Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

11.4 Complex Fourier Series
(복소 푸리에 급수)

- 복소 푸리에 급수(**Complex Fourier Series**) : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

  복소 푸리에 계수(**Complex Fourier Coefficient**) : $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$

  주기가 $2L$인 복소 푸리에 급수 : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$

  $$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\,dx, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

11.4 Complex Fourier Series (복소 푸리에 급수)

■ Ex. 1 **복소 푸리에 급수**

구간 $-\pi < x < \pi$에서 $f(x) = e^x$이고 $f(x+2\pi) = f(x)$인 함수의 복소 푸리에 급수를 구하고, 이로부터 보통의 푸리에 급수를 구하라.

11.4 Complex Fourier Series (복소 푸리에 급수)

■ Ex. 1 **복소 푸리에 급수**

구간 $-\pi < x < \pi$에서 $f(x) = e^x$이고 $f(x+2\pi) = f(x)$인 함수의 복소 푸리에 급수를 구하고, 이로부터 보통의 푸리에 급수를 구하라.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}e^{x-inx}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n = \frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \quad \text{푸리에 급수} \ : e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx} \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$(1+in)e^{inx} = (1+in)(\cos nx + i\sin nx) = (\cos nx - n\sin nx) + i(n\cos nx + \sin nx)$$

$$(1-in)e^{-inx} = (1-in)(\cos nx - i\sin nx) = (\cos nx - n\sin nx) - i(n\cos nx + \sin nx)$$

$$\Rightarrow \quad (1+in)e^{inx} + (1-in)e^{-inx} = 2(\cos nx - n\sin nx)$$

$$\Rightarrow \quad e^x = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2}(\cos 2x - 2\sin 2x) - + \cdots\right]$$

11.5 Forced Oscillations (강제진동)

Section 2.8 Revisited

- **자유운동**(Free Motion) : 외력이 없는 경우의 운동지배방정식 :

$$my''+cy'+ky=0$$

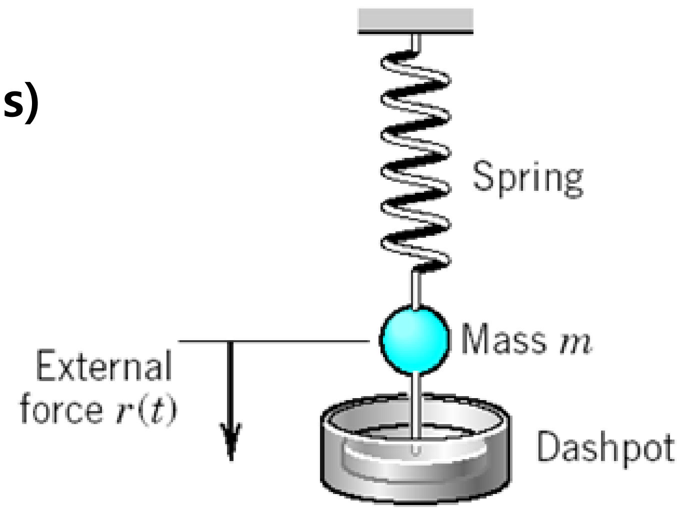
- **강제운동**(Forced Motion) : 외부로부터의 힘이 물체에 작용하는 경우의 운동지배방정식 : $my''+cy'+ky=r(t)$

- **입력**이나 **구동력**(Driving Force) : $r(t)$
- **출력** 또는 구동력에 대한 시스템의 **응답**(Response) : $y(t)$

11.5 Forced Oscillations (강제진동)

$$my''+cy'+ky=r(t)$$

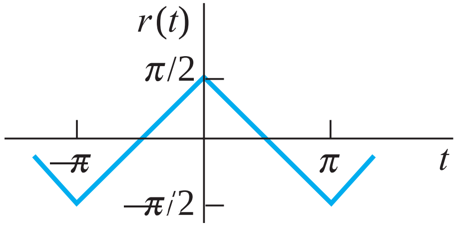
- y=y(t): displacement from rest
- c: damping constant
- k: spring constant (spring modulus)
- r(t): external force



11.5 Forced Oscillations (강제진동)

- Ex. 1 **주기적인 비 사인(Nonsinusoidal) 구동력에 의한 강제진동**

$$y''+0.05y'+25y=r(t),\quad r(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2} & (-\pi<t<0) \\ -t+\dfrac{\pi}{2} & (0<t<\pi) \end{cases}\quad r(t+2\pi)=r(t)$$

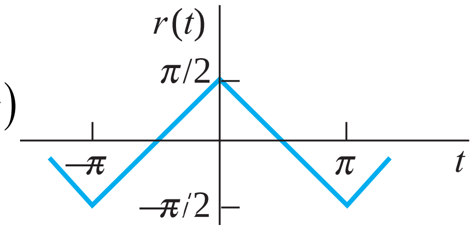


정상상태 해 $y(t)$를 구하라.

11.5 Forced Oscillations (강제진동)

■ Ex. 1 **주기적인 비 사인(Nonsinusoidal) 구동력에 의한 강제진동**

$$y''+0.05y'+25y=r(t),\quad r(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2} & (-\pi<t<0) \\ -t+\dfrac{\pi}{2} & (0<t<\pi) \end{cases}\qquad r(t+2\pi)=r(t)$$



정상상태 해 $y(t)$를 구하라.

$r(t)$의 푸리에 급수 : $r(t)=\dfrac{4}{\pi}\left(\cos t+\dfrac{1}{3^2}\cos 3t+\dfrac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)$

푸리에 코사인 급수(Fourier Cosine Series) : 주기가 $2L$인 우함수의 푸리에 급수

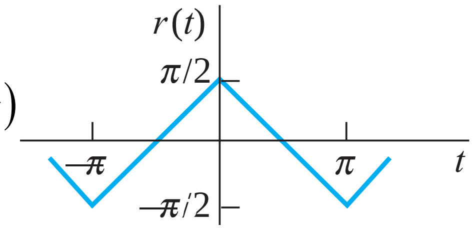
$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

푸리에 계수 $a_0=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)dx,\quad a_n=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$

11.5 Forced Oscillations (강제진동)

■ Ex. 1 **주기적인 비 사인(Nonsinusoidal) 구동력에 의한 강제진동**

$$y''+0.05y'+25y=r(t),\quad r(t)=\begin{cases} t+\dfrac{\pi}{2} & (-\pi<t<0) \\ -t+\dfrac{\pi}{2} & (0<t<\pi) \end{cases}\quad r(t+2\pi)=r(t)$$



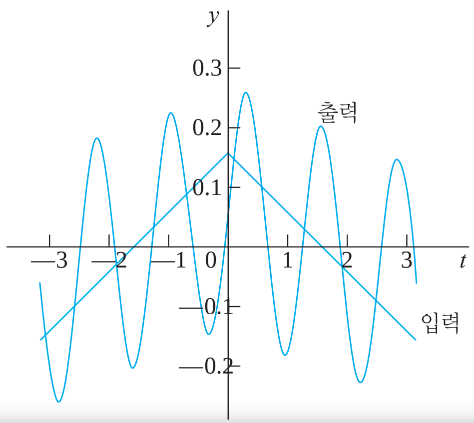
정상상태 해 $y(t)$를 구하라.

$r(t)$의 푸리에 급수 : $r(t)=\dfrac{4}{\pi}\left(\cos t+\dfrac{1}{3^2}\cos 3t+\dfrac{1}{5^2}\cos 5t+\cdots\right)$

상미분방정식 $y''+0.05y'+25y=\dfrac{4}{n^2\pi}\cos nt\quad (n=1,\ 3,\ \cdots)$의 정상상태 해 : $y_n=A_n\cos nt+B_n\sin nt$

$$A_n=\frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D_n},\quad B_n=\frac{0.2}{n\pi D_n}\qquad \text{여기서}\quad D_n=(25-n^2)^2+(0.05n)^2$$

∴ 정상상태 해 : $y=y_1+y_3+y_5+\cdots$



n=5 term is dominant.

11.5 Forced Oscillations (강제진동)

PROBLEM SET 11.5

HW: 2, 3

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials (삼각다항식에 의한 근사)

- **근사이론**(Approximation Theory) : 푸리에 급수의 주된 응용 분야로 단순한 함수로써 어떤 함수의 근사값을 표현하는 분야

- **Idea**

  $f(x)$는 주기가 2π인 푸리에 급수로 표현될 수 있는 주기함수 $(-\pi \le x \le \pi)$

  $\Rightarrow$ N차 부분합은 $f(x)$에 대한 근사값

  $$\therefore\ f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- 생각할 문제

  최상의 f 의 근사인 N차 삼각다항식 $F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ (N은 고정) 구하기

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials (삼각다항식에 의한 근사)

- **제곱오차**(Square Error)

$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx$: 구간 $-\pi \le x \le \pi$상에서 함수 F의 함수 f에 관한 **제곱오차(Square Error)**

- **최소제곱오차**

구간 $-\pi \le x \le \pi$에서 F의 f에 관한 제곱오차는 F의 계수가 f의 푸리에 계수이면 최소가 된다. 그 최소값은 $E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2} \right) \right]$이다.

- N이 증가함에 따라 f의 푸리에 급수 부분합은 제곱오차 관점에서 점점 더 f를 잘 근사화하게 된다.

- **Bessel의 부등식(Bessel's Inequality)** : $2a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2} \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$

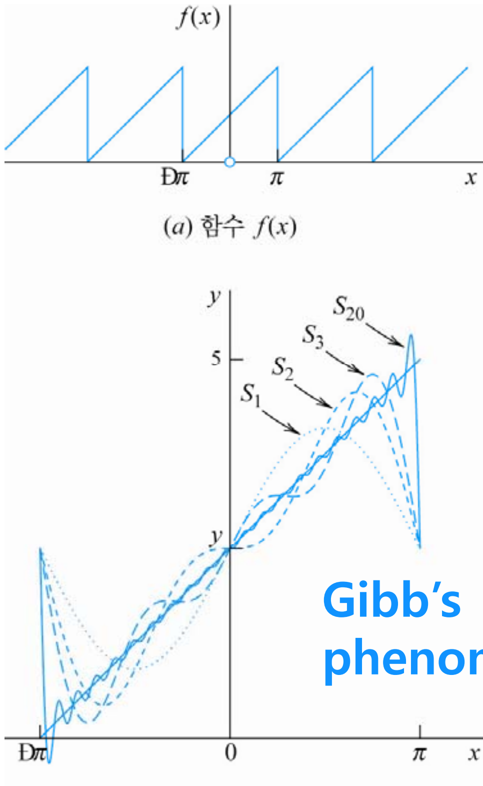
- **Parseval의 항등식(Parseval's Identity)** : $2a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials (삼각다항식에 의한 근사)

■ Ex. 11.3 **톱니파**(Sawtooth Wave)

푸리에 급수를 구하라.

$f(x) = x + \pi \;\; (-\pi < x < \pi)$ 이고 $\quad f(x + 2\pi) = f(x)$



(a) 함수 f(x)

(b) 부분합 S_1, S_2, S_3, S_{20}

Gibb's phenomenon

$f_1 = x$와 $f_2 = \pi$라 하면 $f = f_1 + f_2$이다.

* f_1의 푸리에 급수

f_1은 기함수이므로 $a_n = 0 \; (n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

* $f_2 = \pi$

$$\therefore\; f = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right)$$

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials (삼각다항식에 의한 근사)

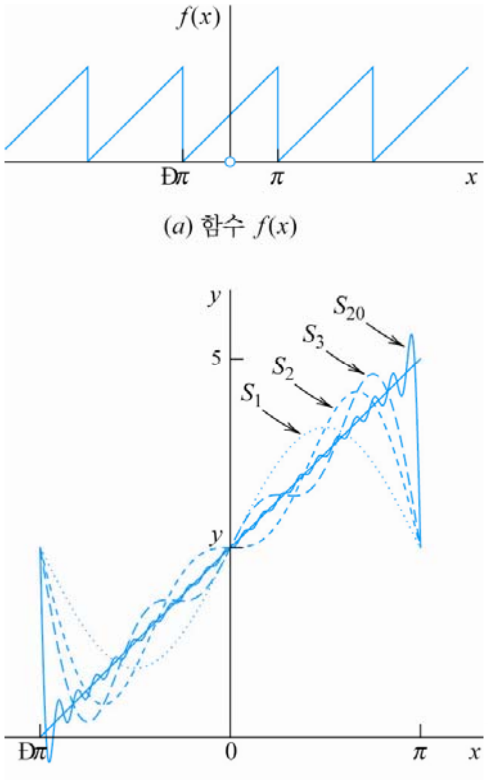
- Ex. 11.3 **톱니파**(Sawtooth Wave)

  푸리에 급수를 구하라.

  $f(x) = x + \pi \ (-\pi < x < \pi)$ 이고 $\quad f(x + 2\pi) = f(x)$

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)^2 dx - \pi\left[2\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right]$$

N	E*
1	8.1045
2	4.9629
10	1.1959
20	0.6129
100	0.0126



(a) 함수 $f(x)$

(b) 부분합 S_1, S_2, S_3, S_{20}

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials (삼각다항식에 의한 근사)

PROBLEM SET 11.6

HW: 5, 14

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- Fourier series are powerful tools for problems involving functions that are periodic or are of interest on a finite interval only.
- However, many problems involve functions that are nonperiodic and are of interest on the whole x-axis.

Let $L \to \infty$ (period: 2L)

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- Ex. 1 **직사각형파**

주기가 $2L > 2$인 주기적인 직사각형파 $f_L(x) = \begin{cases} 0 & (-L < x < -1) \\ 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (1 < x < L) \end{cases}$ 를 고려하자.

f_L로부터 얻어지는 비주기함수 $f(x) = \lim_{L \to \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & \text{그 밖의 경우} \end{cases}$

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- Ex. 1 **직사각형파**

주기가 $2L>2$인 주기적인 직사각형파 $f_L(x)=\begin{cases}0 & (-L<x<-1)\\ 1 & (-1<x<1)\\ 0 & (1<x<L)\end{cases}$ 를 고려하자.

f_L로부터 얻어지는 비주기함수 $f(x)=\lim\limits_{L\to\infty} f_L(x)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & \text{그 밖의 경우}\end{cases}$

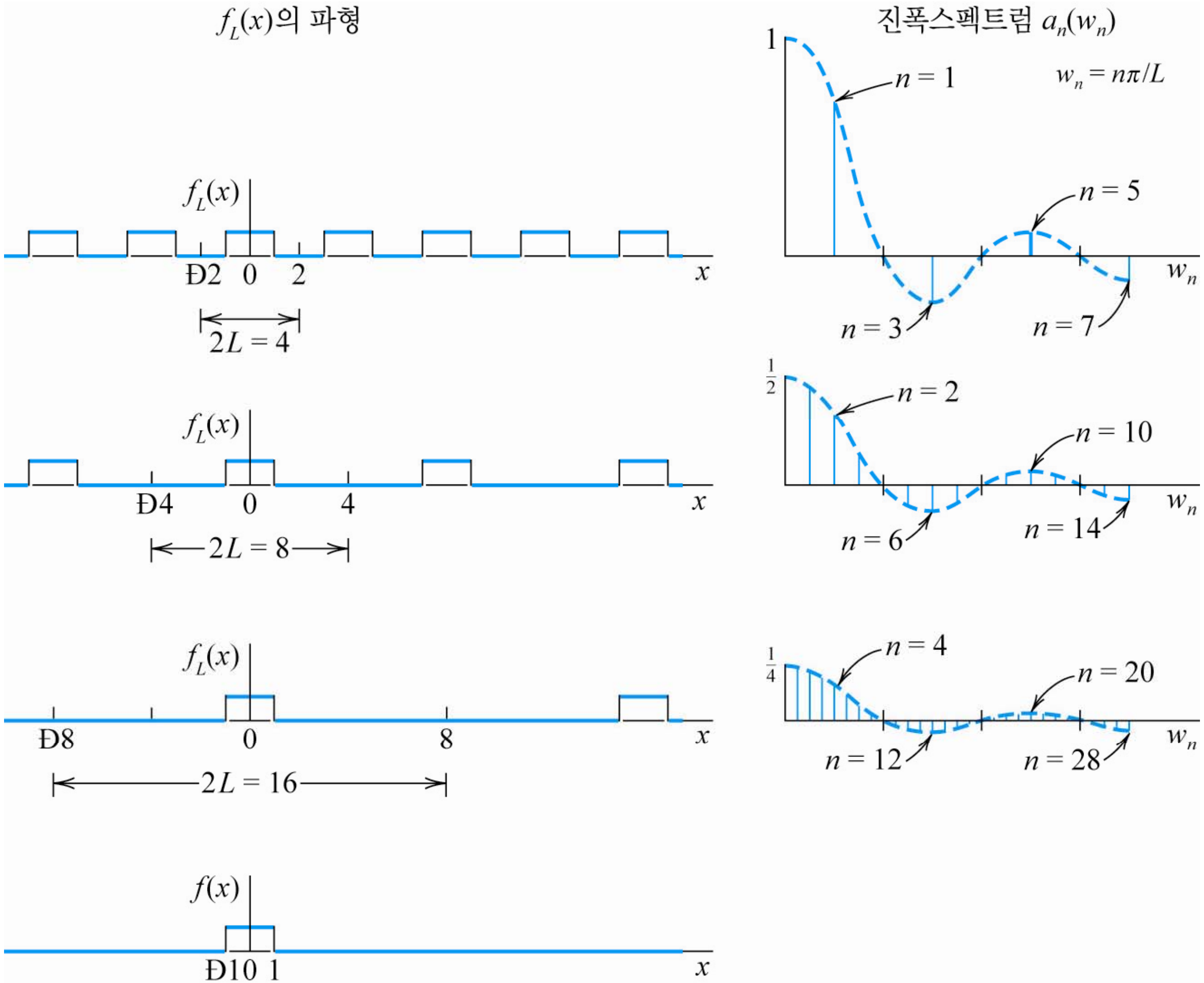
f_L이 우함수이므로 모든 n에 대하여 $b_n=0$이다.

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-1}^{1}dx=\frac{1}{L},\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\frac{\sin\left(n\pi/L\right)}{n\pi/L}$$

f_L의 **진폭스펙트럼 (Amplitude Spectrum)** : 푸리에 계수의 수열

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)



11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- **푸리에 급수로부터 푸리에 적분으로 (L→∞)**

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \qquad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv\right]$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv + (\sin w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv\right]$$

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- 푸리에 급수로부터 푸리에 적분으로 (L→∞)

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \qquad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv\right]$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v dv + (\sin w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\sin w_n v dv\right]$$

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv\right]dw$$

$\Rightarrow$ 푸리에 적분 : $f(x) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv$$

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- **푸리에 적분**

* 모든 유한구간에서 구분연속

* 모든 점에서 좌도함수와 우도함수가 존재

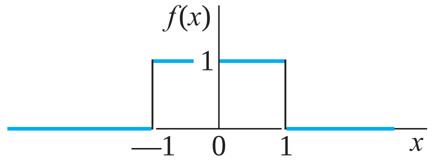
* $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|dx$의 적분이 존재

$\Rightarrow$ $f(x)$는 푸리에 적분으로 표현될 수 있다.

$f(x)$가 불연속인 점에서의 푸리에 적분값은 그 점에서 $f(x)$의 좌극한값과 우극한값의 평균과 같다.

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

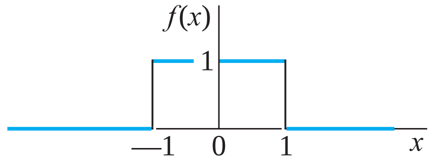
■ Ex. 2 **단일펄스, 사인적분**



함수 $f(x)=\begin{cases} 1 & (|x|<1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$의 푸리에 적분 표현식을 구하라.

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

■ Ex. 2 **단일펄스, 사인적분**



함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$의 푸리에 적분 표현식을 구하라.

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wv\,dv=\left.\frac{\sin wv}{\pi w}\right|_{-1}^{1}=\frac{2\sin w}{\pi w},\quad B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin wv\,dv=0$$

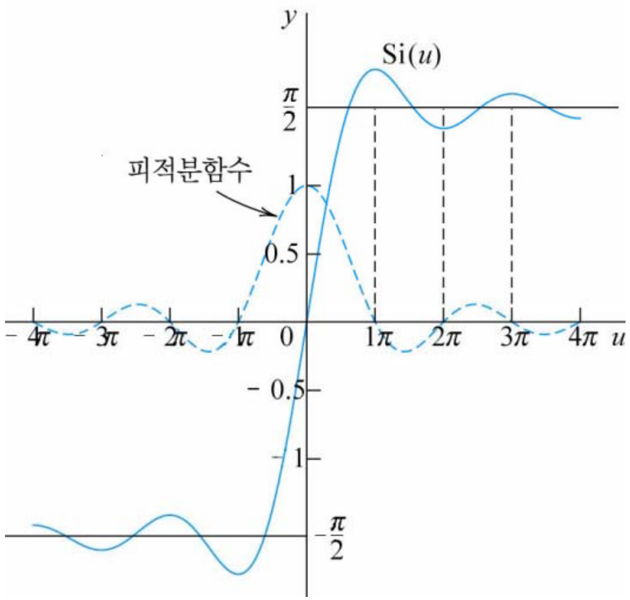
$$\therefore\ f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw$$

Dirichlet의 불연속인자(Discontinuous Factor) : $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw=\begin{cases}\pi/2 & (0\le x<1)\\ \pi/4 & (x=1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}$$

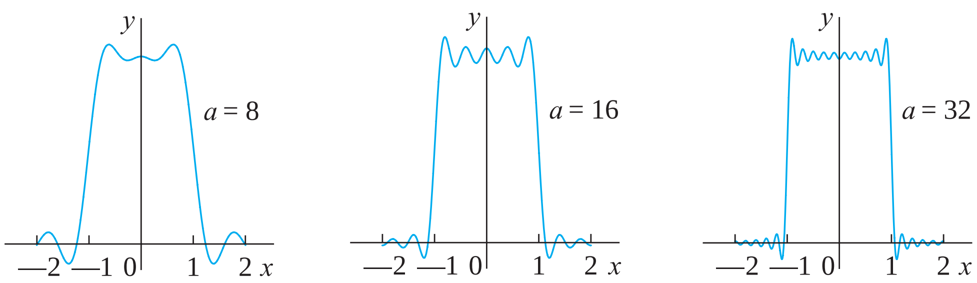
11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

사인적분(Sine Integral) : $\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin w}{w} dw$



$$f(x) \approx \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w+wx)}{w} dw + \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\sin(w-wx)}{w} dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(a[x+1]) - \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(a[x-1])$$



11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

- **푸리에 코사인 적분과 푸리에 사인 적분**

- **푸리에 코사인 적분(Fourier Cosine Integral)** : 우함수일 때, 푸리에 적분

$$f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw, \quad A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv$$

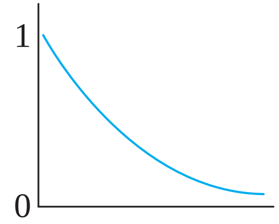
- **푸리에 사인 적분(Fourier Sine Integral)** : 기함수일 때, 푸리에 적분

$$f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw, \quad B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv\,dv$$

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

■ Ex. 5 **라플라스 적분**

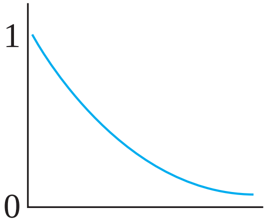
$f(x) = e^{-kx}$의 푸리에 코사인 적분과 푸리에 사인 적분을 $x > 0,\ k > 0$에서유도하고 이 결과를 이용하여 라플라스 적분을 계산해 보자.



11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

Ex. 5 라플라스 적분

$f(x)=e^{-kx}$의 푸리에 코사인 적분과 푸리에 사인 적분을 $x>0,\ k>0$에서유도하고 이 결과를 이용하여 라플라스 적분을 계산해 보자.



1. 푸리에 코사인 적분

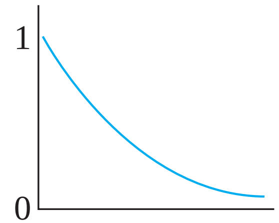
$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\,dv=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{k}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(-\frac{w}{k}\sin wv+\cos wv\right)\right]_0^\infty=\frac{2k}{\pi\left(k^2+w^2\right)}$$

$$\therefore\ f(x)=e^{-kx}=\frac{2k}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw\quad\Rightarrow\quad\int_0^\infty\frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}$$

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

■ Ex. 5 **라플라스 적분**

$f(x) = e^{-kx}$의 푸리에 코사인 적분과 푸리에 사인 적분을 $x > 0,\ k > 0$에서유도하고 이 결과를 이용하여 라플라스 적분을 계산해 보자.



1. 푸리에 코사인 적분

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\,dv = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{k}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(-\frac{w}{k}\sin wv + \cos wv\right)\right]_0^\infty = \frac{2k}{\pi(k^2+w^2)}$$

$$\therefore\ f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2k}e^{-kx}$$

2. 푸리에 사인 적분

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\sin wv\,dv = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{w}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(-\frac{k}{w}\sin wv + \cos wv\right)\right]_0^\infty = \frac{2w}{\pi(k^2+w^2)}$$

$$\therefore\ f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx}$$

Laplace integrals

11.7 Fourier Integral (푸리에 적분)

PROBLEM SET 11.7

HW: 20