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

$\frac{d\mathbf{u}}{ds}$는 $\mathbf{u}(s)$에 수직 $\Rightarrow$ $\frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$: 법선가속도벡터, $\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}$: 접선가속도벡터

$$* \ \mathbf{a}_{\tan}=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_{\text{norm}}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\tan}$$

Example 7 풀기!

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

● 곡선의 곡률과 비틀림

- $\mathbf{r}(s)$로 표현되는 곡선 C의 P점에서의 **곡률**(Curvature) $\kappa(s)$

  : P점에서의 단위접선벡터 $\mathbf{u}(s)$의 변화율

$$\kappa(s) = |\mathbf{u}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \quad \left(' = d/ds\right)$$

- C상의 P점에서의 **비틀림**(Torsion) $\tau(\mathrm{s})$

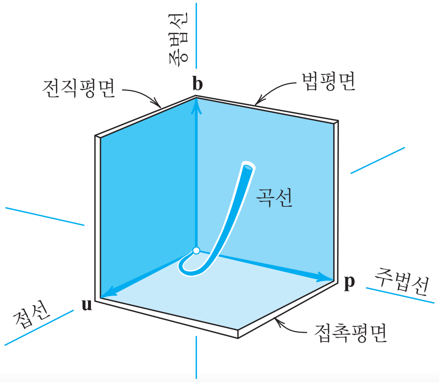
  : 접촉평면(Osculating Plane)(벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{u}'$에 의해 구성된 평면)의 C상의 P점에서의 변화율

  P점에서 곡선C가 평면에서의 이탈정도

$$|\tau(\mathrm{s})| = |\mathbf{b}'(s)|, \quad \tau(\mathrm{s}) = -\mathbf{p}(s) \bullet \mathbf{b}'(s)$$

$\mathbf{p} = \left(1/\kappa\right)\mathbf{u}'$: 단위주법선벡터(Unit Principal Normal Vector)

$\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \left(1/\kappa\right)\mathbf{u}' = \mathbf{u} \times \mathbf{p}\mathbf{b}'$: 단위종법선벡터(Unit Binormal Vector)



9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

PROBLEM SET 9.5

HW: 5, 15, 24, 30, 35