Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 14 Complex Integration

14.1 Line Integral in the Complex Plane

14.2 Cauchy's Integral Theorem

14.3 Cauchy's Integral Formula

14.4 Derivatives of Analytic Functions

Ch. 14 Complex Integration (복소적분)

- 복소적분의 중요성
  - 실질적 이유 : 실적분 계산법으로 접근이 용이하지 않은 응용분야에서 나타나는 일부 적분들을 복소적분에 의해 계산해 낼 수 있기 때문.
  - 이론적 이유 : 해석함수의 몇 가지 기본 성질들을 다른 방법들로는 증명하기 어렵기 때문.
- 내용 : 복소적분의 정의, Cauchy의 적분정리, Cauchy의 적분공식

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- **(복소)선적분(**Line Integral**):** $\int_C f(z)\,dz$

복소정적분으로 피적분함수를 주어진 곡선 또는 그것의 일부를 따라 적분한다.

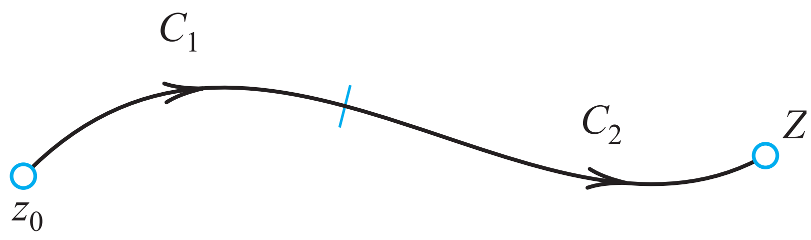
- 적분경로(Path of Integration) $C\ :\ z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \le t \le b)$
- 양의 방향(Positive Sense) : C에 대하여 t가 증가하는 방향
- 매끄러운 곡선(Smooth Curve) : 모든 점에서 연속이고 0이 아닌 도함수

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)\text{를 갖는 곡선}$$

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- **기본적인 속성들은 정의에 의해서 직접적으로 나타난다.**

1. **선형성**(Linearity): $\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]dz = k_1 \int_C f_1(z)dz + k_2 \int_C f_2(z)dz$
2. $\int_{z_0}^{z} f(z)dz = -\int_{z}^{z_0} f(z)dz$
3. **경로 분할**(Partitioning of Path) : $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$



14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- **첫 번째 계산방법 : 부정적분과 상, 하한의 대체**
- **일반적으로 통용되는 개념**

단순 닫힌 곡선(Simple Closed Curve) **:** 자신과 교차하지 않는 닫힌 곡선

단순 연결(Simply connected) **:** 단순 닫힌 곡선이 집합에 속한 점들만 에워쌀 때

■ Ex. 원판(Circular Disk)은 단순연결되어 있지만,
환형(Ammulus)은 단순연결되어 있지 않다.

- **Indefinite Integration of Analytic Functions (해석함수의 부정적분)**

$f(z)$: 단순연결 영역 D내에서 해석적

D내에 $F'(z)=f(z)$를 만족하는 해석함수 $F(z)$가 존재

$\Rightarrow D$내의 두 점 z_0와 z_1을 연결하는 D내의 모든 경로에 대하여 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1)-F(z_0)$가 성립

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- Ex. 1 $$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i$$

- Ex. 4 $$\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \mathrm{Ln}\, i - \mathrm{Ln}(-i) = \frac{i\pi}{2} - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) = i\pi$$

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- **두 번째 계산방법 : 경로에 대한 표현식의 사용**
- **Integration by the Use of the Path (경로를 사용한 적분)**

  $C : z = z(t) \quad a \le t \le b$; 구분적으로 매끄러운 경로

  $f(z)$: C 위에서 연속인 함수

  $$\Rightarrow \quad \int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)dt \qquad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right)$$

- **적용하는 과정**

A. 경로 C를 $z(t)$ $(a \le t \le b)$의 형태로 표시

B. 도함수 $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt}$를 계산한다.

C. $f(z)$의 모든 z에 $z(t)$를 대입한다.

D. $f[z(t)]\dot{z}(t)$를 t에 대해 a에서 b까지 적분한다.

14.1 Line Integral in the Complex Plane
(복소평면에서의 선적분)

■ Ex.5 **A Basic Result: Integral of 1/z Around the Unit Circle**

단위원(반지름 $=1$, 중심 0인 원)을 따라 반시계방향으로 $1/z$를 적분하면 $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$이다.

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

■ Ex.5 **A Basic Result: Integral of 1/z Around the Unit Circle**

단위원(반지름$=1$, 중심 0인 원)을 따라 반시계방향으로 $1/z$를 적분하면 $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$이다.

A. 단위원 $C : z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$

B. $\dot{z}(t) = ie^{it}$

C. $f(z(t)) = \dfrac{1}{z(t)} = e^{-it}$

D. $\displaystyle \oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

■ Ex.6 **Integral of $1/z^m$ with Integer Power m (정수 거듭제곱을 포함하는 적분)**

m이 정수이고 z_0가 상수일 때 $f(z)=(z-z_0)^m$이라고 하자. 반지름이 ρ이고 중심이 z_0인 원의 주위를 따라 반시계 방향으로 $f(z)$를 적분하여라.

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

■ Ex.6 **Integral of $1/z^m$ with Integer Power m (정수 거듭제곱을 포함하는 적분)**

m이 정수이고 z_0가 상수일 때 $f(z)=(z-z_0)^m$이라고 하자. 반지름이 ρ이고 중심이 z_0인 원의 주위를 따라 반시계 방향으로 $f(z)$를 적분하여라.

$$z(t)=z_0+\rho(\cos t+i\sin t)=z_0+\rho e^{it} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad (z-z_0)^m=\rho^m e^{imt}, \quad dz=i\rho e^{it}dt$$

$$\oint_C (z-z_0)^m dz$$

$$=i\rho^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}dt$$

$$=i\rho^{m+1}\left[\int_0^{2\pi}\cos(m+1)t\,dt+i\int_0^{2\pi}\sin(m+1)t\,dt\right]$$

$$=\begin{cases} 2\pi i & (m=-1) \\ 0 & (m\ne -1 \text{ 및 정수}) \end{cases}$$

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

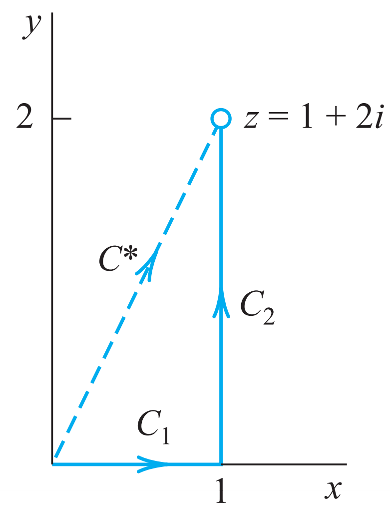
- **Dependence on Path (경로 의존성)**

일반적으로 복소선적분은 경로의 양끝점에 의존할 뿐 아니라,

경로의 기하학적 현상에도 의존한다.

■ Ex.7 **Integral of a Nonanalytic Fucntion. Dependence on Path**

$f(z) = \mathrm{Re}\, z = x$를 0에서 $1+2i$까지, (**a**) C^*를 따라, (**b**) C_1과 C_2로 구성된 C를 따라 적분하라.



14.1 Line Integral in the Complex Plane
(복소평면에서의 선적분)

- **Dependence on Path (경로 의존성)**

일반적으로 복소선적분은 경로의 양끝점에 의존할 뿐 아니라,
경로의 기하학적 현상에도 의존한다.

■ Ex.7 **Integral of a Nonanalytic Fucntion. Dependence on Path**

$f(z) = \operatorname{Re} z = x$를 0에서 $1+2i$까지, $(\mathbf{a})$ C^*를 따라, $(\mathbf{b})$ C_1과 C_2로 구성된 C를 따라 적분하라.

$(\mathbf{a})$ $C^* : z(t) = t + 2it \ (0 \le t \le 1)$

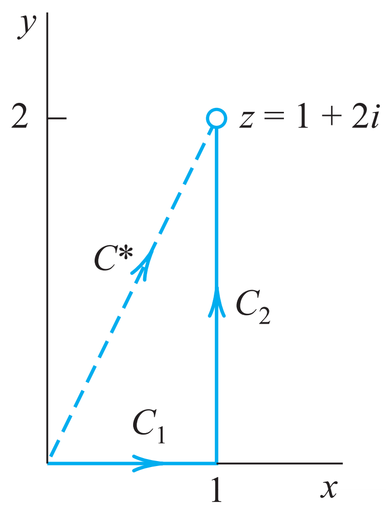
$\dot{z}(t) = 1 + 2i, \quad f[z(t)] = x(t) = t$

$$\Rightarrow \quad \therefore \int_{C^*} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+2i) dt = \frac{1}{2}(1+2i) = \frac{1}{2} + i$$

$(\mathbf{b})$ $C_1 : z(t) = t \ (0 \le t \le 1) \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = 1, \quad f(z(t)) = x(t) = t$

$C_2 : z(t) = 1 + it \ (0 \le t \le 2) \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = i, \quad f(z(t)) = x(t) = 1$

$$\Rightarrow \quad \therefore \int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^2 1 \cdot i dt = \frac{1}{2} + 2i$$



∴ 적분경로에 따라 적분값이 다를 수 있다.

14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- **Bounds for Integrals (적분한계값).** *ML* **부등식**

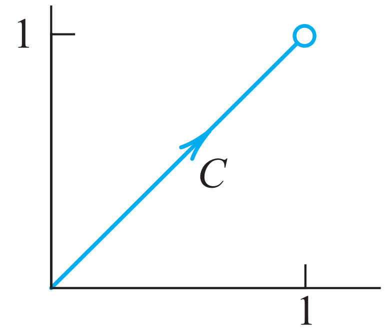
$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML \qquad (ML\text{부등식})$$

$L : C$의 길이, $M : C$위의 모든 곳에서 $|f(z)| \le M$을 만족하는 상수

■ Ex.8 **Estimation of an Integral**

다음 적분의 절대값에 대한 상계(Upper Bound)를 구하여라

$\int_C z^2 dz,\ \ C : 0$부터 $1+i$까지의 선분



14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

- **Bounds for Integrals (적분한계값).** *ML* **부등식**

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML \qquad (ML\text{부등식})$$

$L : C$의 길이, $\quad M : C$위의 모든 곳에서 $|f(z)| \le M$을 만족하는 상수

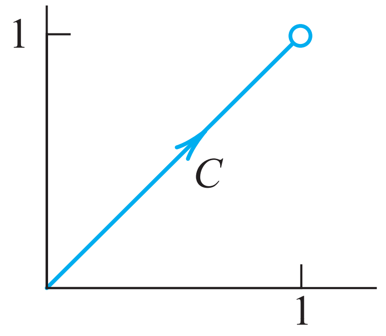
■ Ex.8 **Estimation of an Integral**

다음 적분의 절대값에 대한 상계(Upper Bound)를 구하여라

$\int_C z^2\,dz,\quad C : 0$부터 $1+i$까지의 선분

$$L = \sqrt{2}, \quad |f(z)| = |z^2| \le 2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_C z^2\,dz\right| \le 2\sqrt{2} = 2.8284$$



14.1 Line Integral in the Complex Plane (복소평면에서의 선적분)

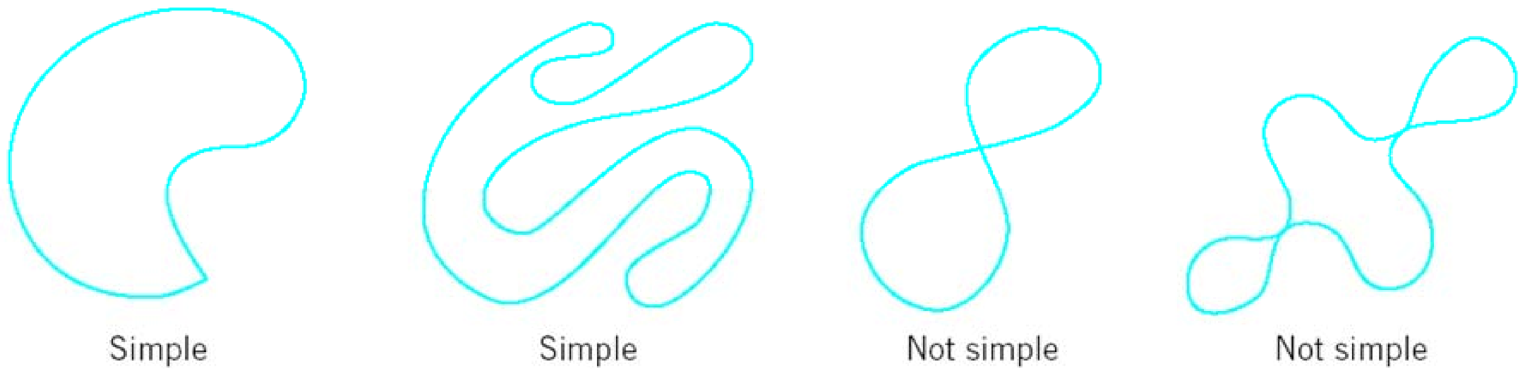
PROBLEM SET 14.1

HW: 28, 34 (b)

14.2 Cauchy's Integral Theorem
(Cauchy의 적분정리)

● **단순 닫힌 경로(**Simple Closed Path**) :** 스스로 교차하거나 접촉하지 않는 닫힌 경로

■ Ex. 원은 단순 닫힌 경로이지만 8자형 곡선은 단순 닫힌 경로가 아니다.



14.2 Cauchy's Integral Theorem (Cauchy의 적분정리)

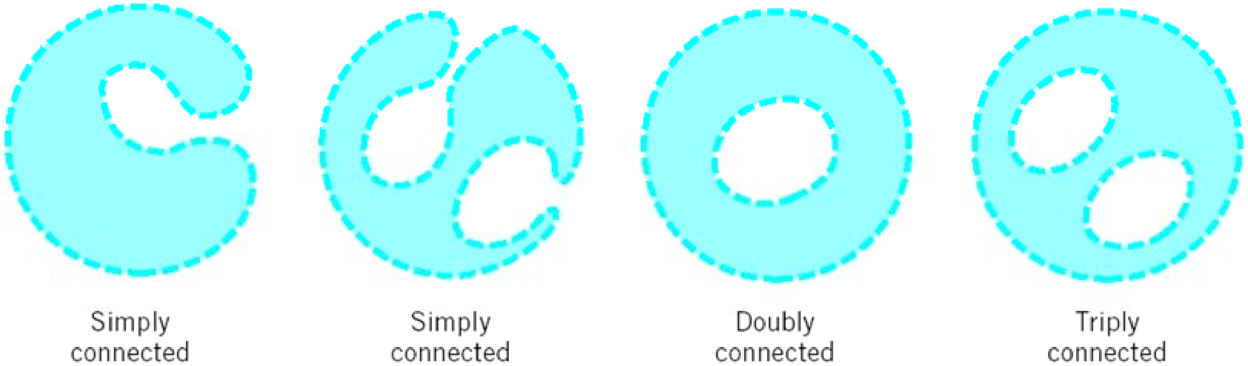
- **영역에 대한 정의**
- **단순연결영역(**Simply Connected Domain**):**

  영역의 모든 단순 닫힌 경로가 오직 영역의 점들만 둘러싸고 있는 영역

■ Ex. 원, 타원 또는 어떠한 단순 닫힌 곡선의 내부

- **다중연결**(Multiply Connected) **:** 단순연결되지 않은 영역

■ Ex. Annulus (환형)



14.2 Cauchy's Integral Theorem
(Cauchy의 적분정리)

- **유계영역(**Bounded Domain**) :** 원점이 중심인 어떤 원의 내부에 완전히 속해 있는 영역
- *p***중연결**(*p*-fold Connected)
- 유계영역의 경계가 공통점이 없는 *p* 개의 닫힌 연결집합으로 구성되어 있을 때
- 경계의 집합은 곡선, 선분, 또는 점일 수 있다.
- *p-1* 개의 구멍을 갖게 된다.

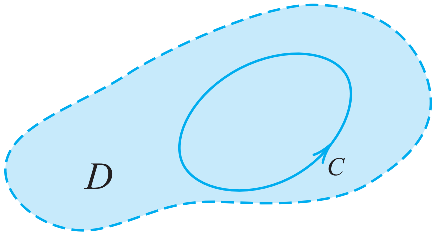
■ Ex. 환형(Annulus)은 이중연결(p = 2)되었다.

14.2 Cauchy’s Integral Theorem (Cauchy의 적분정리)

- **Cauchy’s Integral Theorem**

  $f(z)$가 단순연결 정의역 D에서 해석적이면,

  D에 있는 모든 단순 닫힌 곡선 C에 대하여 $\oint_C f(z)dz = 0$이다.



■ Ex.1 **특이점들이 없다(완전함수들)**

e^z, $\cos z$, z^n은 완전함수(모든 z에 대해 해석적인 함수)이다

임의의 닫힌 경로에 대하여

$$\oint_C e^z dz = 0, \quad \oint_C \cos z dz = 0, \quad \oint_C z^n dz = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ \cdots)$$

14.2 Cauchy's Integral Theorem
(Cauchy의 적분정리)

■ Ex.2 **윤곽선 밖에 있는 특이점**

C : 단위원

$z = \pm\frac{\pi}{2},\ \ \pm\frac{3\pi}{2},\ \cdots$에서 $\sec z = \frac{1}{\cos z}$는 해석적이지 않지만, 이 점들은 모두 C의 밖에 놓여 있다.

$\frac{1}{z^2+4}$가 해석적이지 않은 점 $z = \pm 2i$는 C의 밖에 있다.

$$\therefore \oint_C \sec z\,dz = 0, \quad \oint_C \frac{dz}{z^2+4} = 0$$

■ Ex.3 **비해석적인 함수**

$$\oint_C \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\,dt = 2\pi i \quad \left(C : z(t) = e^{it}\ \ (0 \le t \le 2\pi)\right)$$

$f(z) = \bar{z}$는 해석함수가 아니므로 Cauchy의 정리가 적용되지 않는다.

14.2 Cauchy's Integral Theorem (Cauchy의 적분정리)

■ Ex.4 **해석성은 필요조건이 아니라 충분조건이다.**

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0 \ (C: \text{단위원})$$

$z=0$에서 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$이 해석적이지 않기 때문에 이 결과는 Cauchy의 정리로부터 나오지 않았다.

$\therefore$ D에서 f가 해석적이라는 조건은

Cauchy의 정리가 성립하기 위한 필요조건이라기보다는 충분조건이다.

■ Ex. 5 **단순연결은 필수적이다.**

D: 환형 $\left(\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}\right)$, C: 단위원(D에 포함), $f(z)=\dfrac{1}{z}$: D에서 해석적 $\Rightarrow \oint_C \dfrac{dz}{z} = 2\pi i$

D가 단순연결 되어 있지 않으므로 Cauchy의 정리를 적용할 수 없다.

$\therefore$ 정의역 D가 단순연결 되어 있어야 한다는 조건은 아주 필수적이다.

14.2 Cauchy's Integral Theorem (Cauchy의 적분정리)

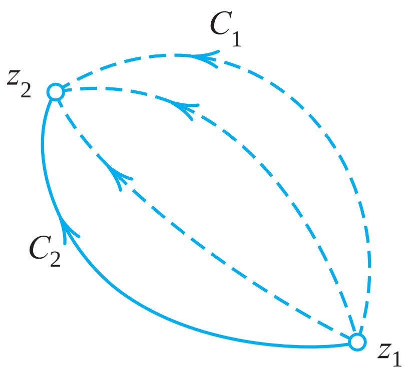
- **경로 독립성**

  만일 $f(z)$가 단순연결된 정의역 D내에서 해석적이면,

  $f(z)$의 적분은 D내의 경로에 독립이다.

- **경로변형의 원리(Principle of Deformation of Path):**

  변형경로(양끝을 고정한 채 연속적으로 변형한 적분경로)가 항상 $f(z)$가 해석적인 점만 포함하는 한, 선적분의 값은 어떠한 변형이 있더라도 같은 값을 유지한다.



14.2 Cauchy's Integral Theorem
(Cauchy의 적분정리)

- **부정적분의 존재성**

$D:$ 단순연결 영역

$f(z): D$에서 해석적

$\Rightarrow$ D에서 해석적이고 $F'(z)=f(z)$를 만족하는 $f(z)$의 부정적분 $F(z)$가 D에서 존재

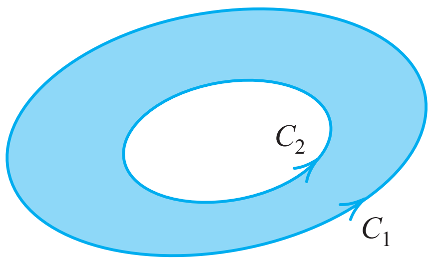
- **다중연결 영역에 대한** Cauchy**의 정리**

$D:$ 바깥 경계곡선 C_1과 안쪽 경계곡선 C_2를 갖는 이중연결 영역

$D^*: D$와 경계곡선들을 포함하는 임의의 정의역

$f(z): D^*$내에서 해석적

$$\Rightarrow \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

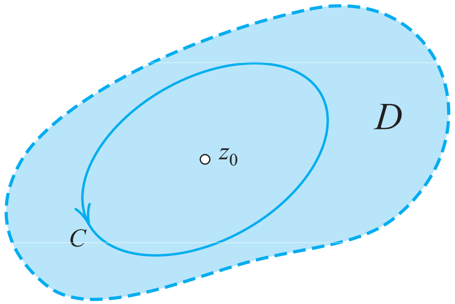


14.2 Cauchy's Integral Theorem (Cauchy의 적분정리)

PROBLEM SET 14.2

HW: 16, 23

14.3 Cauchy's Integral Formula (Cauchy의 적분공식)



- Cauchy의 적분공식

D : 단순연결 영역

$f(z)$: D에서 해석적

C : 임의의 점 z_0를 둘러싸고 있는 D안의 임의의 단순 닫힌 곡선

$$\Rightarrow \quad \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0), \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$ (적분 방향은 반시계 방향이다.)

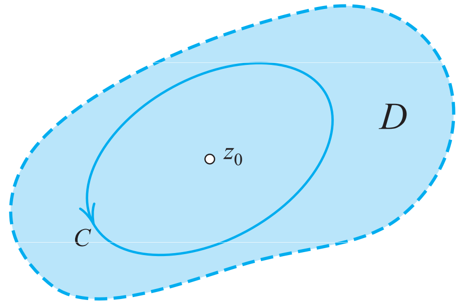
■ Ex.1 Cauchy의 적분공식

$z_0 = 2$를 둘러싸는 임의의 윤곽선에 대하여 $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^z\Big|_{z=2} = 2\pi i e^2 = 46.4268i$

■ Ex.2 Cauchy의 적분공식

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz$$

14.3 Cauchy's Integral Formula
(Cauchy의 적분공식)



- **Cauchy의 적분공식**

D : 단순연결 영역

$f(z)$: D에서 해석적

C : 임의의 점 z_0를 둘러싸고 있는 D안의 임의의 단순 닫힌 곡선

$$\Rightarrow \quad \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0), \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$ (적분 방향은 반시계 방향이다.)

■ Ex.1 **Cauchy의 적분공식**

$z_0 = 2$를 둘러싸는 임의의 윤곽선에 대하여 $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2 = 46.4268i$

■ Ex.2 **Cauchy의 적분공식**

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3-3}{z-\frac{1}{2}i}dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2}z^3-3\right]\Bigg|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\pi}{8}-6\pi i$$ $\left(C \text{ 내부에서 } z_0 = \frac{1}{2}i\right)$

14.3 Cauchy's Integral Formula
(Cauchy의 적분공식)

- **다중연결 영역**(Multiply Connected Domains)

$f(z)$가 C_1과 C_2 및 C_1과 C_2에 의해 둘러싸인 고리 모양의 영역안에서 해석적

z_0가 그 영역에 있는 임의의 점

$$\Rightarrow \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$ 가 성립

밖에서의 적분은 반시계 방향으로 하고 안에서의 적분은 시계 방향으로 한다.

14.3 Cauchy's Integral Formula (Cauchy의 적분공식)

PROBLEM SET 14.3

HW: 14, 18

14.4 Derivatives of Analytic Functions (해석함수의 도함수)

- **해석함수의 도함수**

$f(z)$가 영역 D에서 해석적(D에서 모든 계의 도함수를 갖고 그 도함수도 역시 해석적이다.)

$$\Rightarrow \quad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz, \quad f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz, \quad \cdots$$

일반적으로 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

C: z_0를 둘러싸면서 내부 전체가 D에 속해 있는 D안의 임의의 단순 닫힌 경로

적분 방향 : 반시계 방향

■ Ex. 1 **선적분의 계산**

점 πi를 싸고 있는 임의의 윤곽선에 대하여 $\oint_C \dfrac{\cos z}{(z-\pi i)^2}dz = 2\pi i(\cos z)'\big|_{z=\pi i} = -2\pi i \sin \pi i = 2\pi \sinh \pi$ (반시계)

14.4 Derivatives of Analytic Functions
(해석함수의 도함수)

- Cauchy의 부등식. Liouville와 Morera의 정리

- Cauchy의 부등식 : $\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \dfrac{n!M}{r^n}$

- Liouville의 정리

  어떤 완전함수가 전 복소평면에서 절대값이 유계이면, 이 함수는 반드시 상수이다.

- Morera의 정리(Cauchy 적분정리의 역)

  $f(z)$가 단순연결 영역 D에서 연속이고, D에 있는 모든 닫힌 곡선에 대하여 $\oint_C f(z)dz = 0$이면,

  $f(z)$는 D에서 해석적이다.

14.4 Derivatives of Analytic Functions
(해석함수의 도함수)

PROBLEM SET 14.4

HW: 12