Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

- 함수가 하나의 변수 밖에 포함하지 않는 미분 방정식을 상미분 방정식이라 한다. 2개 이상의 독립변수를 갖는 함수의 편도함수를 포함하는 방정식을 편미분 방정식이라 한다
- 단순한 물리시스템만이 상미분방정식에 의해 모델화될 수 있는 반면에 동역학, 탁성역학, 열전달, 전자기 이론, 양자역학 등에서 대부분의 문제들이 편미분방정식을 필요로 한다.
- 내용 : 진동하는 현의 파동방정식, 진동하는 박막의 파동방정식, 열전도방정식, 라플라스 방정식

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Partial Differential Equation, PDE(편미분방정식)**

  : 두 개 이상의 독립변수들에 종속되는 함수의 한 개 또는 그 이상의
  편도함수를 포함하는 방정식

- **계수(Order) :** 가장 높은 도함수의 계수

편미분방정식
(PDEs)

- 선형(Linear)
  : 미지함수와 그것의 편도함수
  에 대하여 1차임
  - 제차(Homogeneous)
    : 미지함수와 그것의 편도
    함수만을 포함
  - 비제차(Nonhomogeneous)
    : 제차가 아닌 선형편미분방정식
- 비선형(Nonlinear)
  : 선형이 아닌 편미분방정식

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Ex.1 Important Second-Order PDEs (중요한 2계 선형편미분방정식)**

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ (1차원 파동방정식)

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ (1차원 열전도방정식)

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ (2차원 라플라스 방정식)

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ (2차원 푸아송 방정식)

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$ (2차원 파동방정식)

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ (3차원 라플라스 방정식)

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Solution(해) :** 편미분방정식에 나타나는 모든 편도함수를 갖고 있는 함수로서 모든 점에서 주어진 방정식을 만족하는 함수이다.

  - Ex. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$의 해들 : $u = x^2 - y^2,\ u = e^x \cos y,\ u = \sin x \cosh y,\ u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

  - 일반적으로 편미분 방정식의 해의 전체 집합은 광범위하다.

  - 편미분방정식은 물리적인 조건을 나타내는 추가적인 정보를 사용함으로써 유일 해를 구하게 된다.

- **Additional Conditions(추가적인 조건)**

  - **Boundary Conditions(경계조건), Initial Conditions(초기조건)**

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Fundamental Theorem on Superposition(중첩에 관한 기본정리)**

u_1과 u_2가 어떤 영역 R에서 제차 선형 편미분방정식의 해라면

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

도 역시 같은 영역R에서 그 편미분방정식의 해가 된다. c_1, c_2는 임의의 상수이다.

■ Ex.2 Solving $u_{xx} - u = 0$ Like an ODE.

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Fundamental Theorem on Superposition(중첩에 관한 기본정리)**

u_1과 u_2가 어떤 영역 R에서 제차 선형 편미분방정식의 해라면

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

도 역시 같은 영역 R에서 그 편미분방정식의 해가 된다. c_1, c_2는 임의의 상수이다.

■ Ex.2 Solving $u_{xx} - u = 0$ depending on x and y like an ODE.

$u = u(x, y)$에서 y를 상수로 취급. 즉, $u = u(x)$ $\Rightarrow$ $u'' - u = 0$ $\Rightarrow$ $u = Ae^{x} + Be^{-x}$

$\therefore\ u = u(x, y) = A(y)e^{x} + B(y)e^{-x}$

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- Ex.4 Solving $u_{xy} = -u_x$ Like an ODE

12.1 Basic Concepts (기본개념)

■ Ex.4 Solving $u_{xy} = -u_x$ Like an ODE

$u_x = p$라 하자. $\Rightarrow \quad p_y = -p \quad \Rightarrow \quad \dfrac{p_y}{p} = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln p = -y + \tilde{c}(x) \quad \Rightarrow \quad p = c(x)e^{-y}$

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y), \qquad f(x) = \int c(x)dx$$

12.1 Basic Concepts (기본개념)

PROBLEM SET 12.1

HW: 26

12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

- **바이올린 현과 같은 탄성현에서 현의 미소 횡진동을 모델화한 방정식 유도**

가정 : * 현을 x축 상에 놓고, 길이 L만큼 늘이고 양끝을 $x=0$과 $x=L$로 고정.

* $t=0$에서 현을 잡아당긴 후 놓음으로써 진동 시작.

문제 : 현의 진동을 결정하는 것.(임의의 시점 $t>0$, 임의의 점 x에서 현의 변위를 구하는 것)

- **Physical Assumptions**

1. 단위길이당 현의 질량은 일정하다. 현은 완전탄성체이며 휠 때 어떠한 저항도 나타내지 않는다.
2. 현의 양 끝을 고정시키기 전에 현을 잡아당긴 장력이 매우 커서 현에 작용하는 중력은 무시할 수 있다.
3. 현의 운동은 수직평면 내에서 미소횡진동이다. 즉 현의 모든 입자는 정확하게 수직으로 움직이고, 따라서 현의 모든 점에서 변위와 기울기의 절대값은 항상 작다.

12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

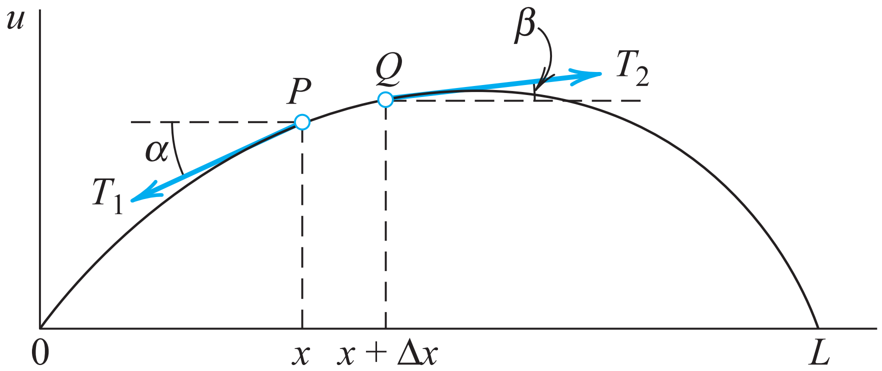
- 수평방향의 힘의 합력

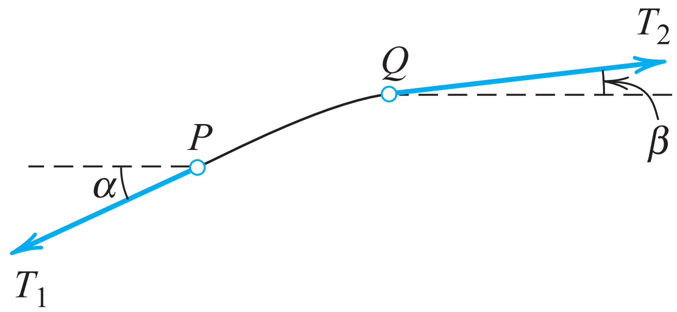
$$-T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \ \therefore \ T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta = T(\text{상수})$$

- 수직방향의 힘의 합력
  - Newton의 제2법칙 적용 $$-T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = \rho\Delta x\, u_{tt}$$

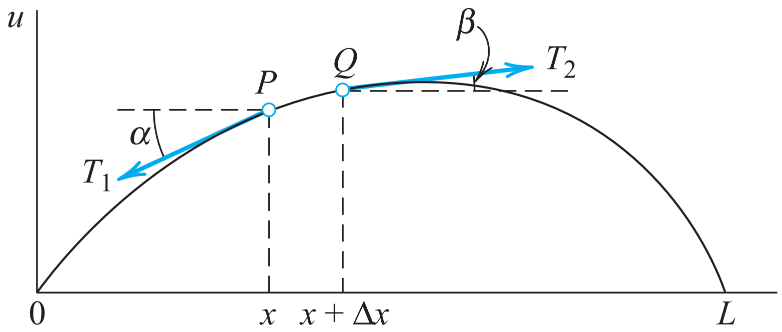
$$\Rightarrow \frac{T_2\sin\beta}{T_2\cos\beta} - \frac{T_1\sin\alpha}{T_1\cos\alpha} = \frac{\rho}{T}\Delta x\, u_{tt} \ \Rightarrow \ \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T}\Delta x\, u_{tt}$$

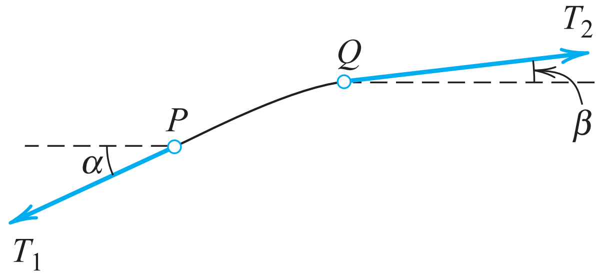




12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

- 정리





$$\Rightarrow \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt}$$

$\tan\alpha$: 점 x에서의 현의 기울기 $\Rightarrow$ $\tan\alpha = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x}$

$\tan\beta$: 점 $x+\Delta x$에서의 현의 기울기 $\Rightarrow$ $\tan\beta = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x} - \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x}\right] = \frac{\rho}{T} u_{tt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{(1차원 파동방정식)}, \quad c^2 = \frac{\rho}{T}$$

12.3 Solution by Separating Variables.
Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **Solution of the one-Dimensional Wave Equation**
  - **1차원 파동방정식 :** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
  - **경계조건(Boundary Condition) :** $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (모든 t에 대하여)
  - **초기조건(Initial Condition) :** $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (0 \le x \le L)$

- **문제해결 방법**
  - **Method of Separating Variables (변수분리법)**
    : $u(x,y) = F(x)G(y)$로 두면 두 개의 상미분방정식을 얻는다.
  - 경계조건을 만족하는 상미분방정식의 해를 구한다.
  - 푸리에 급수를 이용하여 해를 구한다.

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **1단계. 파동방정식으로부터 두 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(x,y)=F(x)G(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''(x)G(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x)\ddot{G}(t)$$

$$\therefore\ F(x)\ddot{G}(t)=c^2F''(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}(=k)$$

❖ 좌변은 t만의 함수이고, 우변은 x만의 함수이므로 양변은 상수가 되어야 한다.

$$\therefore\ F''(x)-kF(x)=0, \quad \ddot{G}(t)-c^2kG(t)=0$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **2단계. 경계조건의 만족**

경계조건 $u(0,t)=F(0)G(t)=0,\quad u(L,t)=F(L)G(t)=0$을 적용

$$\Rightarrow \quad F(0)=F(L)=0$$

$$\therefore\ F''(x)-kF(x)=0,\quad F(0)=F(L)=0$$

$$\boxed{F''(x)-kF(x)=0,\quad \ddot{G}(t)-c^2kG(t)=0}$$

Case 1 $\quad k=p^2>0$

$$F''(x)-p^2F(x)=0 \quad \Rightarrow \quad F(x)=Ae^{px}+Be^{-px}$$

$$F(0)=A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-A$$

$$F(L)=Ae^{pL}+Be^{-pL}=0 \quad \Rightarrow \quad A\left(e^{2pL}-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad A=0\left(e^{2pL}\neq 1\right),\quad B=0$$

$$\therefore\ F=0 \quad \Rightarrow \quad u\equiv 0(\text{무의미한 해})$$

Case 2 $\quad k=0$

$$F''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad F(x)=Ax+B$$

$$F(0)=B=0,\quad F(L)=AL+B=0 \quad \Rightarrow \quad A=0(L\neq 0)$$

$$\therefore\ F=0 \quad \Rightarrow \quad u\equiv 0(\text{무의미한 해})$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

Case 3 $k = -p^2 < 0$

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = A\cos px + B\sin px$$

$$F(0) = A = 0, \quad F(L) = A\cos pL + B\sin pL = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin pL = 0$$

$$B = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0(\text{무의미한 해})$$

$$\sin pL = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n\pi}{L}(n : \text{정수})$$

$$\therefore \; F(x) = F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1,\; 2,\; 3,\; \cdots)$$

$$\boxed{F''(x) - kF(x) = 0, \quad \ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0}$$

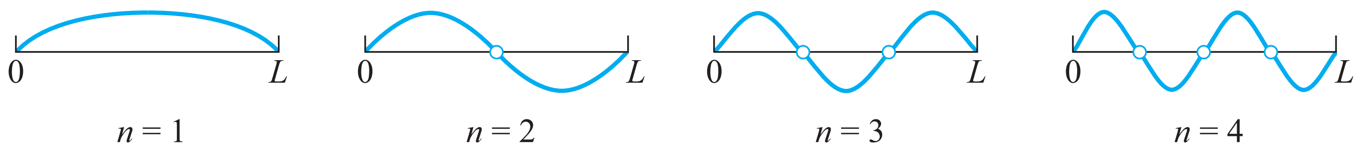
$$\ddot{G}(t) + \lambda_n{}^2 G(t) = 0, \quad \lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad G_n(t) = B_n\cos\lambda_n t + B_n * \sin\lambda_n t$$

$$u_n(x,t) = (B_n\cos\lambda_n t + B_n * \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1,\; 2,\; 3,\; \cdots)$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **Discussion of Eigenfunctions (고유함수에 관한 토의)**
- **Eigenfunction(고유함수)** 또는 **Characteristic Function(특성함수) :** $u_n(x,t)$
- **Eigenvalue(고유값)** 또는 **Characteristic Value(특성값) :** $\lambda_n = \dfrac{cn\pi}{L}$
- **Spectrum(스펙트럼) :** $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\}$
- u_n : n차 정규진동(nth Normal Mode)

단위시간당 진동수 $\dfrac{\lambda_n}{2\pi} = \dfrac{cn}{2L}$을 갖는 조화운동(Harmonic Motion)



- **Node(마디점)** : 현에서의 움직이지 않는 점

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = 0 \quad \text{단},\ x = \frac{L}{n},\ \frac{2L}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}L$$

12.3 Solution by Separating Variables.
Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **3단계. 전체 문제에 대한 해. 푸리에 급수** $\boxed{u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x)\qquad (0\le x\le L)}$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

초기조건(주어진 초기변위)의충족 : $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x)$

푸리에 사인 급수 적용 $\Rightarrow$ $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$

초기조건(주어진 초기속도)의충족 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n*\lambda_n\cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n*\lambda_n\sin\frac{n\pi}{L}x=g(x)$$

푸리에 사인 급수 적용 $\Rightarrow$ $B_n*\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$ $\Rightarrow$ $B_n*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

● **확립된 해**

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

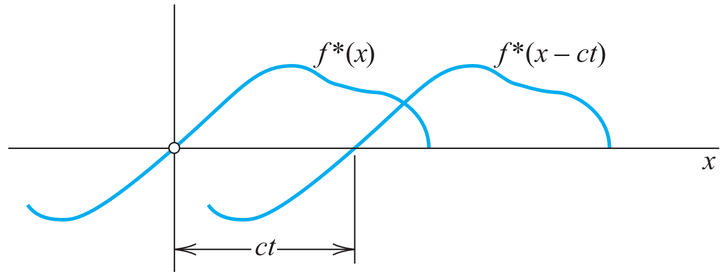
초기속도 $g(x)$가 0인 경우 고려

$$g(x)=0 \quad \Rightarrow \quad B_n{}^*=0$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{L}x\ , \qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right]$$



12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

■ Ex. 1 Find the solution of the wave equation corresponding to the triangular initial deflection

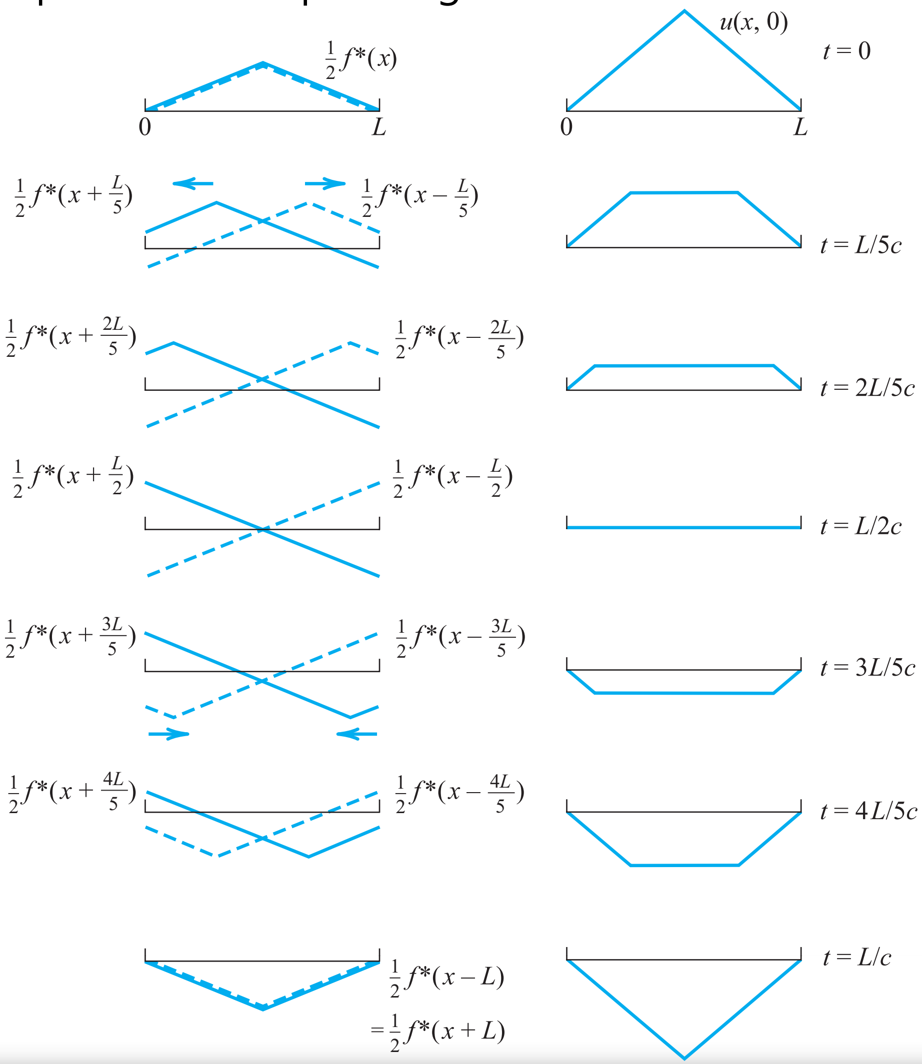
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right)\end{cases}$$

And initial velocity zero

$$u(x,t)$$

$$=\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t+\cdots\right]$$

Section 11.3 Ex. 4 이용



12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

PROBLEM SET 12.3

HW: 15-18

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

- **파동방정식 :** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$$v = x + ct, \quad w = x - ct$$

$$\Rightarrow \quad u_x = u_v v_x + u_w w_x = u_v + u_w,$$

$$u_{xx} = (u_v + u_w)_x = (u_v + u_w)_v v_x + (u_v + u_w)_w w_x = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}$$

$$u_t = u_v v_t + u_w w_t = cu_v - cu_w,$$

$$u_{tt} = (cu_v - cu_w)_t = (cu_v - cu_w)_v v_t + (cu_v - cu_w)_w w_t = c^2 u_{vv} - 2c^2 u_{vw} + c^2 u_{ww}$$

$$\therefore\ c^2 u_{vv} - 2c^2 u_{vw} + c^2 u_{ww} = c^2(u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}) \quad \Rightarrow \quad u_{vw} = \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v) \quad \Rightarrow \quad u = \int h(v)dv + \varphi(w) \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \phi(x + ct) + \varphi(x - ct)$$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

- **초기조건을 만족하는 D'Alembert 해**

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\varphi(x-ct) \quad \Rightarrow \quad u_t(x,t)=c\phi'(x+ct)-c\varphi'(x-ct)$$

주어진 초기변위

$$u(x,0)=f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,0)=\phi(x)+\varphi(x)=f(x)$$

주어진 초기속도

$$u_t(x,0)=g(x) \quad \Rightarrow \quad u_t(x,0)=c\phi'(x)-c\varphi'(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \phi(x)-\varphi(x)=k(x_0)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

$$\therefore \ \phi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0), \quad \varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds-\frac{1}{2}k(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x+ct)+\varphi(x-ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$$\therefore \ u(x,t)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

- **편미분방정식들의 일반적인 형태와 정규형**

준선형(Quasilinear) : $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

형태	정의 조건	12.1절의 예제
쌍곡선	$AC - B^2 < 0$	파동방정식
포물선	$AC - B^2 = 0$	열전도방정식
타원	$AC - B^2 > 0$	라플라스 방정식

- **정규형으로 변환**

특성방정식 : $Ay'^2 - 2By' + Cy = 0$

형태	새로운 변수	정규형
쌍곡선	$v = \Phi, \quad w = \Psi$	$u_{vw} = F_1$
포물선	$v = x, \quad w = \Phi = \Psi$	$u_{ww} = F_2$
타원	$v = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi), \quad w = \frac{1}{2i}(\Phi - \Psi)$	$u_{vv} + u_{ww} = F_3$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

■ Ex. 1 **체계적으로 얻어진 D'Alembert의 해**

파동방정식 : $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$y = ct \quad \Rightarrow \quad u_t = u_y y_t = c u_y, \quad u_{tt} = c^2 u_{yy} \quad \Rightarrow \quad u_{xx} - u_{yy} = 0$

특성방정식 : $y'^2 - 1 = (y' - 1)(y' + 1) = 0$

$\Phi(x, y) = y + x = $ 상수, $\quad \Psi(x, y) = y - x = $ 상수 $\quad \Rightarrow \quad v = \Phi = y + x = ct + x, \quad w = \Psi = y - x = ct - x$

$\therefore \; u = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

PROBLEM SET 12.4

HW: