[2008][08-2]

Computer aided ship design

Part 3. Optimization Methods

November 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Ch3. 선형 계획법 (Linear Programming)

3.1 선형 계획 문제

3.2 선형 계획 문제의 기하학적 해법

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

최적화 문제의 분류와 해법

	비제약 최적화 문제		제약 최적화 문제		
	선형	비선형	선형	비선형	
목적 함수 (예시)	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x})=x_1+2x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x})=x_1+2x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$
제약 조건 (예시)	없음	없음	$h(\mathbf{x})=x_1+5x_2=0$ $g(\mathbf{x})=-x_1\le 0$	$h(\mathbf{x})=x_1+5x_2=0$ $g(\mathbf{x})=-x_1\le 0$	$g_1(\mathbf{x})=\frac{1}{6}x_1^2+\frac{1}{6}x_2^2-1.0\le 0$ $g_2(\mathbf{x})=-x_1\le 0$
국부 최적화 방법	① 직접 탐사법 - Hooke&Jeeves - Nelder&Mead ② Gradient 방법 - Steepest Descent방법[4] - 공액 경사도 방법[4](Conjugate Gradient 방법) - Newton 방법[5] - Davidon-Fletcher-Powell(DFP) 방법[5] - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS) 방법[5]		Penalty Function으로 해를 구할 수 있으나 일반적으로 선형 계획법을 사용 - Simplex 방법 (선형 계획법, Linear Programming)	- Penalty Function[1]을 구성한 후 비제약 최적화 문제로 변환한 후 해를 구함 - 2차 계획 법 (Quadratic Programming)	- 근사화 방법 - SLP 선형 계획 문제[2]로 근사화 후 개선된 탐색점을 찾고, 그 점에서 다시 선형 계획 문제를 푸는 방법 - 근사화 방법 - SQP 2차 계획 문제[3]로 근사화 후 개선된 탐색점을 찾고, 그 점에서 다시 2차 계획 문제를 푸는 방법
전역 최적화 방법	Genetic Algorithms(GA), Simulated Annealing, etc.				

1) Penalty Function
제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수

2) 선형 계획 문제
(Linear Programming Problem)
목적함수: 1차 형식
제약조건: 1차 형식

3) 2차 계획 문제
(Quadratic Programming Problem)
목적함수: 2차 형식
제약조건: 1차 형식

4) Gradient 방법 중 함수의 1차 미분만을 고려하는 방법

5) Gradient 방법 중 함수의 2차 미분까지 고려하는 방법

3.1 선형 계획 문제(Linear Programming Problem)

- **선형 계획 문제**
  - 목적 함수와 제약 조건이 설계 변수에 대하여 모두 선형임
  - 모든 함수들이 선형이기 때문에 등호 제약 조건이나 부등호 제약 조건에 의해 정의된 가능해 공간(feasible region)은 볼록(convex) 집합임
  - 따라서 선형 계획 문제는 볼록 계획 문제이고, 만일 하나의 최적해가 존재한다면 그것은 전역 최적해(global optimum)임

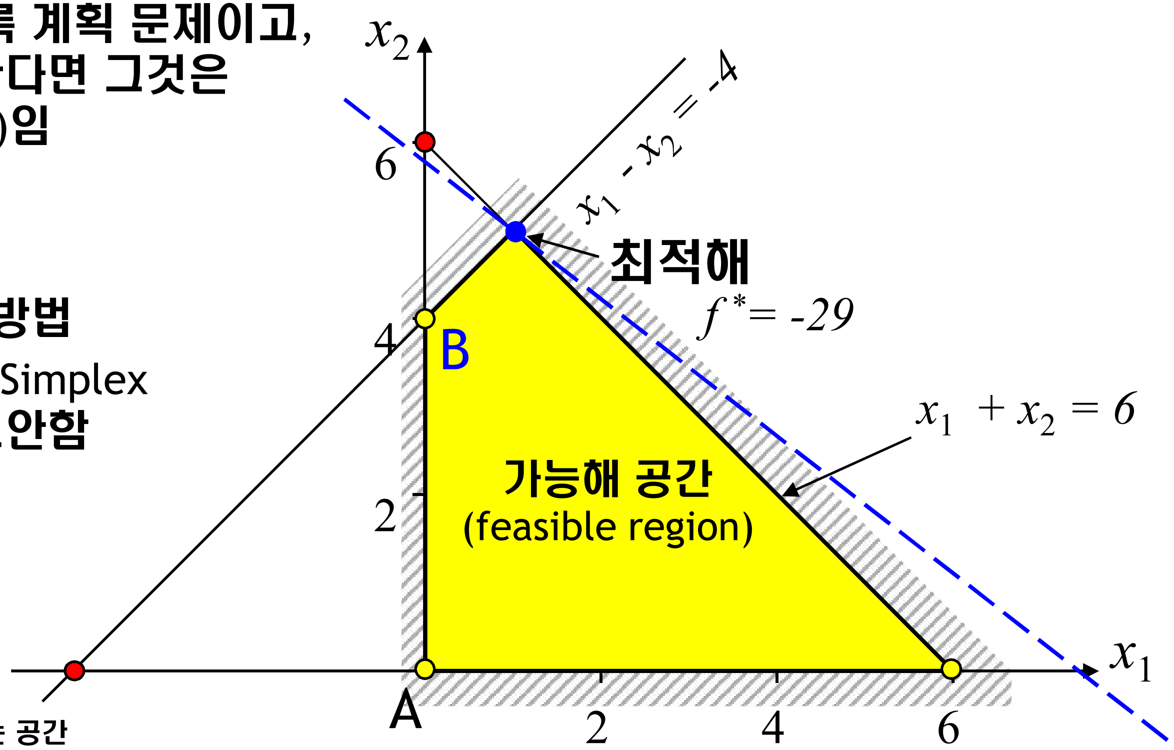
목적 함수

$$\text{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2$$

제약 조건

$$\begin{aligned} \text{Subject to} \quad & x_1 - x_2 \geq -4 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- **선형 계획법**
  - 선형 계획 문제를 풀기 위한 방법
  - 1947년 George B. Dantzig가 Simplex 방법이라는 선형 계획법을 고안함



* 가능해 공간: 모든 제약 조건을 만족하며 최적해가 존재하는 공간

선형 계획 문제의 특징

- 목적 함수와 제약 조건들이 변수의 선형 관계를 표현함
  - 1개의 목적 함수와 1개 이상의 제약 조건으로 구성
  - 목적 함수는 최대화 혹은 최소화의 형태임
- 각 제약 조건들은 등식(=; equality constraint) 혹은 부등식(≥, ≤; inequality constraint)으로 표현됨
- Simplex 방법을 적용하기 위해서 선형 계획 문제의 변수들을 양수로 변경 함
  - 음수인 경우는 적절한 변형을 통해 양수화 시킴
    - 예, x = -y (x는 음수, y는 양수)
  - 부호에 제약이 없는 경우(양수 또는 음수를 가질 경우)는 적절한 변형을 통해 양수화 시킴
    - 예, x = y - z(x는 양수 또는 음수의 값을 가짐, y와 z는 양수)

목적 함수

$$\text{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2$$

제약 조건

$$\text{Subject to} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 변수가 음이 아닌 문제의 예
 + 동물의 사료 배분 : 사료는 양은 음이 될 수 없음
 + 제품의 원료 배분 : 원료의 양은 음이 될 수 없음

- 변수의 부호 제약이 없으나, 양의 변수로 변경될 수 있는 예
 + 조선소의 이익 = 선가 - 건조비

선형 계획 문제의 예
- 2개의 설계 변수와 부등호("≤") 제약 조건을 가진 문제

목적 함수

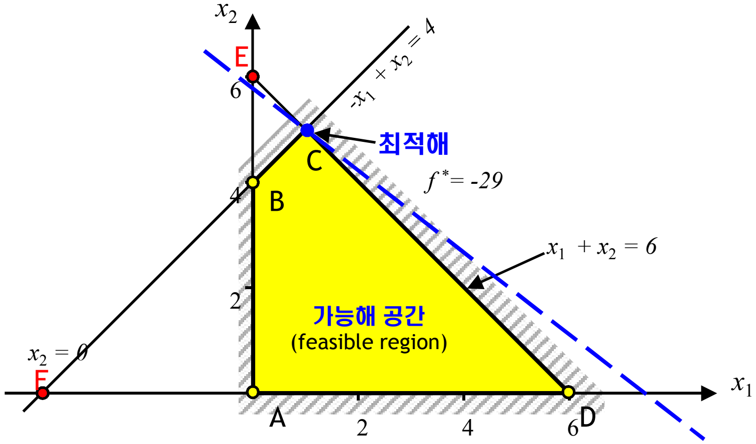
제약 조건

$$\text{Maximize} \quad z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{Subject to} \quad x_1 - x_2 \geq -4$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



목적 함수의 최대화 문제를 최소화 문제로 변환

제약 조건의 좌변에 음수가 있다면 양수로 변환

$$\text{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2$$

$$\text{Subject to} \quad -x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

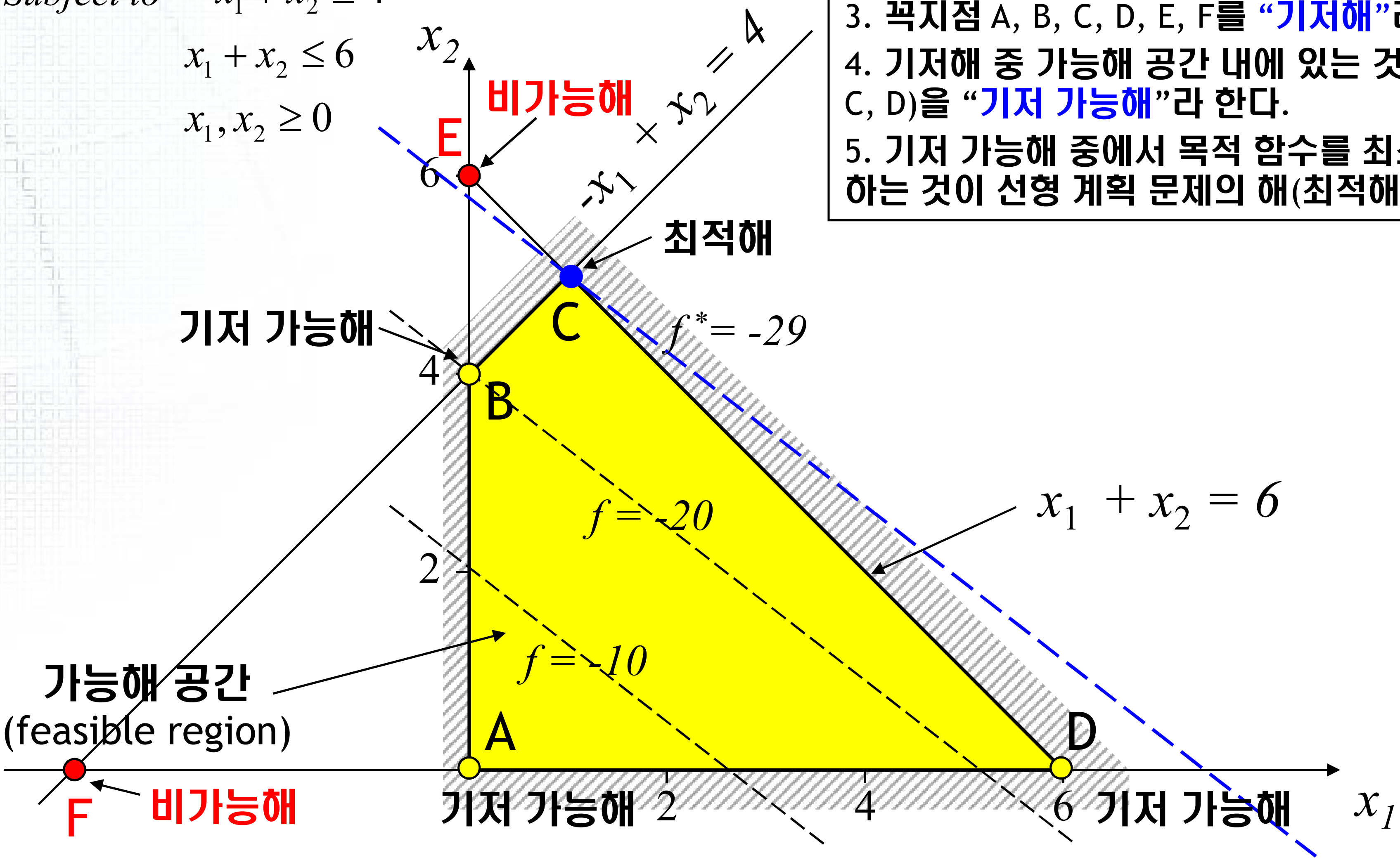
$$x_1, x_2 \geq 0$$

최대화 문제를 최소화 문제로 변환하는 이유
- 최소화 문제로 변환하지 않으면, 최대/최소 문제를 푸는 방법 양쪽을 모두 구현해야 함

3.2 선형 계획 문제의 기하학적 해법

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f = -4x_1 - 5x_2 \\ \textit{Subject to} \quad & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

1. 선형 계획 문제의 해는 꼭지점 상에 있다.
2. 꼭지점이란 제약조건 사이의 교점이다.
3. 꼭지점 A, B, C, D, E, F를 **"기저해"**라 한다.
4. 기저해 중 가능해 공간 내에 있는 것(A, B, C, D)을 **"기저 가능해"**라 한다.
5. 기저 가능해 중에서 목적 함수를 최소로 하는 것이 선형 계획 문제의 해(최적해)이다.



선형 계획 문제의 해결을 위한 부등호("≤") 제약 조건의 변환 방법

Minimize $f = -4x_1 - 5x_2$

Subject to $\boxed{-x_1 + x_2 \le 4}$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

"≤" 형태의 부등호 제약 조건: 완화 변수(slack variable)의 도입

$$-x_1 + x_2 \le 4 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 + \underline{x_3} = 4$$

완화 변수(0보다 크거나 같음)

선형 계획 문제를 풀 때 "≤" 형태의 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환함("표준형")

선형 계획 문제의 해법(1)

"≤" 형태의 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위해 도입된 완화 변수(slack variable)

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2 \\ &\textit{Subject to} \quad -x_1 + x_2 \le 4 \\ &\qquad\qquad\quad x_1 + x_2 \le 6 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환}} \quad
\begin{aligned} &\textit{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2 \\ &\textit{Subject to} \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ &\qquad\qquad\quad x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ &\qquad\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

원래의 문제를 등호 제약 조건으로 표현("표준형")(단, 우변은 0보다 작지 않다고 가정함)

$$\boxed{\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \end{aligned}}$$

무수히 많은 해가 존재(미지수 4개, 선형 독립인 식 2개)하는 부정 방정식

➡ 4개의 변수 중 2(=4-2)개의 변수를 가정하면 해를 구할 수 있다.

➡ 선형 계획 문제의 해법인 "Simplex 방법"에서는 2개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구한다.
이때, 0으로 가정하는 변수를 "비기저 변수", 이로부터 구해지는 변수를 "기저 변수"라고 한다.

미지수의 개수가 n개이고 선형 독립인 등호 방정식(제약 조건)의 개수가 m개 일 때, (단, n≥m)

- 자유도는 n-m이다.
- n-m개의 변수(자유도)를 가정하면 해를 구할 수 있다.
- "Simplex 방법"에서는 총 n-m개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구한다.

선형 계획 문제의 해법(2)

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f = -4x_1 - 5x_2 \\ \textit{Subject to} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

1. 4개의 변수 중 2개의 변수를 가정하면 해를 구할 수 있다.
2. 선형 계획 문제의 해법인 "Simplex 방법"에서는 2개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구한다.
   이때, 0으로 가정하는 변수를 "비기저 변수", 이로부터 구해지는 변수를 "기저 변수"라고 한다.

$$\begin{aligned} & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \text{----} \ ① \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \quad \text{----} \ ② \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

등호 방정식으로 변경된 제약조건으로부터

비기저 변수 (0으로 가정)	기저 변수	해 (x_1, x_2, x_3, x_4)	해("꼭지점") 의 위치	목적 함수
(x_2, x_3)	(x_1, x_4)	(-4, 0, 0, 10)	F	16
(x_1, x_4)	(x_2, x_3)	(0, 6, -2, 0)	E	-30
(x_1, x_2)	(x_3, x_4)	(0, 0, 4, 6)	A	0
(x_2, x_4)	(x_1, x_3)	(6, 0, 10, 0)	D	-24
(x_1, x_3)	(x_2, x_4)	(0, 4, 0, 2)	B	-20
(x_3, x_4)	(x_1, x_2)	(1, 5, 0, 0)	C	-29

1) 0으로 가정할 2개의 변수를 선정함(총 6쌍)

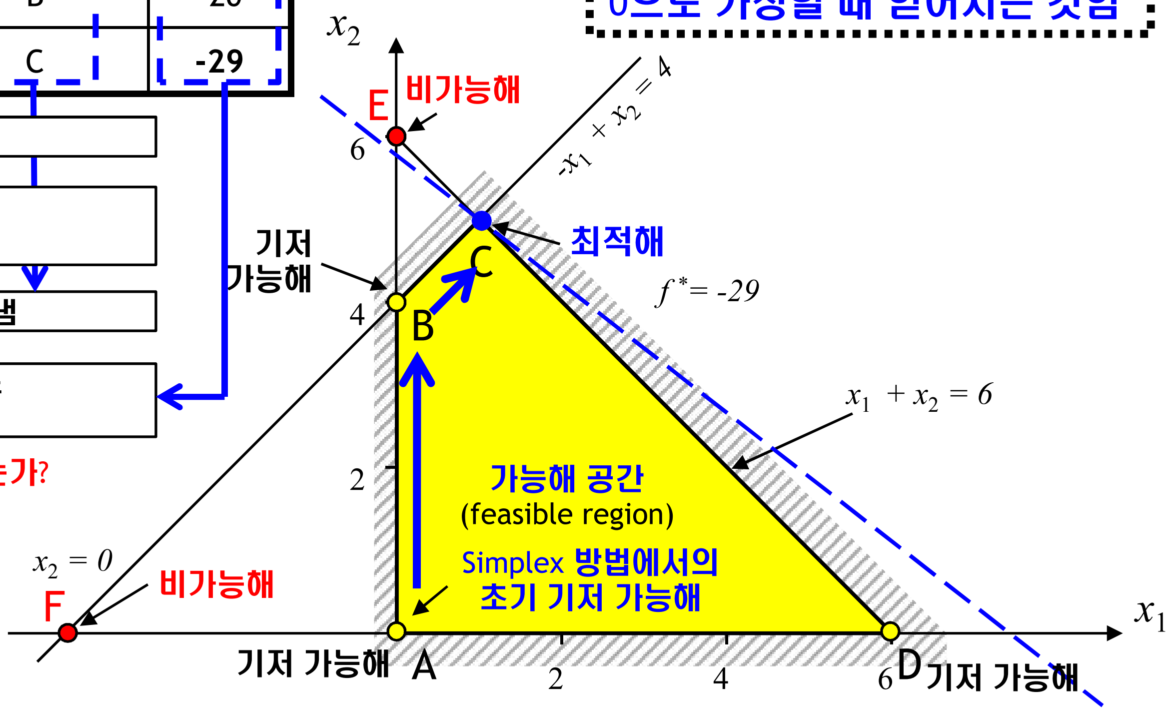
2) 0으로 가정한 6쌍의 변수를 식 ①, ②에 대입해 6개의 기저해(꼭지점)을 계산함

3) 6개의 기저해 중 "가능해 공간"에 있는 기저해을 찾아 냄

4) "가능해 공간"에 있는 기저해 중 목적 함수 값을 최소로 하는 기저해가 "최적해" 이다.

질문: 항상 모든 꼭지점을 찾아 함수값을 계산해야 하는가?

각 꼭지점은 두 개의 변수를 0으로 가정할 때 얻어지는 것임



선형 계획 문제의 일반적인 해법:
"Simplex 방법"
초기 기저 가능해로부터 시작하여 목적 함수를 점차 개선시켜 최적해를 구하는 방법 → 최소한의 꼭지점을 거쳐감

참 고 자 료

공학수학 Review

- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

공학수학 Review
- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

row2 + row1x(−3)

$$\begin{array}{rl} & 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ +) & -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -3 \\ \hline & -7x_2 - 4x_3 = -1 \end{array}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

row2 + row1x(−3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - \ \ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1} \\ 0 \quad -7 \quad -4 \\ \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ \boxed{-3} \end{bmatrix}$$

row3 + row1x(−2)

row3 + row1x(−2)

$$\begin{array}{rl} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ +) & -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ \hline & -x_2 - 3x_3 = -5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

row 2 ↔ row 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

row 2x(−1)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

row 3+ row 2x7

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 17x_3 &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

The last equations and matrix are equal to given equations.

Linear Independence

Definition 3.1 **Linear Dependence / Independence**

A set of functions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ is said to be **'linearly dependent'** on an interval I if there exist constant $c_1, c_2, \ldots c_n$, not all zero such that $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) = 0$ for every x in the interval.

If the set of functions is not linearly dependent on the interval, it is said to be **'linearly independent'**

In other words, a set of functions is 'linearly independent' if the only constants for

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

are $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

"two functions are linearly independent when neither is a constant multiple of the other"

$$\begin{cases} f_1(x) = \sin 2x \\ f_2(x) = \sin x \cos x \end{cases} \quad on(-\infty, \infty)$$

$$f_2(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\therefore f_2(x) = \frac{1}{2} f_1(x)$$

Linearly Dependent

$$\begin{cases} f_1(t) = e^t \\ f_2(t) = e^{2t} \end{cases} \quad on(-\infty, \infty)$$

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0$$

Satisfied only when $c_1 = c_2 = 0$ on the interval

Linearly Independent

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - \ \ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$f_2 : 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$f_3 : 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 - 34 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_3(f_3) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 - 5) + c_3(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 - 34) = 0$$

$$\underline{(\boxed{c_1} + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3)}x_1 + \underline{(2\boxed{c_1} + \boxed{c_2} + 0 \cdot c_3)}x_2 + \underline{(\boxed{c_1} + 3\boxed{c_2} + 17c_3)}x_3 + (-c_1 - 5c_2 - 34c_3) = 0$$

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 0$$

$\therefore f_1, f_2, f_3$ **: linearly independent.** $\longrightarrow$ **rank : 3**

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 17x_3 &= 34 \end{aligned}$$

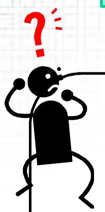
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent : 3

rank : 3

Unknown variables x_1, x_2, x_3 n=3

No. of equations which are linearly independent : 3 = **rank : 3** = **Unknown variables n=3** ⇨ **Unique Solution**



$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

0.5*row 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$f_2 : 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$f_3 : 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_3(f_3) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 5) + c_3(0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10) = 0$$

$$(\boxed{c_1} + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3)x_1 + (2\boxed{c_1} + c_2 + 2c_3)x_2 + (\boxed{c_1} + 3c_2 + 6c_3)x_3 + (-\boxed{c_1} - 5c_2 + 10c_3) = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -2c_3 \qquad c_3 = arbitrary\ number$$

$\therefore f_1, f_2, f_3$ **: linearly *dependent.***

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

0.5*row 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$f_2 : 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$f_3 : 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$$

rank : 2

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 5) = 0$$

$$(\boxed{c_1} + 0\cdot c_2)x_1 + (2\boxed{c_1} + c_2)x_2 + (\boxed{c_1} + 3c_2)x_3 + (-c_1 - 5c_2) = 0$$

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0$$

$\therefore f_1, f_2$ **: linearly *independent.***

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent : 2 = rank : 2 < Unknown variables n=3 ⇨ Infinite many solutions

Solution ?

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$ Trivial Solution

Linear Systems Vs Matrices

Solution ?

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$ Trivial Solution

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

x: Infinite many solutions

to have a solution x except x=0

$$rank(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) < n \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Zero row

λ: eigenvalues, x: eigenvectors

x: Infinite many solutions → Objective function → Solution determined

Optimization Problem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank : 3

Trivial x

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(\lambda+3)^2 = \mathbf{0}$$

$$when\ \lambda = 5$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} - 5\mathbf{I}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Row reduction

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -24/7 & -48/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank : 2

infinite no. of x

공학수학 Review
- Inverse of a matrix.

Gauss-Jordan Elimination

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Notation of inverse matrix

In this inverse section, only *square matrices* are considered exclusively.

Notation of inverse of an $n \times n$ matrix $A=[a_{jk}]$: A^{-1}

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$ **, where I is the $n \times n$ unit matrix.**

Nonsingular matrix : A matrix that has an inverse.

(If a matrix has an inverse, the inverse is unique)

Singular matrix : A matrix that has no inverse.

Proof of uniqueness of inverse matrix

If B and C are inverses of A $(\mathbf{AB} = \mathbf{I} \;\&\; \mathbf{CA} = \mathbf{I})$,

We obtain $$\mathbf{B} = \mathbf{IB} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C}$$

(the uniqueness of inverse)

Inverse by the Gauss-Jordan Method

For Practical determination of the inverse $\mathbf{A}^{-1}$ of a nonsingular $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$, Gauss elimination can be used.
: This method is called Gauss-Jordan elimination

Step 1. Make augmented matrix.

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$$

Step 2. Make Multiplication of $\mathbf{AX}=\mathbf{I}$ by $\mathbf{A}^{-1}$
(by applying Gauss elimination to $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$)

→ **This gives a matrix of the form $[\mathbf{U} \;\; \mathbf{H}]$**

Step 3. Reduce $\mathbf{U}$ by further elementary row operations to diagonal form.
(Eliminate the entries of $\mathbf{U}$ above the main diagonal and making the diagonal entries all 1 by multiplication. See the example next page.)

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination.

Determine the inverse $\mathbf{A}^{-1}$ of

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

Step 1. Make augmented matrix.

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{I}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Step 2. Make Multiplication of $\mathbf{AX}=\mathbf{I}$ by $\mathbf{A}^{-1}$ by applying Gauss elimination to

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \text{Row2 + 3Row1} \\ \text{Row3} - \text{3Row1} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row3} - \text{Row2} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -0.6 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 2 & 0 & -2.6 & -0.4 & 1.4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{Row1 +0.4Row3} \\ \text{Row2 +1.4Row3} \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0.7 & -0.2 & -0.3 \\ 0 & 2 & 0 & -2.6 & -0.4 & 1.4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{Row1 -0.5Row2} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

diagonal matrix

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{-Row1} \\ \text{0.5Row2} \\ \text{-0.2Row3} \end{array} \end{array}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

Check the result.

Let $AA^{-1} = B$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = (-1)\times(-0.7) + 1\times(-1.3) + 2\times 0.8 = 1$$

$$b_{12} = (-1)\times(0.2) + 1\times(-0.2) + 2\times 0.2 = 0$$

$$b_{13} = (-1)\times(0.3) + 1\times(0.7) + 2\times(-0.2) = 0$$

$$b_{21} = (3)\times(-0.7) + (-1)\times(-1.3) + 1\times(0.8) = 0$$

$$b_{22} = (3)\times(0.2) + (-1)\times(-0.2) + 1\times(0.2) = 1$$

$$b_{23} = (3)\times(0.3) + (-1)\times(0.7) + 1\times(-0.2) = 0$$

$$b_{31} = (-1)\times(-0.7) + (3)\times(-1.3) + 4\times(0.8) = 0$$

$$b_{32} = (-1)\times(0.2) + (3)\times(-0.2) + 4\times(0.2) = 0$$

$$b_{33} = (-1)\times(0.3) + (3)\times(0.7) + 4\times(-0.2) = 1$$

$$\therefore \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

Row2 + 3Row1

Row3 − Row1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row3 − Row2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row1 + 0.4Row3

Row2 + 1.4Row3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row1 - 0.5Row2

diagonal matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

-Row1

0.5Row2

-0.2Row3

모든 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거 하였음
→ 바로 해를 구할 수 있음