Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

- **Integral Transform (적분변환):**

주어진 함수를 다른 변수에 종속하는 새로운 함수로 만드는 적분 형태의 변환

예) Laplace Transform (Ch. 6)

- **Fourier Cosine Transform (푸리에 코사인 변환)**

푸리에 코사인 적분 : $f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw, \quad A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv$

$A(w)=\sqrt{2/\pi}\;\hat{f}_c(w)$라 하자.

$\Rightarrow$ 푸리에 코사인 변환(**Fourier Cosine Transform**) : $\mathcal{F}_c(f)=\hat{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx,$

푸리에 코사인 역변환(**Inverse Fourier Cosine Transform**) : $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos wx\,dw$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

- **Fourier Sine Transform (푸리에 사인 변환)**

푸리에 사인 적분 : $f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw,\quad B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv\,dv$

$B(w)=\sqrt{2/\pi}\ \hat{f}_s(w)$라 하자.

$\Rightarrow$ 푸리에 사인 변환(**Fourier Sine Transform**) : $\mathscr{F}_s(f)=\hat{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx,$

푸리에 사인 역변환(**Inverse Fourier Sine Transform**) : $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\sin wx\,dw$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

■ Ex. 1 **Fourier Cosine and Fourier Sine Transforms**

함수 $f(x) = \begin{cases} k & (0 < x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$의 푸리에 코사인 및 푸리에 사인변환을 구하라.

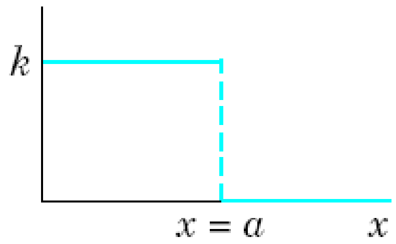

Fig. 282. $f(x)$ in Example 1

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

■ Ex. 1 **Fourier Cosine and Fourier Sine Transforms**

함수 $f(x)=\begin{cases} k & (0<x<a) \\ 0 & (x>a) \end{cases}$의 푸리에 코사인 및 푸리에 사인변환을 구하라.

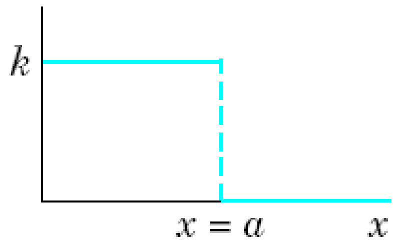

Fig. 282. $f(x)$ in Example 1

$$\hat{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\int_0^a \cos wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\left(\frac{\sin aw}{w}\right)$$

$$\hat{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\int_0^a \sin wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\left(\frac{1-\cos aw}{w}\right)$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

- **Linearity**

$$\mathcal{F}_c(af+bg)=a\mathcal{F}_c(f)+b\mathcal{F}_c(g)$$

$$\mathcal{F}_s(af+bg)=a\mathcal{F}_s(f)+b\mathcal{F}_s(g)$$

- **Cosine and Sine Transforms of Derivatives**

* $f(x)$가 연속이고, x축 상에서 절대적분가능

* $f'(x)$가 모든 유한구간에서 구분연속

* $x\to\infty$일 때, $f(x)\to 0$

$$\Rightarrow\ \mathcal{F}_c\{f'(x)\}=w\mathcal{F}_s\{f(x)\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0),\quad \mathcal{F}_s\{f'(x)\}=-w\mathcal{F}_c\{f(x)\}$$ **Prove!**

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\}=-w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0),\quad \mathcal{F}_s\{f''(x)\}=-w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0)$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

■ Ex. 3 **An Application of the Operational Formula (9)**

함수 $f(x) = e^{-ax}\,(a > 0)$의 푸리에 코사인 변환을 구하라. **in two ways**

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

■ Ex. 3 **An Application of the Operational Formula (9)**

함수 $f(x) = e^{-ax}(a > 0)$의 푸리에 코사인 변환을 구하라. **in two ways**

미분에 의하여, $\left(e^{-ax}\right)'' = a^2 e^{-ax}$이므로 $a^2 f(x) = f''(x)$

$$\Rightarrow \quad a^2 \mathscr{F}_c(f) = \mathscr{F}_c(f'') = -w^2 \mathscr{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -w^2 \mathscr{F}_c(f) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(a^2 + w^2\right)\mathscr{F}_c(f) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\therefore \quad \mathscr{F}_c\left(e^{-ax}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a}{a^2 + w^2}\right) \qquad (a > 0)$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms (푸리에 코사인 및 사인 변환)

PROBLEM SET 11.8

HW: 4, 18

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

- **Complex Form of the Fourier Integral (푸리에 적분의 복소형식)**

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx \right] dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv$$

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

- **Complex Form of the Fourier Integral (푸리에 적분의 복소형식)**

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\,dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx - wv)\,dv\right]dw$$ **Prove!**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wx - wv)\,dv\right]dw = 0$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iw(x-v)}\,dv\,dw$$ **Prove!**

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

- **Complex Form of the Fourier Integral (푸리에 적분의 복소형식)**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-iwv}dv]e^{iwx}dw$$

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-iwx}dw$$

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

Complex Form of the Fourier Integral (푸리에 적분의 복소형식)

- 복소 푸리에 적분(**Complex Fourier Integral**) : $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iw(x-v)}dv\,dw$
- 푸리에 변환(**Fourier Transform**) : $\mathcal{F}(f)=\hat{f}(w)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
- 푸리에 역변환(**Inverse Fourier Transform**) : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-iwx}dw$

Existence of the Fourier Transform (푸리에 변환의 존재)

$f(x)$가 x축 상에서 절대적분가능이고 모든 유한구간에서 구분연속

$\Rightarrow$ $f(x)$의 푸리에 변환 $\hat{f}(w)$는 존재하며, $\hat{f}(w)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

■ Ex. 1 **Fourier Transform**

$|x|<1$에서 $f(x)=1$이고 그 이외의 구간에서는 $f(x)=0$인 함수의 푸리에 변환을 구하라.

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

■ Ex. 1 **Fourier Transform**

$|x|<1$에서 $f(x)=1$이고 그 이외의 구간에서는 $f(x)=0$인 함수의 푸리에 변환을 구하라.

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-iwx}}{-iw}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}}\left(e^{-iw}-e^{iw}\right)$$

$$=\frac{-2i\sin w}{-iw\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}$$

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

- **Linearity. Fourier Transform of Derivatives**

- **푸리에 변환의 선형성**

  푸리에 변환은 선형연산이다. $\mathcal{F}(af+bg)=a\mathcal{F}(f)+b\mathcal{F}(g)$

- **도함수의 푸리에 변환**

  * 함수 $f(x)$가 x축상에서 연속

  * $f'(x)$가 x축상에서 절대적분가능

  * $|x|\to\infty$일 때, $f(x)\to 0$

  $\Rightarrow \mathcal{F}\{f'(x)\}=iw\mathcal{F}\{f(x)\},\quad \mathcal{F}\{f''(x)\}=-w^2\mathcal{F}\{f(x)\}$ **Prove!**

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

■ Ex. 3 **Application of the Operational Formular (9)**

xe^{-x^2}의 푸리에 변환을 구하라.

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a} \quad (a > 0)$$

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

■ Ex. 3 **Application of the Operational Formular (9)**

xe^{-x^2}의 푸리에 변환을 구하라.

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a} \quad (a>0)$$

$$\mathcal{F}\left(xe^{-x^2}\right)=\mathcal{F}\left\{-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right\}=-\frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\left(e^{-x^2}\right)'\right\}=-\frac{1}{2}iw\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}iw\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4}=-\frac{iw}{2\sqrt{2}}e^{-w^2/4}$$

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

- **Convolution (합성곱)**

- 합성곱(Convolution) : $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp$

- **Convolution Theorem (합성곱 정리)**

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 구분연속이고, 유한하며, x축상에서 절대적분가능

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ **Prove using x-p=q**

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms (푸리에 변환. 이산 및 고속 푸리에 변환)

PROBLEM SET 11.9

HW: 14