Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 15 Power Series, Taylor Series

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests

15.2 Power Series

15.3 Functions Given by Power Series

15.4 Taylor and Maclaurin Series

15.5 Uniform Convergence

Ch. 15 Power Series, Taylor Series
(거듭제곱 급수와 테일러 급수)

- 거듭제곱급수는 대표적인 해석함수이고 , 역으로 모든 해석함수들은 테일러 급수라고 하는 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다.

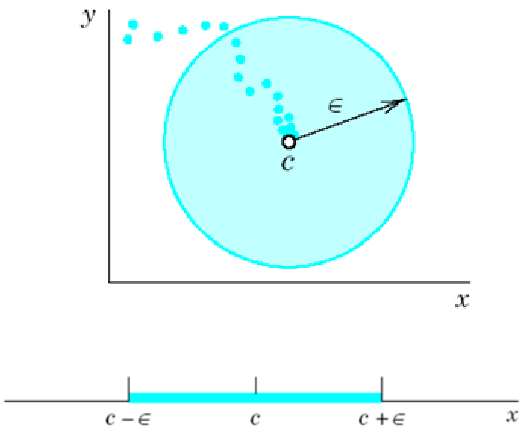
15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- 수열(Sequence) $z_1,\ z_2,\ \cdots$ 또는 $\{z_1,\ z_2,\ \cdots\}$ 또는간단히 $\{z_n\}$

  : 각각의 양의 정수 n에 대하여 한 개의 수 z_n이 배정될 때

- 항(Term): z_n
- 실수열(Real Sequence): 각 항들이 실수인 수열
- 수렴
- 수렴수열(Convergent Sequence): $z_1,\ z_2,\ \cdots$은 극한값(Limit) c를 갖는 수열

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{또는 간단히} \quad z_n \to c$$



- 발산수열(Divergent Sequence): 수렴하지 않는 수열

■ Ex. 1 수렴수열과 발산수열

수열 $\left\{\frac{i^n}{n}\right\} = \left\{i,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{i}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\right\}$은 극한값 0에 수렴한다.

수열 $\{i^n\} = \{i,\ -1,\ -i,\ 1,\ \cdots\}$과 $z_n = (1+i)^n$인 $\{z_n\}$은 발산한다.

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

● 실부와 허부의 수열

복소수 $z_n = x_n + iy_n \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$의 수열 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$이 $c = a + ib$에 수렴

$\Leftrightarrow$ 실부의 수열 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$이 a에 수렴하고 허부의 수열 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots$이 b에 수렴

■ Ex. 2 실부와 허부의 수열

$z_n = x_n + iy_n = 1 - \dfrac{1}{n^2} + i\left(2 + \dfrac{4}{n}\right)$에서

실부의 수열 $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$은 극한값 1에 수렴하고, 허부의 수열 $y_n = 2 + \dfrac{4}{n}$는 극한값 2에 수렴한다.

$\therefore\ z_n$은 $1 + 2i$로 수렴한다.

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- 급수(Series) $\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots$
  - n 번째 부분합(Partial Sums): $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$
  - 급수의 항(term): $z_1,\ z_2,\ \cdots$
  - 수렴급수: 부분합의 수열이 수렴
  - 합(Sum) 또는 값(Value) : $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ $\left(s = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots \right)$인 s
  - 발산급수: 수렴하지 않는 급수
  - 나머지(Remainder): $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \cdots$
- 실부와 허부

$z_m = x_m + iy_m$ 인 급수 $\sum_{m=1}^{\infty} z_m$이 합을 $s = u + iv$로 가지면서 수렴

$\Leftrightarrow$ $x_1 + x_2 + \cdots$이 수렴하여 그 합이 u가 되고 $y_1 + y_2 + \cdots$이 수렴하여 그 합이 v가 되는 것

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- 급수에 대한 수렴, 발산 판정법
- 발산

급수 $z_1 + z_2 + \cdots$이 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$이면, 급수는 발산한다.

cf) Harmonic series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

- 급수에 대한 Cauchy의 수렴원리

급수가 수렴 $\Leftrightarrow$ 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 부등식

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon \quad (\text{모든 } n > N \text{ 그리고 } p = 1,\ 2,\ \cdots\text{에 대하여})$$

을 만족하는 N(일반적으로 ε에 의존)이 존재하는 것이다.

- 절대수렴(Absolutely Convergent) : 급수의 각 항들의 절대값의 합이 수렴하는 경우
- 조건수렴(Conditionally Convergent):

급수는 수렴하나 각 항들의 절대값의 합은 발산하는 경우 ex) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

- 급수가 절대수렴하면, 수렴한다.

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- Comparison Test (비교판정법)

  급수 $z_1 + z_2 + \cdots$이 주어졌을 때, $|z_n| \le b_n \ (n = 1,\ 2,\ \cdots$에 대하여$)$을 만족하는 음이 아닌 실수항의 수렴급수 $b_1 + b_2 + \cdots$을 찾아낼 수 있다

  $\Rightarrow$ 주어진 급수는 수렴하며, 또한 절대수렴한다.

- Geometric Series (기하급수): $\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-q}\text{로 수렴} & |q| < 1 \\ \text{발산} & |q| \ge 1 \end{cases}$

- Ratio Test (비판정법)

  $z_n \ne 0 \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$인 어떤 급수 $z_1 + z_2 + \cdots$에 대하여

  어떤 수 N보다 큰 모든 n에 대하여 $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le q < 1 \ (n > N)$이면, 이 급수는 절대수렴한다.

  모든 $n > N$에 대하여 $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \ge 1$ 이면, 이 급수는 발산한다. cf) $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- Ratio Test (비판정법)

$z_n \neq 0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$인 어떤 급수 $z_1 + z_2 + \cdots$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$이다.

(i) $L < 1$이면, 그 급수는 절대수렴한다.

(ii) $L > 1$이면, 그 급수는 발산한다.

(iii) $L = 1$이면, 그 급수는 수렴할 수도 발산할 수도 있으므로, 이 판정은 실패이다.

ex) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

■ Ex. 4 비판정법

다음 급수는 수렴하는가, 발산하는가? (먼저 추정해 보고 계산하라)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(100+75i)^n}{n!} = 1 + (100+75i) + \frac{1}{2!}(100+75i)^2 + \cdots$$

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- Ratio Test (비판정법)

  $z_n \neq 0 \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$인 어떤 급수 $z_1 + z_2 + \cdots$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$이다.

  (i) $L < 1$이면, 그 급수는 절대수렴한다.

  (ii) $L > 1$이면, 그 급수는 발산한다.

  (iii) $L = 1$이면, 그 급수는 수렴할 수도 발산할 수도 있으므로, 이 판정은 실패이다.

  ex) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

■ Ex. 4 비판정법

다음 급수는 수렴하는가, 발산하는가? (먼저 추정해 보고 계산하라)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!} = 1 + (100+75i) + \frac{1}{2!}(100+75i)^2 + \cdots$$

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{\frac{(100+75i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(100+75i)^n}{n!}}\right| = \frac{|100+75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \to 0 = L\text{이므로 이 급수는 수렴한다.}$$

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

- Root Test (근판정법)

어떤 급수 $z_1 + z_2 + \cdots$에 대하여

어떤 수 N보다 큰 모든 n에 대하여 $\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1 \ (n > N)$이면, 이 급수는 절대수렴한다.

무한히 많은 n에 대하여 $\sqrt[n]{|z_n|} \ge 1$이면, 이 급수는 발산한다. cf) $\sqrt[n]{|z_n|} < 1$

- Root Test (근판정법)

급수 $z_1 + z_2 + \cdots$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$이다.

(i) $L < 1$이면, 그 급수는 절대수렴한다.

(ii) $L > 1$이면, 그 급수는 발산한다.

(iii) $L = 1$이면, 판정은 실패이다. ex) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$

15.1 Sequences, Series, Convergence Tests (수열과 급수, 수렴판정)

PROBLEM SET 15.1

HW: 17 (ratio test), 18 (comparison test), 23

15.2 Power Series (거듭제곱급수)

- 거듭제곱급수(Power Series)

- $z-z_0$의 거듭제곱으로 된 거듭제곱급수 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$

  계수(Coefficient) : 복소수 $a_0,\ a_1,\ \cdots$

  중심(Center) : 복소수 z_0

- $z_0 = 0$의 거듭제곱으로 된 거듭제곱급수 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

■ Ex. 1 원판 안에서의 수렴, 기하급수

기하급수 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = 1 + z + z^2 + \cdots$은 $|z| < 1$일 때 절대수렴하고 $|z| > 1$일 때 발산한다.

■ Ex. 2 모든 z에 대한 수렴

e^z의 Maclaurin 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$

15.2 Power Series (거듭제곱급수)

● 거듭제곱급수(Power Series)

- $z-z_0$의 거듭제곱으로 된 거듭제곱급수 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$

  계수(Coefficient) : 복소수 $a_0,\ a_1,\ \cdots$

  중심(Center) : 복소수 z_0

- $z_0 = 0$의 거듭제곱으로 된 거듭제곱급수 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$

■ Ex. 1 원판 안에서의 수렴, 기하급수

기하급수 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = 1 + z + z^2 + \cdots$은 $|z| < 1$일 때 절대수렴하고 $|z| > 1$일 때 발산한다.

■ Ex. 2 모든 z에 대한 수렴

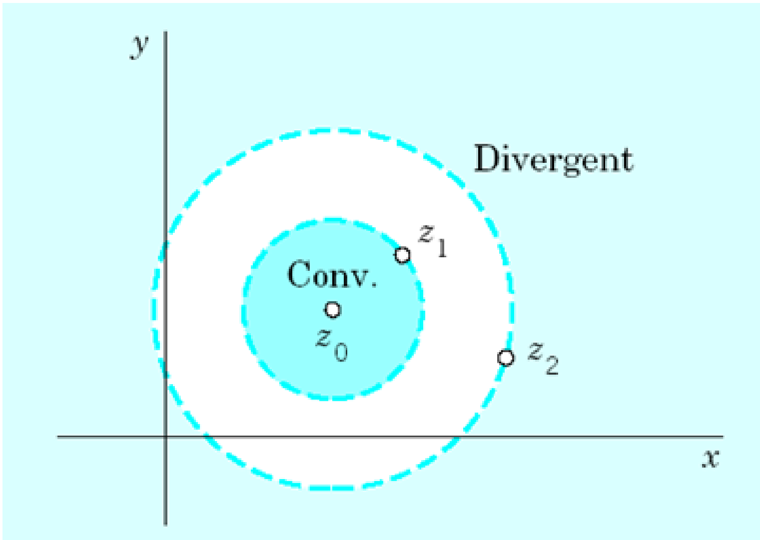
e^z의 Maclaurin 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$은 $\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0$이므로 모든 z에 대해 절대수렴한다.

Ratio test

15.2 Power Series (거듭제곱급수)

- Convergence of a Power Series (거듭제곱급수의 수렴)
- 모든 거듭제곱급수는 중심 z_0에서 수렴한다.
- 거듭제곱급수가 점 $z = z_1 \neq z_0$에서 수렴

  $\Rightarrow$ z_1보다 z_0에 더 근접한 모든 z, 즉 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$인 모든 z에 대해서 절대수렴한다.
- 거듭제곱급수가 $z = z_2$에서 발산하면, z_2보다 z_0로부터 더 떨어진 모든 z에 대하여 발산한다.



15.2 Power Series (거듭제곱급수)

- Radius of Convergence of a Power Series (거듭제곱급수의 수렴반지름)

- 수렴원(Circle of Convergence) : 수렴하는 모든 점을 포함하는 가장 작은 원

- 수렴반지름(Radius of Convergence) : 수렴원의 반지름

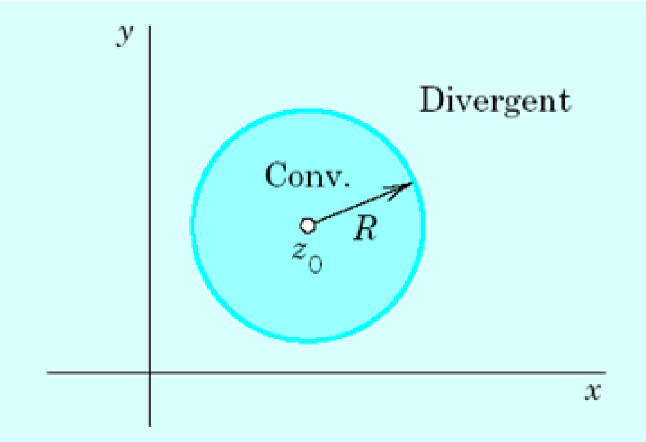
$|z-z_0| = R$이 수렴원($R=$수렴반지름)

$\Leftrightarrow$ 원의 내부 $|z-z_0| < R$을 만족하는 모든 z에 대하여 수렴하고

원의 외부 $|z-z_0| > R$을 만족하는 모든 z에 대하여 발산한다.

- $R=\infty$:급수가 모든 z에 대해 수렴할 때

$R=0$:급수가 단지 중심 $z=z_0$에서만 수렴할 때



15.2 Power Series (거듭제곱급수)

- Radius of Convergence R (수렴반지름)

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L^*$일 때, $L^*=0$이면 $R=\infty$이다. 즉, 거듭제곱급수는 모든 z에 대해 수렴한다.

$$L^*\neq 0\text{이면 } R=\frac{1}{L^*}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (\text{Cauchy - Hadamard 공식})$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$이면 $R=0$이다. 단지 중심 z_0에서만 수렴한다.

Ex. 5 수렴반지름

거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$의 수렴반지름은?

15.2 Power Series (거듭제곱급수)

- 수렴반지름

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L^*$일 때, $L^* = 0$이면 $R = \infty$이다. 즉, 거듭제곱급수는 모든 z에 대해 수렴한다.

$$L^* \neq 0\text{이면 } R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (\text{Cauchy - Hadamard 공식})$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$이면 $R = 0$이다. 단지 중심 z_0에서만 수렴한다.

■ Ex. 5 수렴반지름

거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$의 수렴반지름은?

$$R = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}\text{이다.}$$

$\therefore$ 이 급수는 반지름이 $\frac{1}{4}$이고 중심이 $3i$인 열린원판 $|z-3i| < \frac{1}{4}$ 안에서 수렴한다.

15.2 Power Series (거듭제곱급수)

PROBLEM SET 15.2

HW: 8, 12, 20 (a), (b), (d)

15.3 Functions Given by Power Series (거듭제곱급수로 주어지는 함수)

- 거듭제곱급수의 연속성 (Continuity)

  함수 $f(z)$가 $R>0$인 수렴반지름을 가지는 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다면

  함수 $f(z)$는 $z=0$에서 연속이다.

- 거듭제곱급수에 대한 항등정리 (Identity Theorem). 유일성 (Uniqueness)

  함수는 같은 중심을 갖는 두 개의 서로 다른 거듭제곱급수로 표현될 수 없다.

  $|z|<R$에서 수렴하는 두 거듭제곱급수 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$과 $b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$이

  모든 z에 대해서 똑같은 합을 갖는다.

  $\Rightarrow$ 이들 급수는 항등적으로 같다. 즉, $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots$

  $\therefore$ 함수 $f(z)$가 임의의 중심 z_0를 갖는 거듭제곱급수로 표현된다면, 이 표현은 유일하다.

15.3 Functions Given by Power Series (거듭제곱급수로 주어지는 함수)

- Operations on Power Series (거듭제곱급수의 연산)

- 항별덧셈 또는 항별뺄셈

수렴반지름이 R_1과 R_2인 두 개의 거듭제곱급수를 항별덧셈 또는 항별뺄셈하면 R_1과 R_2 중 작은 것과 같은 수렴반지름을 갖는 거듭제곱급수를 얻는다.

- 항별곱셈: 첫 번째 급수의 각 항에 두 번째 급수의 각 항을 곱하여 z의 차수가 같은 것을 모으는 것을 의미한다.
  두 개의 급수가 갖는 수렴원에 모두 속하는 z에 대해 절대수렴한다.

Cauchy 곱(Cauchy Product) :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)z^n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \cdots$$

- 미분급수(Derived Series) : 항별미분에 의하여 얻은 거듭제곱급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1} = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots$$

15.3 Functions Given by Power Series (거듭제곱급수로 주어지는 함수)

- 거듭제곱급수의 항별미분

  거듭제곱급수의 미분급수는 원래의 급수와 똑같은 수렴반지름을 갖는다.

- 거듭제곱급수의 항별적분

  급수 $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$을 항별로 적분하여 얻어지는 거듭제곱급수

  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots$은 원래의 급수와 동일한 수렴반지름을 갖는다.

- 해석함수. 그것의 도함수

  * 0이 아닌 수렴반지름 R을 갖는 거듭제곱급수는

  그것의 수렴원 안에 있는 모든 점에서 해석함수를 표현한다.

  * 이 함수의 도함수는 원래의 급수를 항별로 미분하여 얻어지며

  원래의 급수와 동일한수렴반지름을 갖는다.

  $\Rightarrow$ $\therefore$ 도함수도 해석함수를 표현한다.

15.3 Functions Given by Power Series (거듭제곱급수로 주어지는 함수)

PROBLEM SET 15.3

HW: 12, 13, 20

15.4 Taylor and Maclaurin Series
(테일러급수와 Maclaurin 급수)

- 테일러 급수: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*$

  C : z_0를 포함하는 단순 닫힌 경로

  적분방향 : 반시계방향

15.4 Taylor and Maclaurin Series (테일러급수와 Maclaurin 급수)

- 테일러 급수: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*$

  C : z_0를 포함하는 단순 닫힌 경로

  적분방향 : 반시계방향

$f(z)$가 영역 D에서 해석적(D에서 모든 계의 도함수를 갖고 그 도함수도 역시 해석적이다.)

$$\Rightarrow \quad f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz, \quad f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz, \quad \cdots$$

일반적으로 $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$

C: z_0를 둘러싸면서 내부 전체가 D에 속해 있는 D안의 임의의 단순 닫힌 경로

적분 방향 : 반시계 방향

15.4 Taylor and Maclaurin Series
(테일러급수와 Maclaurin 급수)

- 테일러 급수: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}} dz^*$

  C : z_0를 포함하는 단순 닫힌 경로

  적분방향 : 반시계방향

- Maclaurin 급수: 중심 $z_0 = 0$을 가지는 테일러 급수
- 테일러의 공식

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z-z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z)$$

나머지(Remaninder) : $R_n(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}(z^*-z)} dz^*$

15.4 Taylor and Maclaurin Series (테일러급수와 Maclaurin 급수)

- 테일러의 정리

$f(z)$: 정의역 D에서 해석적

$z = z_0 : D$에서의 임의의 점

$\Rightarrow$ 중심이 z_0이고 $f(z)$를 표현하는 거듭제곱급수는 정확히 한 개가 존재하며

$f(z)$가 해석적이 되는 중심이 z_0인 최대의 열린 원판에서 유효하다.

계수 a_n은 부등식 $|a_n| \le \dfrac{M}{r^n}$을 만족한다.($M =$ 원 $|z\text{-}z_0| = r$ 위에서의 $|f(z)|$의 최대값)

Cauchy의 부등식 (14.4)

- 특이성과 수렴반지름

  - 테일러 급수의 수렴원은 적어도 하나의 $f(z)$의 특이점(미분가능하지 않은 점)이 존재한다.
  - 테일러 급수의 수렴반지름은 중심에서부터 $f(z)$의 가장 가까운 특이점까지의 거리와 일치한다.(때때로 수렴반지름이 거리보다 더 커질 수 있다.)

- 테일러 급수로서의 거듭제곱급수

0이 아닌 수렴반지름을 갖는 거듭제곱급수는 그 합의 테일러 급수이다.

15.4 Taylor and Maclaurin Series
(테일러급수와 Maclaurin 급수)

- 주요한 특수 테일러 급수

■ Ex. 1 기하급수

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

■ Ex. 2 지수함수

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

15.4 Taylor and Maclaurin Series (테일러급수와 Maclaurin 급수)

■ Ex. 3 삼각함수와 쌍곡선함수

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

■ Ex. 4 로그함수

$$\operatorname{Ln}(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots$$

15.4 Taylor and Maclaurin Series (테일러급수와 Maclaurin 급수)

● 실제적인 방법

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots \qquad (|z|<1)$$

■ Ex. 5 대입법

$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$의 Maclaurin 급수를 구하라.

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots \qquad (|z|<1)$$

■ Ex. 6 적분

$f(z)=\arctan z$의 Maclaurin 급수를 구하라.

$$f'(z)=\frac{1}{1+z^2}\text{이고 } f(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-+\cdots \qquad (|z|<1)$$

■ Ex. 7 기하급수를 이용한 전개

$c-z_0\neq 0$일 때, $\dfrac{1}{c-z}$을 $z-z_0$의 거듭제곱으로 전개하라.

$$\frac{1}{c-z}=\frac{1}{c-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{(c-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{c-z_0}\right)}=\frac{1}{(c-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{c-z_0}\right)^n=\frac{1}{(c-z_0)}\left(1+\frac{z-z_0}{c-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{c-z_0}\right)^2+\cdots\right)$$

15.4 Taylor and Maclaurin Series
(테일러급수와 Maclaurin 급수)

- 이항급수(Binomial Series)

$$\frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \cdots$$

■ Ex. 8 이항급수, 부분분수에 의한 분해

$z_0 = 1$을 중심으로 하여 다음 함수 $f(z) = \dfrac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$의 테일러 급수를 구하라.

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} = \frac{1}{[3+(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\left[1+\frac{1}{3}(z-1)\right]^2}\right) - \frac{1}{1-\frac{1}{2}(z-1)} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right](z-1)^n$$

$$= -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 - \frac{275}{1944}(z-1)^3 - \cdots$$

15.4 Taylor and Maclaurin Series (테일러급수와 Maclaurin 급수)

PROBLEM SET 15.4

HW: 13, 20 (a) e^z, cosz, sinhz, (b), (c)

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

- 균등수렴(Uniform Convergence)

합 $s(z)$를 갖는 급수 $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$은 영역 G에서 균등수렴한다.

$\Leftrightarrow$ 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여

부등식 $|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$ (모든 $n > N$ 그리고 G에 있는 모든 z에 대하여)을

만족하는 z에 의존하지 않는 정수 $N = N(\varepsilon)$이 존재

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

- 거듭제곱급수의 균등수렴

  0이 아닌 수렴반지름 R을 갖는 거듭제곱급수 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m$ 은

  반지름이 $r < R$인 모든 원판 $|z - z_0| \le r$에서 균등수렴한다.

- 합의 연속성

  급수 $F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$이 영역 G에서 균등수렴한다.

  각 항 $f_m(z)$가 G에 있는 점 z_1에서 연속이면, 함수 $F(z)$도 z_1에서 연속이다.

15.5 Uniform Convergence（균등수렴）

■ Ex. 2 연속인 항들을 갖는 급수이면서 그 합이 불연속인 경우

기하급수 $x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$ (x는 실수)을 생각해 보자.

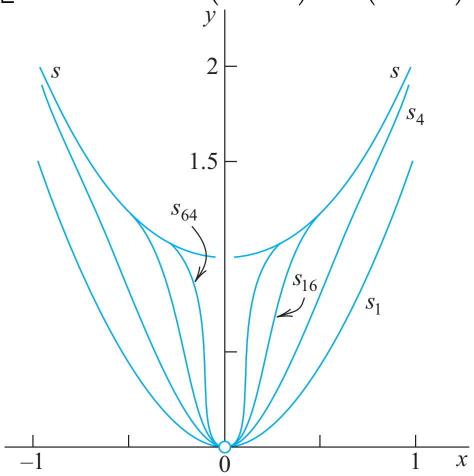
n항까지의 부분합 : $s_n = x^2\left[1+\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(1+x^2)^n}\right]$

$$\Rightarrow\quad s_n-\frac{1}{1+x^2}s_n = x^2\left[1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x^2)^n}\right]-x^2\left[\frac{1}{1+x^2}+\cdots+\frac{1}{(1+x^2)^n}+\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^2}{1+x^2}s_n = x^2\left[1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow\quad s_n = 1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$\therefore\ s=\lim_{n\to\infty}s_n=\begin{cases}1+x^2 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$



모든 항들이 연속이고 그 급수가 수렴, 더욱이 절대수렴도 하지만 그 합은 불연속인 점이 있다.

또한 $x=0$을 포함하는 구간에서 균등수렴일 수 없다.

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

■ Ex. 3 항별적분이 가능하지 않은 급수

$u_m(x) = mxe^{-mx^2}$이라 놓고, 구간 $0 \le x \le 1$에서 $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$ 단, $f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$을 고려해 보자

(i) n항까지의 부분합 : $s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n$

급수 $F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \left(0 \le x \le 1\right)$

$$\therefore \int_0^1 F(x)dx = 0$$

(ii) 항별적분하고 $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = u_n$임을 적용하면

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 f_m(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_0^1 f_m(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 - e^{-n}\right) = \frac{1}{2}$$

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

- 항별적분

  급수 $F(z)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots$이 영역 G에서 균등수렴한다.

  C는 G에서의 임의의 경로이다.

  $\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\int_C f_m(z)dz=\int_C f_0(z)dz+\int_C f_1(z)dz+\cdots$은 수렴하고 그 합은 $\int_C F(z)dz$이다.

- 항별적분

  급수 $F(z)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots$이 영역 G에서 균등수렴한다.

  급수 $f_0'(z)+f_1'(z)+f_2'(z)+\cdots$이 G에서 균등수렴하고, 각 항들이 G에서 연속이다

  $\Rightarrow F'(z)=f_0'(z)+f_1'(z)+f_2'(z)+\cdots$ (G에서의 모든 z에 대하여)이다.

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

- 균등수렴에 대한 Weierstrass M 판정법

z평면의 영역 G에 있는 모든 z와 모든 $m = 0,\ 1,\ \cdots$에 대하여

$|f_m(z)| \le M_m$인 상수항의 수렴급수 $M_0 + M_1 + M_2 + \cdots$이 존재한다

$\Rightarrow \quad \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$은 영역 G에서 균등수렴한다.

Ex. 4 Weierstrass M 판정법

급수 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}$은 원판 $|z| \le 1$에서 균등수렴하는가?

$$\left| \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|} \right| \le \frac{|z|^m + 1}{m^2} \le \frac{2}{m^2}$$이므로

Weierstrass M 판정법과 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$의 수렴성에 의해 균등수렴이 입증된다.

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

- 절대수렴과 균등수렴의 무관성

■ Ex. 5 절대수렴과 균등수렴의 무관성

급수 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{x^2+m} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - + \cdots$은

전체 실수축 위에서 균등수렴하지만 절대수렴하지 않는다.

(i) 각 항의 절대값들이 0을 극한값으로 갖는 단조감소수열을 형성하는 양과 음의 교대항으로 된 급수이므로

나머지 R_n은 이 급수의 첫번째 항의 절대값을 넘지 않는다.

주어진 $\varepsilon > 0$과 모든 x에 대하여 $|R_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \left(n > N(\varepsilon) \ge \frac{1}{\varepsilon}\right)$을 얻는다

$N(\varepsilon)$이 x에 무관하므로 균등수렴을 증명해 준다.

(ii) 고정된 점 x에 대하여 $\left|\frac{(-1)^{m-1}}{x^2+m}\right| = \frac{1}{x^2+m} > \frac{k}{m}$이고 $k\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}$이 발산하기 때문에

이 급수는 반드시 절대수렴하지 않는다.

15.5 Uniform Convergence (균등수렴)

PROBLEM SET 15.5

HW: