Computer aided ship design

Part 3. Optimization Methods

November 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced Ship Design Automation Laboratory

Ch3. 선형 계획법 (Linear Programming)

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(1)

- 비기저 변수와 기저 변수의 구분

Pivot: Gauss-Jordan 소거법과 같은 개념
선택한 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거함

- 비기저 변수: Simplex방법에서 연립 방정식을 풀기 위해 0으로 가정하는 변수
- 기저 변수: Simplex방법에서 비기저 변수에 의해 구해지는 변수
- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수로 가정해야 식을 풀 수 있음

(1) 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변형

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && f = -4x_1 - 5x_2 \\ &\textit{Subject to} && -x_1 + x_2 \le 4 \\ &&& x_1 + x_2 \le 6 \\ &&& x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

각 행에 포함된 기저 변수를 표시

비기저 변수 | 기저 변수

$\square$: 비기저 변수(=0)

$\bigcirc$: 기저 변수

$$\begin{array}{ll|llllll} \text{1행:} & x_3 & \boxed{-x_1} & \boxed{+x_2} & +x_3 & & = 4 \\ \text{2행:} & x_4 & \boxed{x_1} & \boxed{+x_2} & & +x_4 & = 6 \\ \text{3행:} & & \boxed{-4x_1} & \boxed{-5x_2} & & & = f - 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

- 비기저 변수를 구분하는 방법 → 목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
- 기저 변수를 구분하는 방법 → 하나의 행에만 나타나고 다른 행에는 나타나지 않는 변수

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(2)

- 비기저 변수와 기저 변수의 교환

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: $x_3 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \longleftarrow 4/1 = 4$

2행: $x_4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 6 \quad \longleftarrow 6/1 = 6$

3행: $\mid -4x_1 - 5x_2 = f - 0$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

1행에 포함된 기저변수 x3가 비기저 변수로 변경

비기저 변수: x1, x2, x3

기저 변수 : x3, x4 , x2

목적 함수의 계수가 최소(음수)인 변수 x2의 값을 증가시키면 목적 함수 값이 더 작아짐 → x2를 기저 변수로 변경할 예정 ▶

2개의 변수를 0으로 가정해야 식이 풀리므로 x3와 x4중 하나를 0으로 가정해야 함 → x3, x4중 하나를 비기저 변수로 변경

$$\frac{\text{각 행의 우변의 값}}{\text{각 행의 선택된 열에서의 해당 변수의 계수}}$$

제약 조건식 중 선택된 열의 계수가 양수이며 최소의 비율을 갖는 행의 기저 변수를 선택 → x3를 비기저 변수로 변경할 예정

<참고> 만약 최소의 비율을 갖는 행을 선택하지 않는다면? ▶

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(3)

- 선택된 변수를 중심으로 Pivot

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: $x_3 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \longleftarrow 4/1 = 4$

2행: $x_4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 6 \quad \longleftarrow 6/1 = 6$

3행: $\mid -4x_1 - 5x_2 = f - 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

1행에 포함된 기저변수 x3가 비기저 변수로 변경

1행을 정리하면, $x_2 = 4 + x_1 - x_3$

이를 2, 3행에 대입하면

$$x_1 + (4 + x_1 - x_3) + x_4 = 6$$
$$\Rightarrow 2x_1 - x_3 + x_4 = 2$$
$$-4x_1 - 5(4 + x_1 - x_3) = f$$
$$\Rightarrow -9x_1 + 5x_3 = f + 20$$

비기저 변수: x1, x2, x3

기저 변수 : x3, x4 ,x2

선택된 변수(x_2 / 1행, 2열)를 중심으로 Pivot을 실시

1행: $x_2 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: $x_4 \mid 2x_1 - x_3 + x_4 = 2$

3행: $\mid -9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

Pivot: Gauss-Jordan 소거법과 같은 개념
선택한 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(4)

- Pivot 후 변경된 기저 해(“꼭지점”)

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: x_2 | $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: x_4 | $2x_1 - x_3 + x_4 = 2$

3행: | $-9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

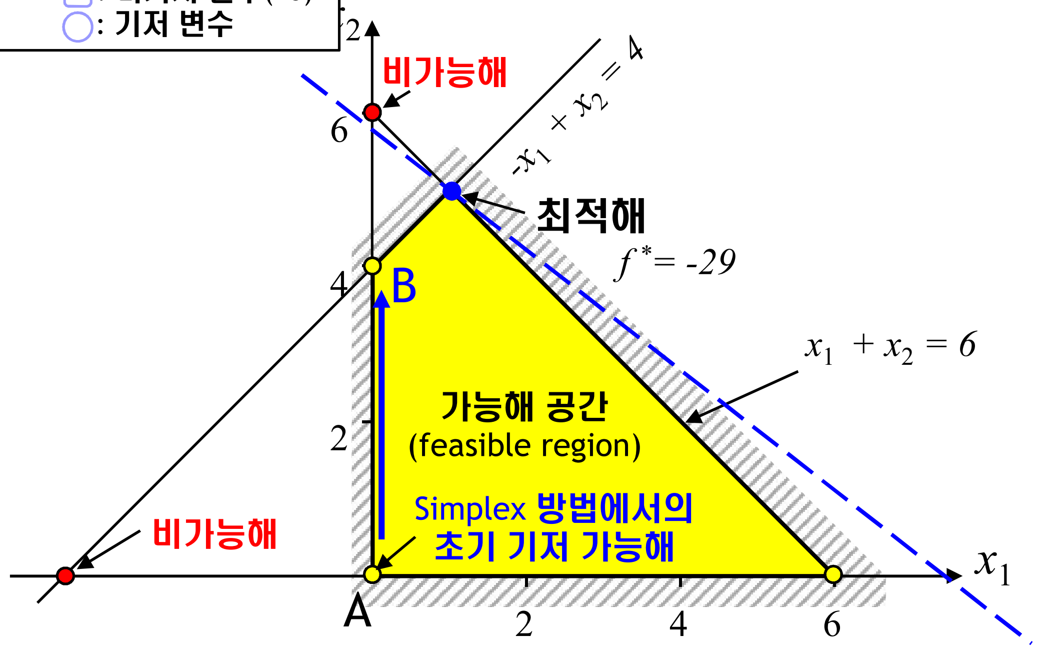
□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

비기저 변수: x1, x3

기저 변수 : x2, x4

X1=x3=0 을 대입 ➡ x2=4, x4=2

➡ **새로운 해** B(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 4, 0, 2)**와 개선된 목적 함수 값** -20**을 얻게 됨**



3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(5)

- 비기저 변수와 기저 변수의 교환

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: $x_2 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: $x_4 \mid 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \longleftarrow 2/2 = 1$

3행: $\mid -9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

→ 2행에 포함된 기저변수 x4가 비기저 변수로 변경

비기저 변수: x1, x3 ,x4

기저 변수 : x2, x4 ,x1

목적 함수의 계수가 최소(음수)인 변수 x1의 값을 증가시키면 목적 함수 값이 더 작아짐 → x1를 기저 변수로 변경할 예정

2개의 변수를 0으로 가정해야 식이 풀리므로 x2와 x4중 하나를 0으로 가정해야 함 → x2, x4중 하나를 비기저 변수로 변경

$$\frac{\text{각 행의 우변의 값}}{\text{각 행의 선택된 열에서의 해당 변수의 계수}}$$

제약 조건식 중 선택된 열의 계수가 양수이며 최소의 비율을 갖는 행의 기저 변수를 선택 → x4를 비기저 변수로 변경할 예정

<참고> 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택 안됨

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(6)

- 선택된 변수를 중심으로 Pivot

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: x_2 | $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: x_4 | $2x_1 - x_3 + x_4 = 2$ ← 2/2 = 1

3행: | $-9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

→ 2행에 포함된 기저변수 x4가 비기저 변수로 변경

비기저 변수: x1, x3 ,x4

기저 변수 : x2, x4 ,x1

선택된 변수(x_1 / 2행, 1열)를 중심으로 Pivot을 실시

(1행 + 0.5×2행)을 해서 나온 결과 → 1행: x_2 | $x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 = 5$

(0.5×2행)을 해서 나온 결과 → 2행: x_1 | $x_1 - 0.5x_3 + 0.5x_4 = 1$

(3행 + 4.5×2행)을 해서 나온 결과 → 3행: | $+0.5x_3 + 4.5x_4 = f + 29$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

3.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(7)

- Pivot 후 변경된 기저 해(“꼭지점”) / Simplex 종료

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{1행:} & x_2 & x_2 + \boxed{0.5x_3} + \boxed{0.5x_4} = 5 \\
\text{2행:} & x_1 & x_1 - \boxed{0.5x_3} + \boxed{0.5x_4} = 1 \\
\text{3행:} & & + \boxed{0.5x_3} + \boxed{4.5x_4} = f + 29
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

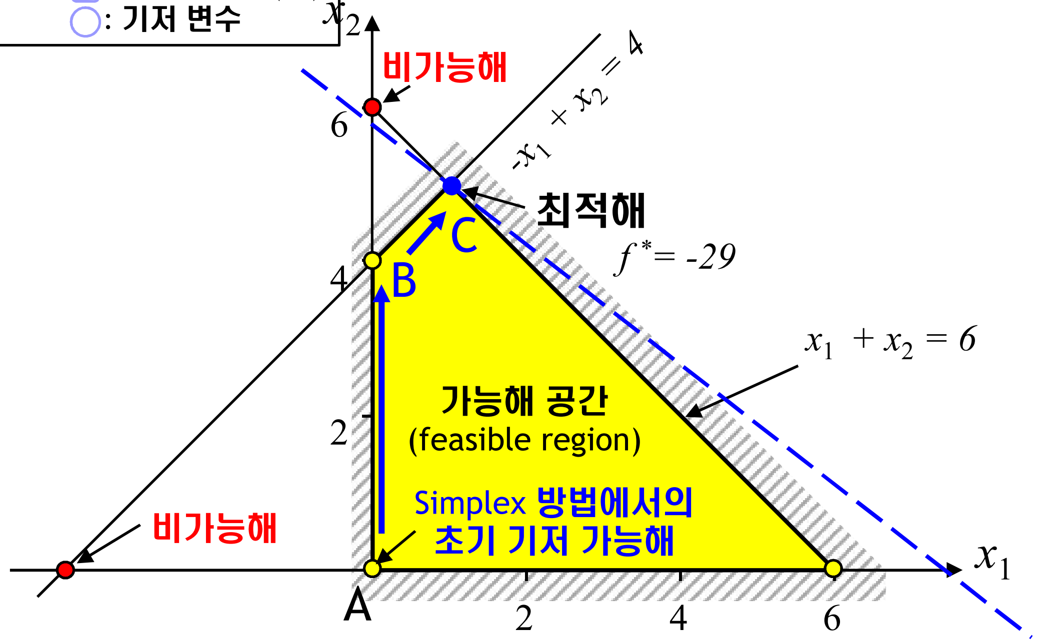
목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로 현재의 해가 최적해임 → Simplex 종료

비기저 변수: x3, x4

기저 변수 : x1, x2

X3=x4=0 을 대입 ➡ X1=1, x2=5

➡ **새로운 해** C(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 5, 0, 2)와 **개선된 목적 함수 값 -29을 얻게 됨**



[참고] Simplex 방법에서 Pivot을 수행할 열을 선택할 때 목적 함수의 계수가 최소인 열을 선택하는 이유

1행: x_3 | $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: x_4 | $x_1 + x_2 + x_4 = 6$

3행: | $-4x_1 - 5x_2 = f - 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

비기저 변수인 x_1과 x_2는 0이다. $(x_3 = 4,\ x_4 = 6)$

목적 함수의 계수가 음수인 변수가 있다면, 해당 변수(x_1과 x_2)는 더 크게 변경하는 것이 좋다.

계수가 최소인 변수(x_2)를 증가시키는 것이 목적 함수를 더 빨리 감소시킬 수 있다.

[참고] Simplex 방법에서 선택된 열이 양수이며 최소의 비율을 갖는 행을 선택하는 이유

1행:	x_3	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$	$\leftarrow 4/1 = 4$	← 최소의 비율을 갖는 행(1행)
2행:	x_4	$x_1 + x_2 + x_4 = 6$	$\leftarrow 6/1 = 6$	
3행:		$-4x_1 - 5x_2 = f - 0$		

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

위의 1, 2행을 다시 정리하면,

$$-x_1 + x_3 = 4 - x_2$$
$$x_1 + x_4 = 6 - x_2$$

1) 1행을 선택하고 x_2 가 최대로 되는 4 로 정하면 목적함수가 최소로 되고, $(\because$ 비기저 변수 $x_1 = x_3 = 0)$

$$x_1 = x_3 = 0, x_4 = 2$$

2) 2행을 선택하고 x_2 가 최대로 되는 6 으로 정하면 목적함수가 최소로 되지만, $(\because$ 비기저 변수 $x_1 = x_4 = 0)$ 그러나

$x_1 = x_4 = 0, x_3 = -2$ ➡ 변수가 음이 아니라는 조건을 위배함

[참고] Simplex 방법에서 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택하지 않는 이유

1행:	x_2	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$	⟵ 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택 안됨
2행:	x_4	$2x_1 - x_3 + x_4 = 2$	⟵ 2/2 = 1
3행:		$-9x_1 + 5x_3 = f + 20$	

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

비기저 변수: x1, x3

기저 변수 : x2, x4 ,x1

1. 위의 1, 2행을 다시 정리하면,

$$x_2 + x_3 = 4 + x_1 \quad \text{-----} \quad ①$$

$$-x_3 + x_4 = 2 - 2x_1 \quad \text{-----} \quad ②$$

2. x2, x4중 하나를 비기저 변수로 변경해야 함

3. x4를 비기저 변수로 변경하면

3-1. 식 ②는 다음과 같이 변경 됨 (비기저 변수 x_3=0, x_4=0)

$$0 = 2 - 2x_1 \;\rightarrow\; 2 = 2x_1 \;\rightarrow\; 1 = x_1$$

3-2. 식 ①은 다음과 같이 변경 됨(비기저 변수 x_3=0, x_4=0)

$$x_2 = 4 + x_1 \geq 0$$

3-1에서 x_1의 값이 어떤 것으로 결정 되더라도 식 ①을 만족한다.

→ 계수가 양인 행에 포함된 기저 변수를 선택하면 계수가 음수인 행의 식은 항상 만족함.

[참고] Simplex 방법에서 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택하지 않는 이유

1행:	x_2	$-x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4$ ← 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택 안됨
2행:	x_4	$2x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 2$ ← 2/2 = 1
3행:		$-9x_1 \qquad + 5x_3 \qquad = f + 20$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

비기저 변수: x1, x3

기저 변수 : x2, x4 ,x1

1. 위의 1, 2행을 다시 정리하면,

$$x_2 \quad + x_3 \qquad = 4 + x_1 \qquad \text{-----} \quad ①$$

$$-x_3 + x_4 = 2 - 2x_1 \qquad \text{-----} \quad ②$$

2. x2, x4중 하나를 비기저 변수로 변경해야 함

3. x2를 비기저 변수로 변경하면

3-1. 식 ①은 다음과 같이 변경 됨 (비기저 변수 x_2=0, x_3=0)

$0 = 4 + x_1 \rightarrow \quad x_1 = -4$ ➡ 변수가 음이 아니라는 조건을 위배함

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법

Pivot: Gauss-Jordan 소거법과 같은 개념
선택한 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거

비기저 변수 (0으로 두는 변수) / 기저 변수

기저 변수			
1행:	x_3	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$	$4/1 = 4$
2행:	x_4	$x_1 + x_2 + x_4 = 6$	$6/1 = 6$
3행:		$-4x_1 - 5x_2 = f - 0$	

기저 변수

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	x3	-1	1	1	0	4	4
2행:	x4	1	1	0	1	6	6
3행:	Obj.	-4	-5	0	0	f-0	-

1행 2열 중심으로 Pivot을 실시

새로운 2행 = (2행 - 1행)
새로운 3행 = (3행 + 5×1행)

비기저 변수

기저 변수			
1행:	x_2	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$	$4/-1 = -4$ (음수면 선택 안됨)
2행:	x_4	$2x_1 - x_3 + x_4 = 2$	$2/2 = 1$
3행:		$-9x_1 + 5x_3 = f + 20$	

기저 변수

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	X2	-1	1	1	0	4	-4
2행:	x4	2	0	-1	1	2	1
3행:	Obj.	-9	0	5	0	f+20	-

2행 1열 중심으로 Pivot을 실시

새로운 1행 = (1행 + 0.5×2행)
새로운 2행 = (0.5×2행)
새로운 3행 = (3행 + 4.5×2행)

비기저 변수

기저 변수		
1행:	x_2	$x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 = 5$
2행:	x_1	$x_1 - 0.5x_3 + 0.5x_4 = 1$
3행:		$+0.5x_3 + 4.5x_4 = f + 29$

기저 변수

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	x2	0	1	0.5	0.5	5	-
2행:	x1	1	0	-0.5	0.5	1	-
3행:	Obj.	0	0	0.5	4.5	f+29	-

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로
현재의 해가 최적해임(x_1=1, x_2=5, x_3=x_4=0, f=-29)

선형 계획 문제의 예
- 2개의 설계 변수와 부등호(“≥”) 제약 조건을 가진 문제

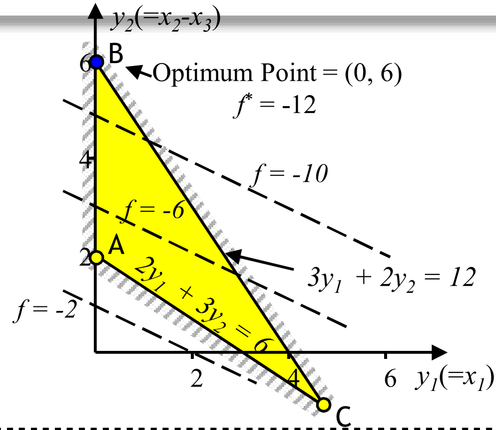
Maximize $z = y_1 + 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음



목적 함수의 최대화 문제를 최소화 문제로 변환

Minimize $F = -y_1 - 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음

- 변수의 부호 제약이 없으나, 양의 변수로 변경될 수 있는 예
+ 조선소의 이익 = 선가 - 건조비

부호 제한이 없는 변수를
값이 음이 아닌 변수로 변환
($y_2 = y_2^+ - y_2^-$)
$x_1 = y_1, x_2 = y_2^+, x_3 = y_2^-$라고 가정하면

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Simplex 방법을 이용하기 위한 부등호("≥") 제약 조건의 변환 방법(1)

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$

[복습] "≤" 형태의 부등호 제약 조건: 완화 변수(slack variable)의 도입

$$\Rightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \underline{x_4} = 12$$

$\boxed{2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6}$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:

잉여 변수(surplus variable) 및 인위 변수(artificial variable)의 도입

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - \underline{x_5} + \underline{x_6} = 6$$

잉여 변수 (0보다 크거나 같음) 인위 변수(0보다 크거나 같음)

"인위 변수 도입 이유"

Simplex 방법을 시작할 때 문제의 원래 변수(x_1, x_2, x_3)를 "비기저 변수" 로 가정하면(x_1=x_2=x_3=0), $-x_5$ = 6이 된다.

➡ 수학적으로 정합성이 없으므로 x_6를 인위적으로 추가하여 수학적인 정합성을 유지한다.
그런데 x_6는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 반드시 0이 되어야 한다.

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- “≥” 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(1)

①

Maximize $z = y_1 + 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음

1. 최소화 문제로 변환함
2. y_2 는 부호 제한이 없으므로 $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ 로 분해함
3. $x_1 = y_1, x_2 = y_2^+, x_3 = y_2^-$ 라고 가정함
4. 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 만듦 (완화, 잉여 변수의 도입)

②

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 6$

$x_i \ge 0; i = 1\ to\ 5$

완화 변수: x_4

잉여 변수: x_5

원래 변수 x_1, x_2, x_3 를 모두 0이라 두고(비기저 변수)

기저 변수 x_4, x_5 를 구하면

$x_4 = 12, x_5 = -6$ ➡ 음이 아니라는 조건을 위배함

“≥” 형태의 등호 제약 조건에 인위 변수 x_6 를 추가적으로 도입함

③

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$

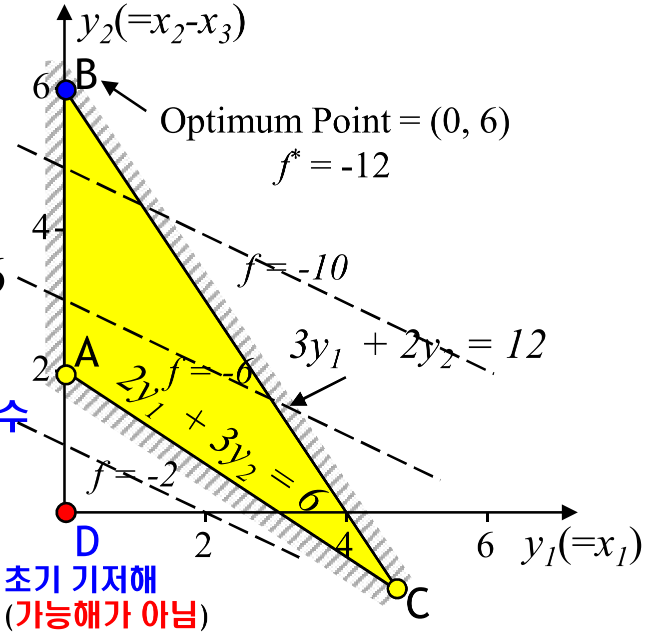
$x_i \ge 0; i = 1\ to\ 6$

완화 변수: x_4

잉여 변수: x_5 인위 변수: x_6

원래 변수 x_1, x_2, x_3와 잉여 변수 x_5를 모두 0이라 두고(비기저 변수) 기저변수 x_4, x_6을 구하면 x_4=12, x_6=6이다. ➡ 초기 기저해(가능해가 아님)

그런데 x_6은 인위적으로 추가한 변수이므로 이 값을 0으로 만들어야 한다.



초기 기저해
(가능해가 아님)

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- "≥" 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(2)

③

완화 변수

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$

$x_i \geq 0; i = 1 \; to \; 6$

잉여 변수 인위 변수

인위 변수의 합으로 표현되는 인위 목적 함수(w=x_6)를 정의함

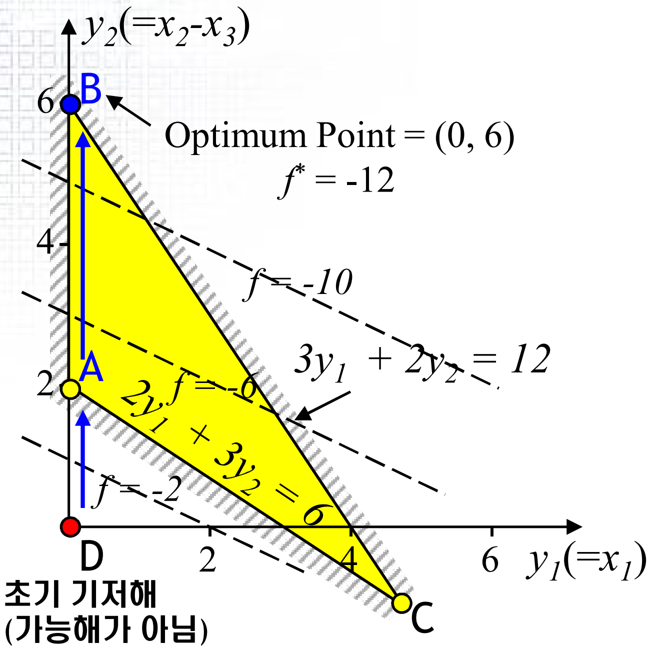
④

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$
$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$
$$\boxed{-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = w - 6}$$

인위 목적 함수 식

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$ 식에서 x_6=w라 두고 정리한 것임

⑥ 목적 함수 f 를 최소화 하는 해를 구함 (Simplex 방법의 Phase 2)



⑤ 초기 기저 가능해(인위 목적 함수 w=x_6을 최소화("w=0")하는 해)를 구함 (Simplex 방법의 Phase 1)

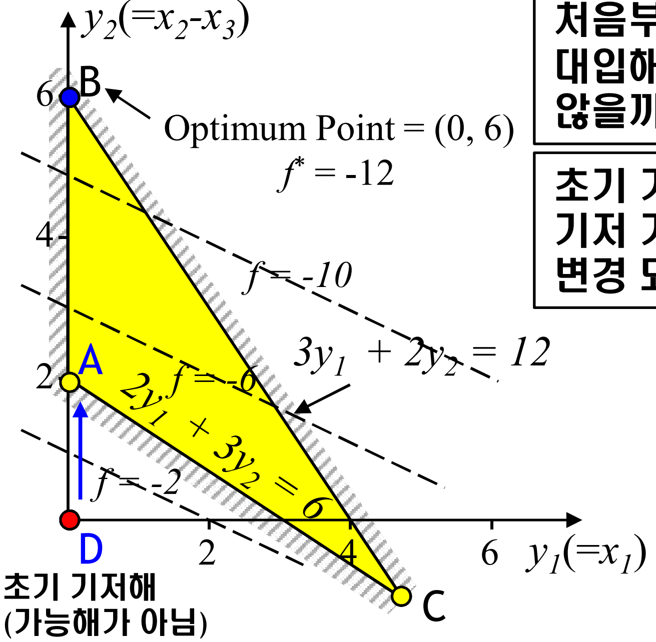
인위 변수는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 0이어야 함

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- “≥” 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(3)

④
$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$
$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = w - 6$$

초기에는 원래 변수($x_1, \ldots, x_3$), 잉여 변수(x_5)를 0으로 가정하고(“비기저 변수”), 완화 변수(x_4)와 인위 변수(x_6)를 기저 변수로 가정하여 풀기 시작함(“초기 기저해로부터 시작”)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	-
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	-
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-



초기 기저해
(가능해가 아님)

처음부터 x_6에 0을 대입해도 되지 않을까?

초기 기저해가 기저 가능해로 변경 되는 과정

⑤ Phase 1: 인위 목적 함수를 기준으로 Pivot을 수행함(w = 0이 될 때까지 수행)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	6
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	2
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

➡

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	-
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

인위 변수는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 0이어야 함

새로운 1행 = 1행 - (2/3)×2행
새로운 2행 = (1/3)×2행
새로운 2행 = 3행 - (2/3)×2행
새로운 4행 = 4행 + 2행

인위 목적 함수가 0이므로
Phase 1이 완료되었음
점 A($x_1=x_3=x_5=x_6=0$, $x_2=2$, $x_4=8$)

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- "≥" 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(4)

⑤ Phase 1: 인위 목적 함수를 기준으로 Pivot을 수행함(w = 0이 될 때까지 수행)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	6
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	2
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

➡

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	-
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

⑥ Phase 2: 목적 함수 f를 기준으로 Pivot을 수행함(목적 함수의 모든 계수가 음이 아닐 때까지 수행)

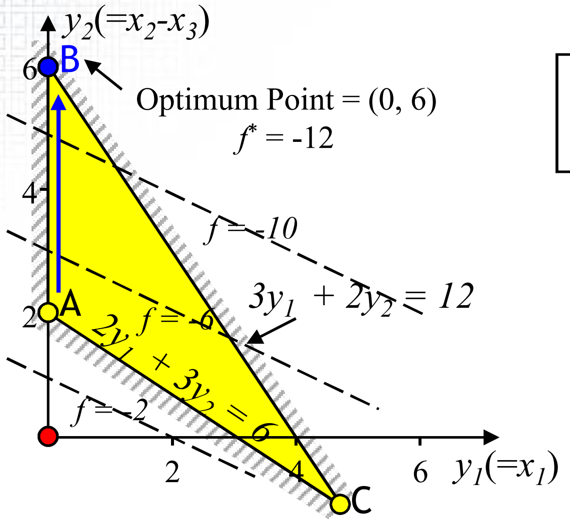
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	12
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-6
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-

➡

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x5	5/2	0	0	3/2	1	-1	12	-
x2	3/2	1	-1	1/2	0	0	6	-
Obj.	2	0	0	1	0	0	f+12	-

새로운 1행 = 1행 × (2/3)
새로운 2행 = 2행 + (1/2)×1행
새로운 3행 = 3행 + 1행

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로
현재의 해가 최적해임
(x_1=x_3=x_4=0,x_2=6,x_5=12,f=-12)



인위 목적 함수의 구성 방법Simplex 방법을 이용하기 위한 등호("=") 제약 조건의 변환 방법

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$ ⇒ $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \underline{x_4} = 12$

[복습] "≤" 형태의 부등호 제약 조건: 완화 변수(slack variable)의 도입

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$ ⇒ $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - \underline{x_5} + \underline{x_6} = 6$

[복습]"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및 인위 변수(artificial variable)의 도입

$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 6}$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

"=" 형태의 등호 제약 조건: 인위 변수(artificial variable)의 도입

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ➡ $x_1 + x_2 + x_3 + \underline{x_7} = 6$

인위 변수(0보다 크거나 같음)

"인위 변수 도입 이유"

Simplex 방법을 시작할 때 문제의 원래 변수(x_1, x_2, x_3)를 "비기저 변수"로 가정하면(x_1=x_2=x_3=0), 이 식이 성립하지 않는다.

➡ 수학적으로 정합성이 없으므로 x_4를 인위적으로 추가하여 수학적인 정합성을 유지한다.
그런데 x_4는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 반드시 0이 되어야 한다.

인위 목적 함수의 정의 방법

1

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \textit{Subject to} \quad & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환

2

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \textit{Subject to} \quad & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_i \ge 0;\ i = 1 \ to \ 7 \end{aligned}$$

$$x_6 - 6 = -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5$$

$$x_7 - 6 = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$w(= x_6 + x_7) - 12 = -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5$$

인위 변수의 합으로 표현되는 인위 목적 함수(w=x_6+x_7)를 정의함

3

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f \\ & -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 = w - 12 \end{aligned}$$

초기 기저 가능해(인위 목적 함수 w=x_6+x_7을 최소화 ("w=0"; x_6=x_7=0) 하는 해)를 구함

<참고> 인위 변수 각각에 대해 인위 목적 함수를 정의하는 경우

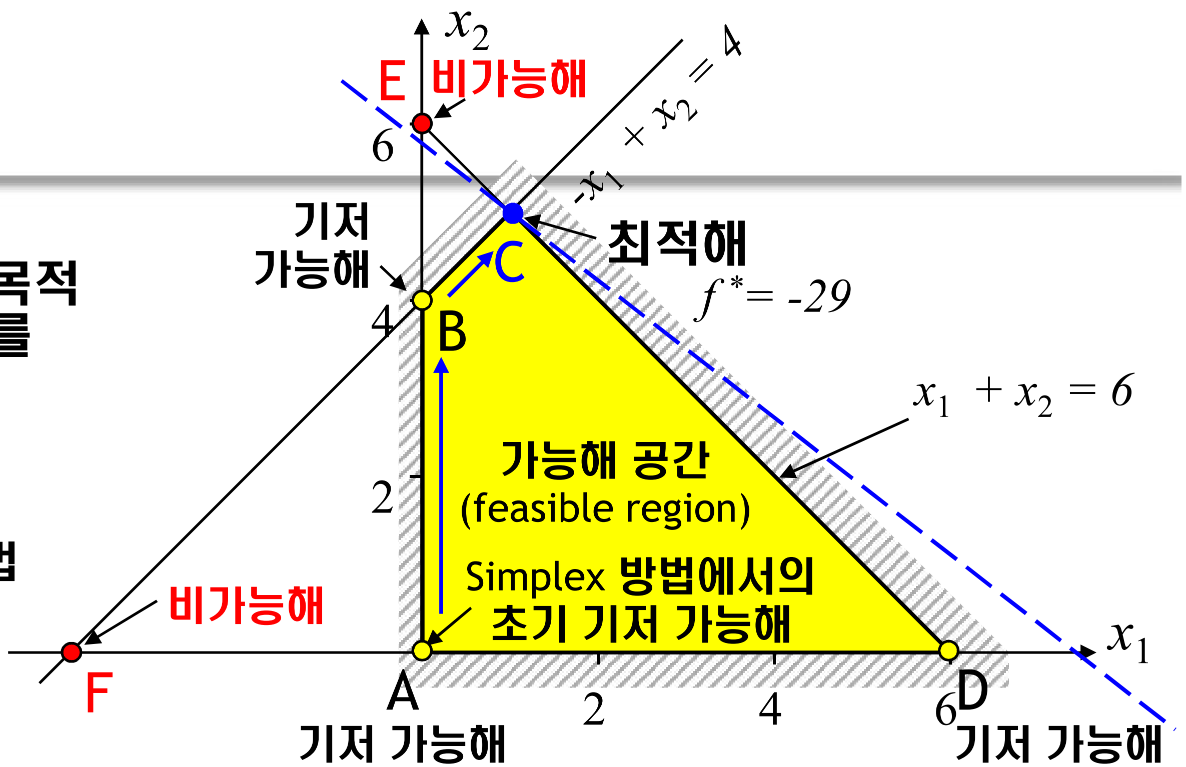
$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f \\ & \left.\begin{aligned} & -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = w_1 - 6 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 = w_2 - 6 \end{aligned}\right\} \end{aligned}$$

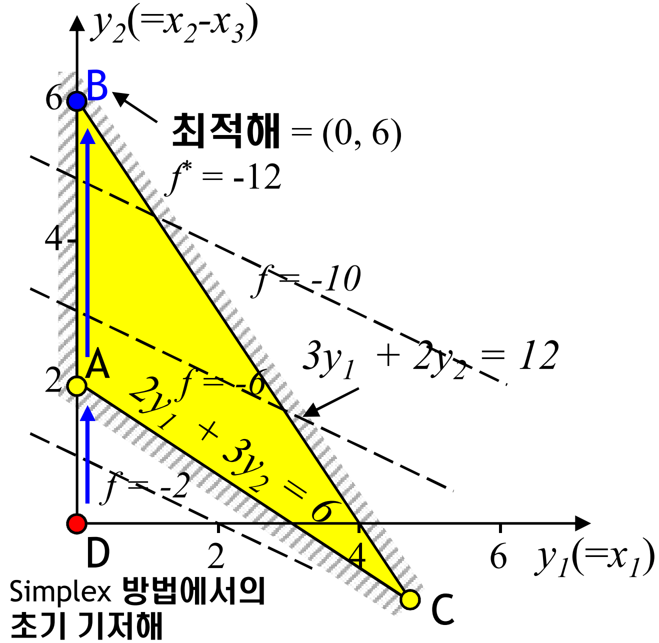
➡ 인위 목적 함수 w_1을 최소화(x_6=0) 하고, 인위 목적 함수 w_2를 최소화(x_7=0) 하는 과정을 각각 수행함

인위 변수는 0보다 크거나 같으므로,
인위 목적 함수를 최소화 한다는 것은
인위 변수가 모두 0의 값을 가져
인위 목적 함수의 값이 0인 것을 의미함
따라서, 인위 변수의 합으로 인위 목적 함수를
정의하는 것이 편리함

Simplex 방법의 요약

- 기저 가능해로부터 시작하여 목적 함수를 점차 개선시켜 최적해를 구하는 방법
- 1차 연립 방정식의 이론을 바탕으로 함
  - 행렬 연산(가우스-조단 소거법 등)을 이용함
- Simplex 방법의 종류
  - One-phase Simplex 방법
    - "≤" 형태의 부등호 제약 조건만을 가진 문제
  - Two-phase Simplex 방법
    - "≥" 형태의 부등호 제약 조건 또는 등호 제약 조건("=")을 가진 문제
    - Phase 1: 초기 기저 가능해를 선정하기 위해 인위 목적 함수(w)를 0으로 하는 해를 구하는 단계
    - Phase 2: 초기 기저 가능해로부터 해의 개선을 통해 최적해를 구하는 단계





Simplex 방법의 알고리즘의 요약

- 단계 1: 초기 기저 가능해를 선정한다.
  - “<=” 형태의 부등호 제약 조건: 주어진 문제의 원래의 변수를 비기저 변수(0으로 가정)로, 완화 변수를 기저 변수로 가정하여 초기 기저 가능해를 결정함
  - “>=” 형태의 부등로 제약 조건 또는 등호 제약 조건(“=”): Two-phase Simplex 방법을 이용하며, Phase 1에서 인위 목적 함수 w를 0으로 하는 초기 기저 가능해를 선정함

- 단계 2: 목적 함수를 비기저 변수로만 표현한다.

- 단계 3: 비기저 변수에 대한 목적 함수의 계수가 모두 음이 아닌지를 확인한다. 만약 그렇다면 현재의 해가 최적해이며 그렇지 않다면 다음 단계로 간다.

- 단계 4: Pivot 열과 행을 결정한다. 이때 결정된 Pivot 열에 해당하는 비기저 변수가 새로운 기저 변수로 되고, Pivot 행에 해당하는 기저 변수가 비기저 변수로 된다.

- 단계 5: 가우스-조단 소거법을 이용하여 Pivot을 수행한다.

- 단계 6: 비기저 및 기저 변수의 값을 구한다. 그리고 단계 3으로 간다.

[참고] 부호 제약 조건이 없는 변수를 음이 아닌 2개의 변수로 치환하는 시점

수학 모델

Minimize $z = -y_1 - 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음

$y_2 = y_2^+ - y_2^-$

$y_2^+, y_2^+ \ge 0$

부호 제한이 없는 변수
→ 음이 아닌 변수로 수정

Minimize $f = -y_1 \boxed{- 2y_2^+ + 2y_2^-}$

Subject to $3y_1 + \boxed{2y_2^+ - 2y_2^-} \le 12$

$2y_1 + \boxed{3y_2^+ - 3y_2^-} \ge 6$

$y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0$

순서 (1)

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및
인위 변수(artificial variable)의 도입

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및
인위 변수(artificial variable)의 도입

순서 (2)

Minimize $f = -y_1 - 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 + \boxed{x_1} = 12$

$2y_1 + 3y_2 - \boxed{x_2} + \boxed{x_3} = 6$

$y_1, x_i \ge 0; i = 1 \ to \ 3$

y_2 는 부호 제한 없음

$y_2 = y_2^+ - y_2^-$

$y_2^+, y_2^+ \ge 0$

부호 제한이 없는 변수
→ 음이 아닌 변수로 수정

Minimize $f = -y_1 \boxed{- 2y_2^+ + 2y_2^-}$

Subject to $3y_1 + \boxed{2y_2^+ - 2y_2^-} + \boxed{x_1} = 12$

$2y_1 + \boxed{3y_2^+ - 3y_2^-} - \boxed{x_2} + \boxed{x_3} = 6$

$y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0, \ x_i \ge 0; i = 1 \ to \ 3$

수학 모델이 결정된 후에는 부호 제한이 없는 변수를 음이 아닌 변수로 수정하는 과정과 완화, 잉여, 인위변수를 추가하는 과정의 순서에 상관 없이 같은 결과를 얻을 수 있다.

[참고] Simplex 방법에서 인위 변수에 처음부터 0을 넣으면 어떻게 되는가?

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$
$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$

인위 변수인 x_6에 0을 대입하기 위해서는

같은 식 내의 다른 변수 x_1, x_2, x_3, x_5가 음수가 되지 않도록 계산해야 한다.

x_1, x_2, x_3, x_5를 계산하는 과정이 바로
Simplex 방법에서 인위 목적함수를 이용하여 x_6를 0으로 계산하는 과정이다.

[참고] Simplex 방법에서 인위 목적 함수를 이용하여 초기 기저해를 기저 가능해로 변경하는 과정(1/2)

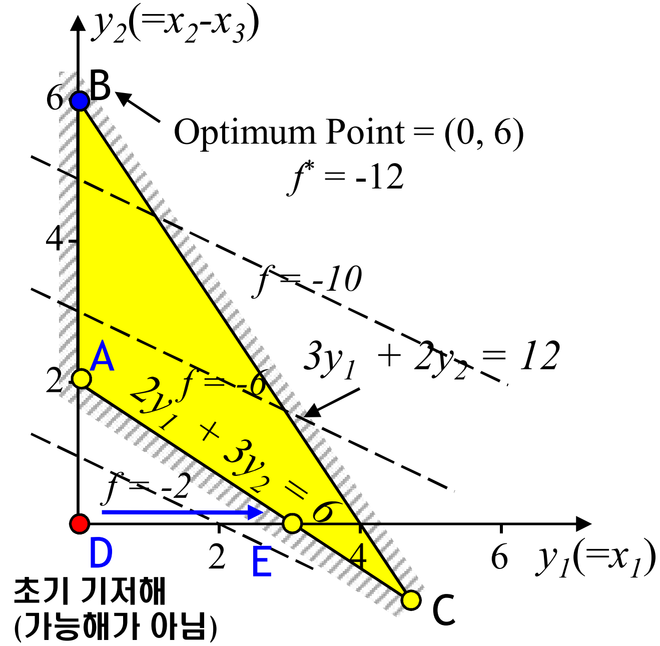
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	4
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	3
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

첫번째 열을 선택하여 Pivot을 수행

(일반적인 Simplex 방법에서는 두번째 열을 선택 함)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	0	-5/2	5/2	1	3/2	-3/2	3	-
x1	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1/2	3	-
Obj.	0	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	f+3	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로
Phase 1이 완료되었음
점 E(x_2=x_3=x_5=x_6=0, x_1=3, x_4=3)



초기 기저해에서 인접한 모서리를 거쳐 기저 가능해로 변경 됨

→ 기저 가능해에서 최적점을 찾아가는 과정과 유사함
(인접한 모서리를 거쳐 찾아감)

- Phase1이 종료되었으므로 Phase2를 진행
- Phase2: 목적함수 f를 기준으로 Pivot을 수행

[참고] Simplex 방법에서 인위 목적 함수를 이용하여 초기 기저해를 기저 가능해로 변경하는 과정(2/2)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	0	-5/2	5/2	1	3/2	-3/2	3	-6/5
x1	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1/2	3	2
Obj.	0	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	f+3	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로
Phase 1이 완료되었음
점 E($x_2=x_3=x_5=x_6=0,\ x_1=3,\ x_4=3$)

새로운 1행 = 1행 + 2행 × (5/3)
새로운 2행 = 2행 × (2/3)
새로운 3행 = 3행 + 2행 × (1/3)

- Phase1이 종료되었으므로 Phase2를 진행
- Phase2: 목적함수 f를 기준으로 Pivot을 수행

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	12
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-6
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-

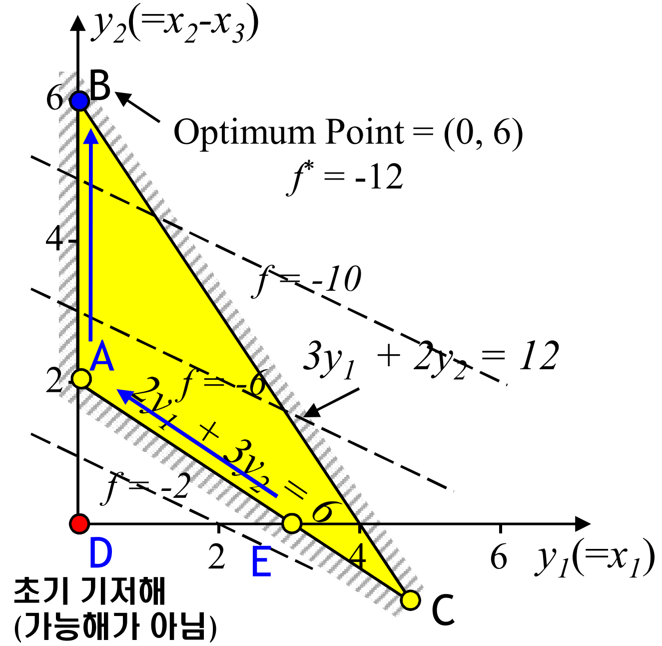
점 A($x_1=x_3=x_5=x_6=0, x_2=2, x_4=8$)

새로운 1행 = 1행 × (2/3)
새로운 2행 = 2행 + (1/2)×1행
새로운 3행 = 3행 + 1행

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x5	5/2	0	0	3/2	1	-1	12	-
x2	3/2	1	-1	1/2	0	0	6	-
Obj.	2	0	0	1	0	0	f+12	-

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로 현재의 해가 최적해임

점 B($x_1=x_3=x_4=x_6=0, x_2=6, x_5=12, f=-12$)



초기 기저해에서 인접한 모서리를 거쳐 기저 가능해로 변경 됨
→ 기저 가능해에서 최적점을 찾아가는 과정과 유사함
(인접한 모서리를 거쳐 찾아감)

참 고 자 료

공학수학 Review
- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

공학수학 Review
- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

row2 +
row1x(−3)

$$\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ +)\ \underline{-3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -3} \\ -7x_2 - 4x_3 = -1 \end{array}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

row2 +
row1x(−3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

row3 + row1x(−2)

$$\begin{array}{rr} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ +) & -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ \hline & -x_2 - 3x_3 = -5 \end{array}$$

row3 + row1x(−2)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$
$$0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 = -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 0\cdot x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

row 2 ↔ row 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 0\cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

row 2x(−1)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - \ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

row 3+ row 2x7

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 17x_3 &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

The last equations and matrix are equal to given equations.

Linear Independence

Definition 3.1 **Linear Dependence / Independence**

A set of functions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ is said to be **'linearly dependent'** on an interval I if there exist constant $c_1, c_2, \ldots c_n$, not all zero such that $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) = 0$ for every x in the interval.

If the set of functions is not linearly dependent on the interval, it is said to be **'linearly independent'**

In other words, a set of functions is 'linearly independent' if the only constants for

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

are $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

"two functions are linearly independent when neither is a constant multiple of the other"

$$\begin{cases} f_1(x) = \sin 2x \\ f_2(x) = \sin x \cos x \end{cases} \quad on(-\infty, \infty)$$

$$f_2(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\therefore f_2(x) = \frac{1}{2} f_1(x)$$

Linearly Dependent

$$\begin{cases} f_1(t) = e^t \\ f_2(t) = e^{2t} \end{cases} \quad on(-\infty, \infty)$$

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0$$

Satisfied only when $c_1 = c_2 = 0$ on the interval

Linearly Independent

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$f_2 : 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$f_3 : 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 - 34 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 - + 0 \cdot x_2 + 17x_3 &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_3(f_3) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 - 5) + c_3(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 - 34) = 0$$

$$(\boxed{c_1} + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3)x_1 + (2\boxed{c_1} + \boxed{c_2} + 0 \cdot c_3)x_2 + (\boxed{c_1} + 3\boxed{c_2} + 17c_3)x_3 + (-c_1 - 5c_2 - 34c_3) = 0$$

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = 0$$

$\therefore f_1, f_2, f_3$ **: linearly independent.** $\longrightarrow$ **rank : 3**

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 = 34$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent : 3

rank : 3

Unknown variables x_1, x_2, x_3 n=3

No. of equations which are linearly independent : 3 = **rank : 3** = **Unknown variables n=3** ⇨ **Unique Solution**

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{0.5*\text{row } 3}$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$
$$f_2 : 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$
$$f_3 : 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_3(f_3) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 5) + c_3(0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10) = 0$$

$$\underline{(\boxed{c_1} + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3)}x_1 + \underline{(2\boxed{c_1} + c_2 + 2c_3)}x_2 + \underline{(\boxed{c_1} + 3c_2 + 6c_3)}x_3 + (-\boxed{c_1} - 5c_2 + 10c_3) = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -2c_3 \qquad c_3 = arbitrary\ number$$

$\therefore f_1, f_2, f_3$ **: linearly *dependent.***

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

0.5*row 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$f_2 : 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$f_3 : 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$$

No. of equations which are linearly independent ?

rank : 2

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 5) = 0$$

$$(\boxed{c_1} + 0\cdot c_2)x_1 + (2\boxed{c_1} + c_2)x_2 + (\boxed{c_1} + 3c_2)x_3 + (-c_1 - 5c_2) = 0$$

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0$$

$\therefore f_1, f_2$ **: linearly *independent.***

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent : 2 = **rank : 2** < **Unknown variables n=3** ⇨ **Infinite many solutions**

Solution ?

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$ **Trivial Solution**

Linear Systems Vs Matrices

Solution ?

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$ Trivial Solution

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

x: Infinite many solutions

to have a solution x except x=0

$$rank(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) < n \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Zero row

λ: eigenvalues, x: eigenvectors

x: Infinite many solutions → Objective function → Solution determined

Optimization Problem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank : 3

Trivial x

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(\lambda+3)^2 = \mathbf{0}$$

$$when\ \lambda = 5$$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{A} - 5\mathbf{I}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Row reduction

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -24/7 & -48/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank : 2

infinite no. of x

공학수학 Review
- Inverse of a matrix.
Gauss-Jordan Elimination

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Notation of inverse matrix

In this inverse section, only *square matrices* are considered exclusively.

Notation of inverse of an n x n matrix A=[a_{jk}] : A^{-1}

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$ **, where I is the n x n unit matrix.**

Nonsingular matrix : A matrix that has an inverse.

(If a matrix has an inverse, the inverse is unique)

Singular matrix : A matrix that has no inverse.

Proof of uniqueness of inverse matrix

If B and C are inverses of A $(\mathbf{AB} = \mathbf{I} \;\&\; \mathbf{CA} = \mathbf{I})$,

We obtain $$\mathbf{B} = \mathbf{IB} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C}$$

(the uniqueness of inverse)

Inverse by the Gauss-Jordan Method

For Practical determination of the inverse $\mathbf{A}^{-1}$ of a nonsingular $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$, Gauss elimination can be used.
: This method is called Gauss-Jordan elimination

Step 1. Make augmented matrix. $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ \ \mathbf{I}]$

Step 2. Make Multiplication of $\mathbf{AX=I}$ by $\mathbf{A}^{-1}$
(by applying Gauss elimination to $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ \ \mathbf{I}]$)

$\longrightarrow$ **This gives a matrix of the form $[\mathbf{U} \ \ \mathbf{H}]$**

Step 3. Reduce $\mathbf{U}$ by further elementary row operations to diagonal form.
(Eliminate the entries of $\mathbf{U}$ above the main diagonal and making the diagonal entries all 1 by multiplication. See the example next page.)

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination.

Determine the inverse $\mathbf{A}^{-1}$ of

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Step 1. Make augmented matrix.

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Step 2. Make Multiplication of $\mathbf{AX}=\mathbf{I}$ by $\mathbf{A}^{-1}$ by applying Gauss elimination to

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{Row2 + 3Row1} \\ \text{Row3 − 3Row1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{Row3 − Row2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -0.6 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 2 & 0 & -2.6 & -0.4 & 1.4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row1 +0.4Row3} \\ \text{Row2 +1.4Row3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0.7 & -0.2 & -0.3 \\ 0 & 2 & 0 & -2.6 & -0.4 & 1.4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Row1 -0.5Row2} \\ \\ \\ \end{array}$$

diagonal matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{-Row1} \\ \text{0.5Row2} \\ \text{-0.2Row3} \end{array}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

Check the result.

Let
AA^{-1} = B

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = (-1)\times(-0.7) + 1\times(-1.3) + 2\times 0.8 = 1$$
$$b_{12} = (-1)\times(0.2) + 1\times(-0.2) + 2\times 0.2 = 0$$
$$b_{13} = (-1)\times(0.3) + 1\times(0.7) + 2\times(-0.2) = 0$$
$$b_{21} = (3)\times(-0.7) + (-1)\times(-1.3) + 1\times(0.8) = 0$$
$$b_{22} = (3)\times(0.2) + (-1)\times(-0.2) + 1\times(0.2) = 1$$
$$b_{23} = (3)\times(0.3) + (-1)\times(0.7) + 1\times(-0.2) = 0$$
$$b_{31} = (-1)\times(-0.7) + (3)\times(-1.3) + 4\times(0.8) = 0$$
$$b_{32} = (-1)\times(0.2) + (3)\times(-0.2) + 4\times(0.2) = 0$$
$$b_{33} = (-1)\times(0.3) + (3)\times(0.7) + 4\times(-0.2) = 1$$

$$\therefore \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

Row2 + 3Row1

Row3 − Row1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row3 − Row2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row1 + 0.4Row3

Row2 + 1.4Row3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row1 - 0.5Row2

diagonal matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

-Row1

0.5Row2

-0.2Row3

모든 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거 하였음
→ 바로 해를 구할 수 있음