Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9^{th} Edition, Wiley (2006)

Ch. 13 Complex Numbers and Functions

Ch. 13 Complex Numbers and Functions

Ch. 13 Complex Numbers and Functions (복소수와 복소함수)

- 내용 : 복소수와 복소평면에서의 기하학적 표현,
  Cauchy-Riemann 방정식에 근거한 해석성에 대한 검사법,
  초등 복소함수

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- 복소수(Complex Numbers): 실수 x, y의 순서쌍 $z=(x,y)= x+iy$
  - 실부(Real Part) : $x = \mathrm{Re}\, z$
  - 허부(Imaginary Part) : $y = \mathrm{Im}\, z$
  - 허수단위(Imaginary Unit) : $i = (0,1)$
  - 순허수(Pure Imaginary) : $z = iy$ $(x = 0)$

- 덧셈, 곱셈, 뺄셈, 나눗셈
  - 덧셈 : $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  - 곱셈 : $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
  - 뺄셈 : $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
  - 나눗셈 : $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- Ex. 1, 2 Sum, Product, Difference and Quotient of Complex Numbers

  $z_1 = 8+3i$, $z_2 = 9-2i$

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- Ex. 1, 2 Sum, Product, Difference and Quotient of Complex Numbers

  $z_1 = 8+3i,\ z_2 = 9-2i$

$z_1+z_2 = 17+i,\ z_1-z_2 = -1+5i,\ z_1z_2 = 78+11i,\ z_1/z_2 = 66/85+(43/85)i$

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- 복소평면(Complex Plane) : 복소수를 평면상의 점으로 기하학적으로 표시한 것

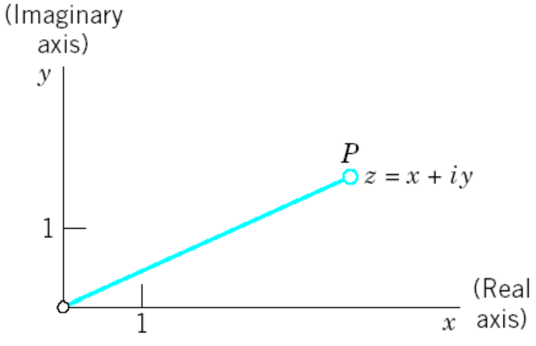


Fig. 315. The complex plane

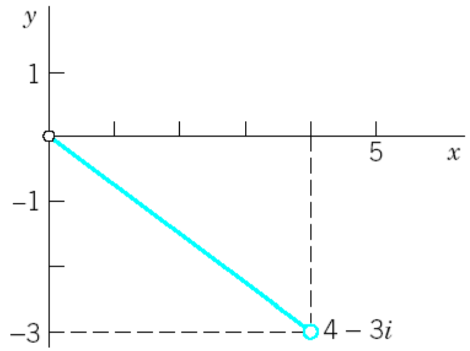


Fig. 316. The number 4 − 3i in the complex plane

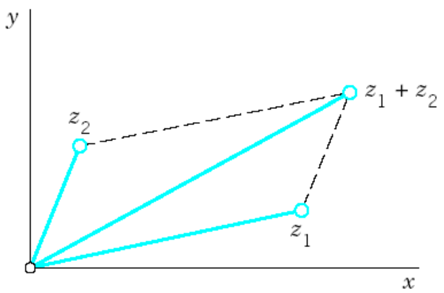


Fig. 317. Addition of complex numbers

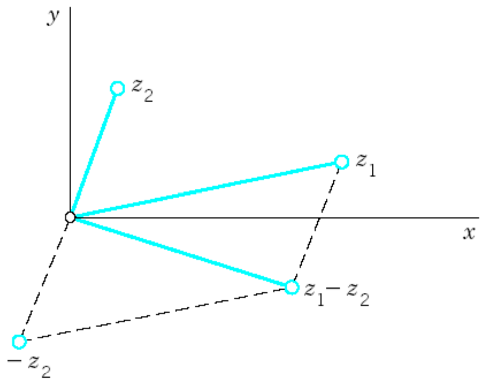
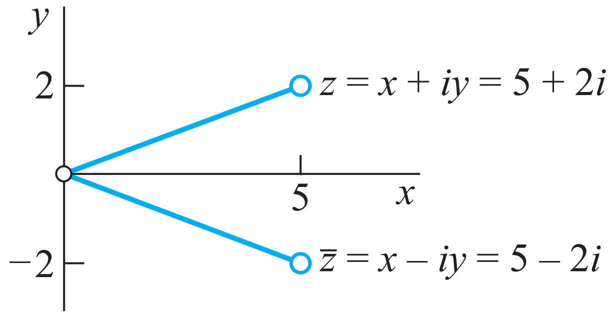


Fig. 318. Subtraction of complex numbers

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- 공액복소수(Complex Conjugate Number)

$\bar{z} = x - iy$: $z = x + iy$의 공액복소수



- 공식

  - $\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
  - $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
  - $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

■ Ex. 3 Complex Conjugate Numbers

$Z_1 = 4+3i$, $z_2 = 2+5i$

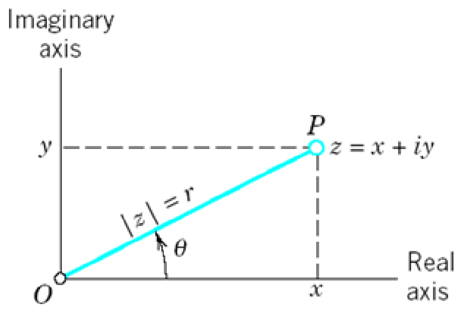
13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

PROBLEM SET 13.1

HW: 2

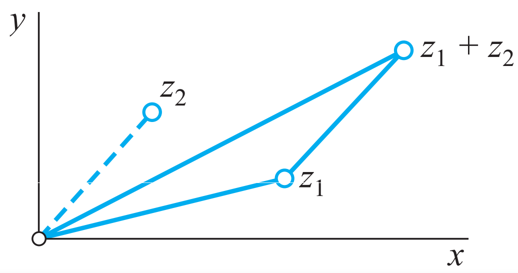
13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

- 극형식(Polar Form) : $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



- 절대값 또는 크기(Modulus) : $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$
- 편각(Argument) : $\theta = \arg z = \arctan\dfrac{y}{x}$
- 주값(Principal Value) : $\operatorname{Arg} z : \arg z$의 주값, $-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$
- 삼각형부등식(Triangle Inequality) : $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- 일반화된 삼각형부등식 :

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$



13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

- 극형식에서의 곱셈과 나눗셈

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$에 대하여

- 곱셈 $: z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

  곱의 절대값은 각 인자의 절대값들의 곱과 같다. $\left(|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \right)$

  곱의 편각은 각 인자의 편각의 합과 같다. $\left(\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \right)$

- 나눗셈 : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

∗ De Moivre 공식 : $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$ **Prove!**

13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

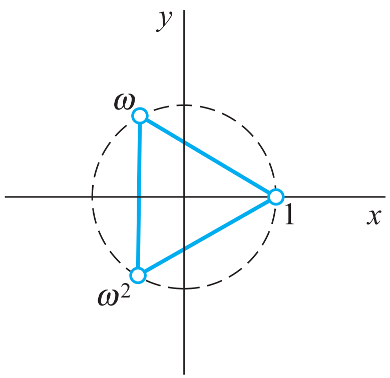
- 근(Roots)

- n 제곱근(nth Root) : $z = w^n$을 만족하는 w값들

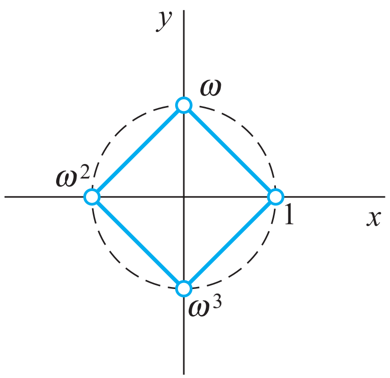
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

- 단위 n제곱근 : $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$

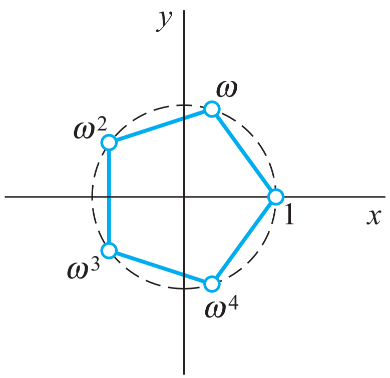
한 꼭지점이 1에 있으면서 단위원에 내접한 n개의 변을 가진 정다각형의 꼭지점들



n = 3



n = 4



n = 5

13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

PROBLEM SET 13.2

HW: 26 (a), (b), (c), 35

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

● 원과 원판, 반평면

- 단위원(Unit Circle) : $|z| = 1$
- 열린 원판(Open Circular Disk) : $|z - a| < \rho$
- 닫힌 원판(Closed Circular Disk) : $|z - a| \le \rho$
- 근방(Neighborhood) : $|z - a| < \rho$인 열린 원판
- 열린 환형(Open Annulus) : $\rho_1 < |z - a| < \rho_2$
- 닫힌 환형(Closed Annulus) : $\rho_1 \le |z - a| \le \rho_2$
- (열린)상반평면((Open)Upper Half-Plane) : $y > 0$인 점들의 집합
- 하반평면 : $y < 0$인 점들의 집합
- 우반평면 : $x > 0$인 점들의 집합
- 좌반평면 : $x < 0$인 점들의 집합

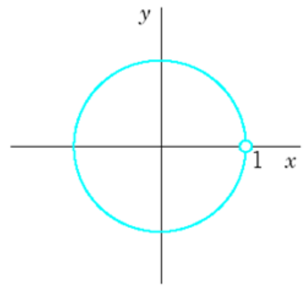


Fig. 327. Unit circle

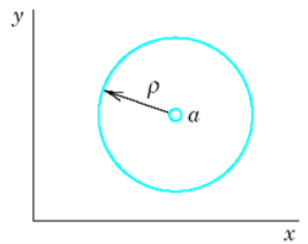


Fig. 328. Circle in the complex plane

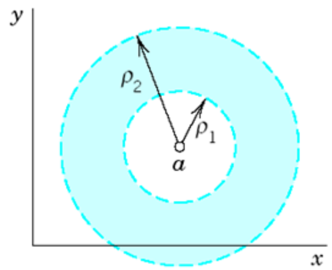


Fig. 329. Annulus in the complex plane

13.3 Derivative. Analytic Function (도함수와 해석함수)

- 복소평면에서 집합과 관련된 몇 가지 개념

- 점집합(Point Set) : 유한 또는 무한의 많은 점들의 집합
- 열렸다(Open) : 집합의 모든 점이 오로지 집합에 속해 있는 점들로만 구성된 근방을 가지고 있을 때
- 연결되었다(Connected) : 집합의 어떤 두 점도 집합에 속하는 점들로만 이루어진 유한한 선분의 파선(Broken Line)으로 이어질 때
- 영역(Domain) : 열린 연결집합(Open Connected Set)
- 여집합(Complement) : 집합에 속하지 않는 복소평면 내의 모든 점들의 집합
- 경계점(Boundary point) : 점의 모든 근방이 집합에 속하는 점과 속하지 않는 점을 둘 다 포함하는 점
- 경계(Boundary) : 모든 경계점의 집합
- 영역(Region) : 영역(Domain)과 그의 경계점의 일부 또는 전부의 합으로 이루어진 집합

13.3 Derivative. Analytic Function (도함수와 해석함수)

- 복소함수(Complex Function): 복소수 집합의 각각의 원소에서의 함수값이라 불리는 복소수 w를 지정해 주는 규칙

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- 복소변수(Complex Variable) : z
- 정의역(Domain) : 복소변수의 집합 S
- 치역(Range) : 함수의 모든 값의 집합

■ Ex. 1 복소변수의 함수

$w = f(z) = z^2 + 3z$라 하자. u와 v를 구하고, $z = 1 + 3i$에서 f 의 값을 계산하여라.

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- 복소함수(Complex Function): 복소수 집합의 각각의 원소에서의 함수값이라 불리는 복소수 w를 지정해 주는 규칙

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- 복소변수(Complex Variable) : z
- 정의역(Domain) : 복소변수의 집합 S
- 치역(Range) : 함수의 모든 값의 집합

■ Ex. 1 복소변수의 함수

$w = f(z) = z^2 + 3z$라 하자. u와 v를 구하고, $z = 1 + 3i$에서 f 의 값을 계산하여라.

$$u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = 2xy + 3y$$

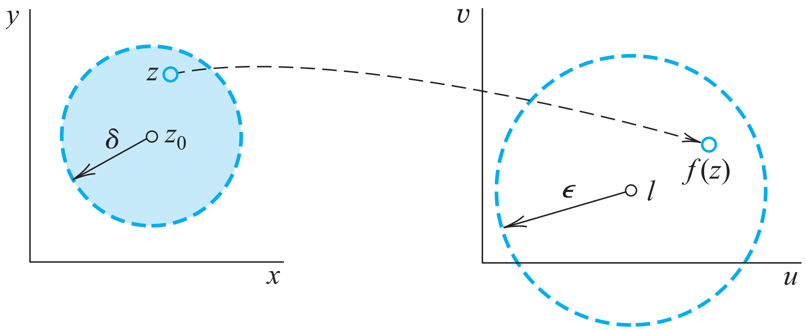
$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- 극한, 연속성, 도함수

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$

  $\Leftrightarrow$ 함수 $f(z)$가 z_0의 근방에서 정의되고, z_0에 근접한 모든 z에 대해 f 값이 l에 근접



실수의 경우에는 단지 실수축을 따라서만 x가 x_0로 접근할 수 있지만, z는 복소평면에서 임의의 방향으로부터 z_0에 접근할 수 있음.

- 연속: 함수 $f(z)$가 $z = z_0$에서 연속 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 정의되고 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$이다

- 도함수: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

■ Ex. 3 미분가능성. 도함수

함수 $f(z)=z^2$은 모든 z에 대해 미분가능하고 도함수는 $f'(z)=2z$가 된다.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2+2z\Delta z+(\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(2z\Delta z+(\Delta z)^2\right)=2z$$

● 미분 규칙

- $(cf)'=cf'$, $(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
- 연쇄법칙과 거듭제곱 규칙 $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$이 성립
- $f(z)$가 z_0에서 미분가능이면 z_0에서 연속이다.

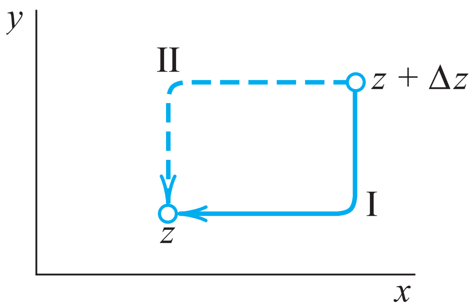
13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

■ Ex. 4 미분불가능성

$f(z) = \bar{z} = x - iy$가 미분불가능하다.

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1 & \Delta y = 0 \\ -1 & \Delta x = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 극한은 어떠한 z에서도 존재하지 않는다.



복소함수의 미분가능성은 보다 엄격한 조건을 요구함.

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- 해석함수(Anaytic Functions)
  - 해석적(Analytic) : 함수가 정의역의 모든 점에서 정의되고 미분가능일 때
  - 해석함수(Anaytic Functions) : 정의역에서 해석적인 함수

■ Ex. 5 다항식. 유리함수

정수 거듭제곱 1, z, z^2, $\cdots$은 전 복소평면에서 해석적이다.

$\Rightarrow$ 다항식 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$도 해석적이다.

$\Rightarrow$ 유리함수(Rational Function) $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ ($g(z)$, $h(z)$는 다항식)도 해석적이다.

($h(z)=0$인 점 제외)

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

PROBLEM SET 13.3

HW: 15, 17, 22

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- Cauchy-Riemann 방정식 : $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$
- Cauchy-Riemann 방정식

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$가 한 점 $z = x + iy$의 어떤 근방에서 정의되고 연속이며 미분가능하다

$\Rightarrow$ 그 점에서 u와 v의 1계 편도함수가 존재하고 Cauchy – Riemann 방정식을 만족한다.

$* \; f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$ **Prove!**

- Cauchy-Riemann 방정식

실변수 x및 y의 두 실수값을 가지는 연속함수 $u(x, y)$ 및 $v(x, y)$가
정의역에서 Cauchy – Riemann 방정식을 만족하는 연속인 1계 편도함수를 갖는다.
$\Rightarrow$ 그 복소함수 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$는 해석적이다.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

■ Ex. 2 Cauchy-Riemann 방정식, 지수함수

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y)$는 해석적인가?

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

■ Ex. 2 Cauchy-Riemann 방정식, 지수함수

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x(\cos y + i\sin y)$는 해석적인가?

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \quad u_x = e^x \cos y, \quad v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y$$

$\Rightarrow$ Cauchy-Riemann 방정식을 만족

$\Rightarrow$ $f(z)$는 모든 z에서 해석적이다.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- Ex. 3 상수의 절대값을 갖는 해석함수는 상수

$f(z)$가 정의역 D에서 해석적이고 D에서 $|f(z)| = k =$상수이면, D에서 $f(z)=$상수가 된다.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- Ex. 3 상수의 절대값을 갖는 해석함수는 상수

$f(z)$가 정의역 D에서 해석적이고 D에서 $|f(z)| = k =$상수이면, D에서 $f(z) =$상수가 된다.

$$|f(z)| = k = \text{상수} \quad \Rightarrow \quad |f|^2 = |u + iv|^2 = u^2 + v^2 = k^2$$

$$\text{미분 적용} \quad \Rightarrow \quad uu_x + vv_x = 0, \; uu_y + vv_y = 0$$

Cauchy-Riemann 방정식 적용

$$\Rightarrow \quad uu_x - vu_y = 0, \; uu_y + vu_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad (u^2 + v^2)u_x = 0, \; (u^2 + v^2)u_y = 0$$

$$\text{(i)} \quad k^2 = u^2 + v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

$$\text{(ii)} \quad k^2 = u^2 + v^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u_x = u_y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \text{상수}$$

Cauchy-Riemann 방정식 적용

$$\Rightarrow \quad v_x = v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{상수}$$

$$\therefore \; f = \text{상수}$$

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- Laplace's Equation

  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$가 정의역 D에서 해석적이다.

  $\Rightarrow$ u와 v는 D에서 각각 라플라스 방정식을 만족하며 연속인 2계 편도함수를 갖는다.

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$u_x = v_y, \; u_y = -v_x$$

$$u_{xx} = v_{yx}, \; u_{yy} = -v_{xy}$$

$$u_{xy} = v_{yy}, \; u_{yx} = -v_{xx}$$

- 조화함수(harmonic function): 연속인 이계 편도함수를 갖는 라플라스 방정식의 해
- 공액조화함수(conjugate harmonic function): 두 조화함수 u 및 v가 한 정의역 D에서 Cauchy-Riemann 방정식을 만족하면, 그들은 D에서 어떤 해석함수 f의 실수부 및 허수부가 된다. 이 때 v를 D에서 u의 공액조화함수라 함.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

■ Ex. 4 Cauchy-Riemann 방정식에 의한 공액조화함수 찾기

$u = x^2 - y^2 - y$가 전 복소평면에서 조화함수임을 검증하고, u의 공액조화함수 v를 구하라.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

■ Ex. 4 Cauchy-Riemann 방정식에 의한 공액조화함수 찾기

$u = x^2 - y^2 - y$가 전 복소평면에서 조화함수임을 검증하고, u의 공액조화함수 v를 구하라.

$u_x = 2x,\quad u_y = -2y - 1 \quad\Rightarrow\quad u_{xx} = 2,\quad u_{yy} = -2 \quad\Rightarrow\quad \nabla^2 u = 0 \quad\Rightarrow\quad \therefore\ u$는 조화함수이다.

공액조화함수 v 구하기

$$v_y = u_x = 2x,\quad v_x = -u_y = 2y + 1 \quad\Rightarrow\quad v = 2xy + h(x)$$

$$\Rightarrow\quad v_x = 2y + \frac{dh}{dx} = 2y + 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dh}{dx} = 1 \quad\Rightarrow\quad h = x + c$$

$$\therefore\ v = 2xy + x + c$$

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = z^2 + iz + ic$$

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

PROBLEM SET 13.4

HW: 11, 23, 27