[2008][11-2]

Computer aided ship design

Part 3. Optimization Methods

November 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced Ship Design Automation Laboratory

5.3 순차적 선형 계획법 (Sequential Linear Programming)

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

SLP(Sequential Linear Programming)

- 현재의 설계점에서 주어진 목적 함수와 제약 조건을 선형화하여 선형 계획 문제(LP problem)로 만든 후,
- 이를 풀어 설계 변수의 변화 정도를 얻어냄으로써 개선된 설계점을 구하는 방법

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(k+1)}}_{\text{개선된 설계점}} = \underbrace{\mathbf{x}^{(k)}}_{\text{현재의 설계점}} + \underbrace{\mathbf{d}^{(k)}}_{\text{LP problem으로부터 구하는 설계 변수의 변화 정도}}$$

- 즉, 선형 계획 문제(Linear Programming) 문제를 연속적(Sequential)으로 풀어 최적해를 구하는 방법

순차적 선형 계획법(SLP; Sequential Linear Programming) 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(1)

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

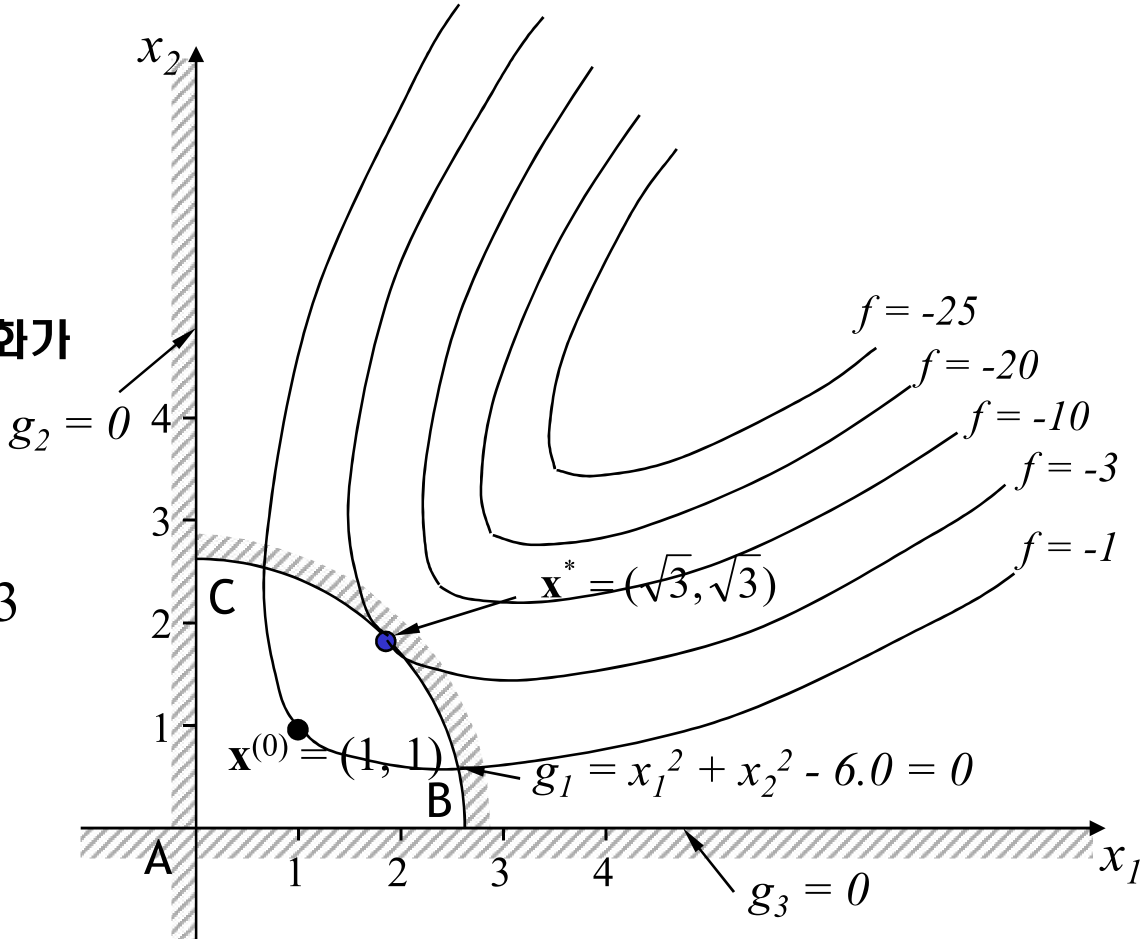
$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

초기 시작점은 $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$,

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ **이고, 15%의 설계 변화가 허용된다고 가정**

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\sqrt{3}, \sqrt{3}), f(\mathbf{x}^*) = -3$



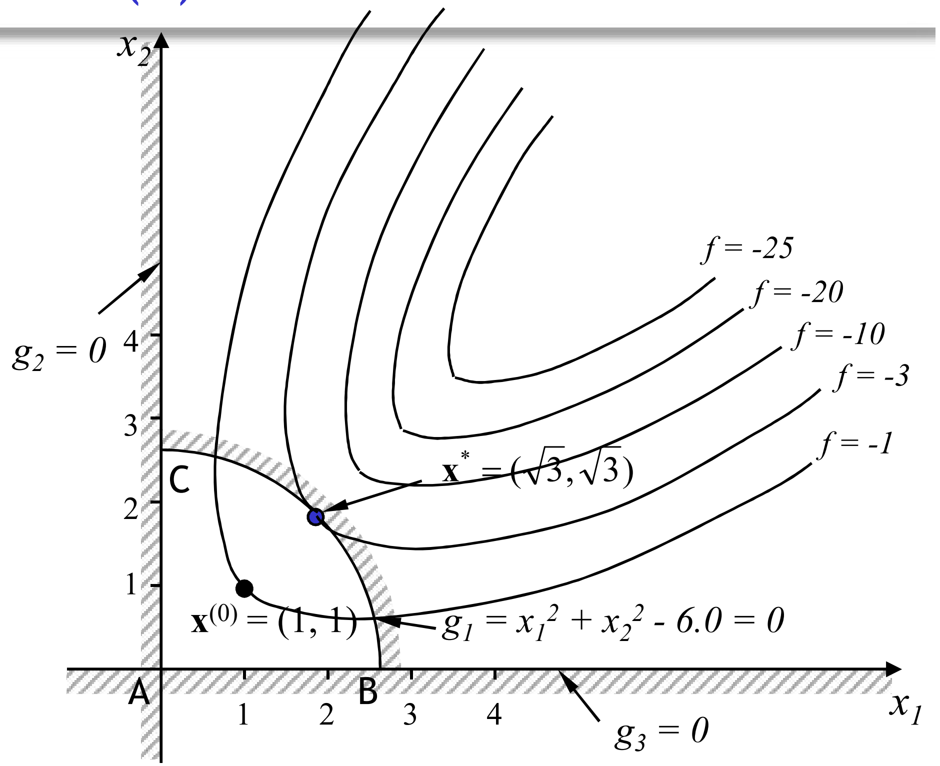
순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(2)

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$



---

(1) 반복 과정 1(k = 0)

(i) 단계 1

문제에서 주어진 초기 조건으로부터

$\mathbf{x}^{(0)} = (1,1), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$

(ii) 단계 2: 목적 함수와 제약 조건 함수의 값 계산

$f(1,1) = -1$

$g_1(1,1) = -\frac{2}{3} < 0$ ➡ **제약 조건 만족**

$g_2(1,1) = -1 < 0$ ➡ **제약 조건 만족**

$g_3(1,1) = -1 < 0$ ➡ **제약 조건 만족**

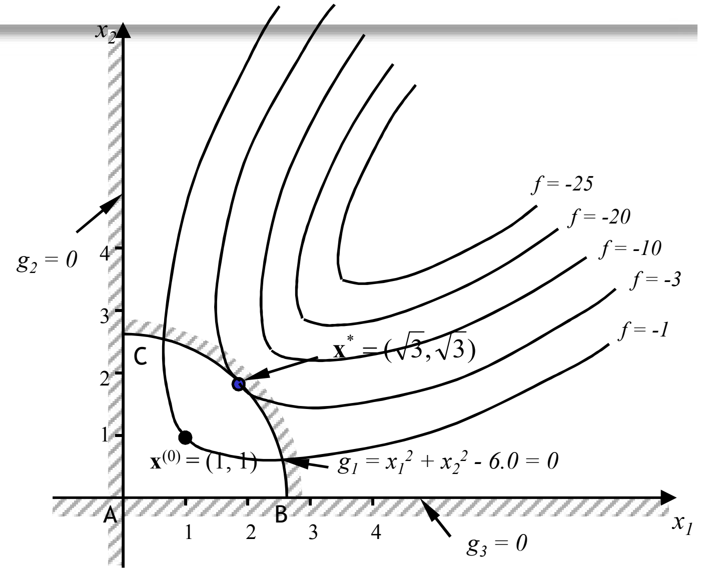
순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(2)

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\text{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$



Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 목적 함수

(1) 반복 과정 1(k = 0) $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$

(iii) 단계 3: LP 문제의 정의(**목적함수를 선형화** 한다.)

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \cong f(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla f^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 & 2x_2 - 3x_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^{(0)}} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\overline{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong (2x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)})d_1^{(0)} + (2x_2^{(0)} - 3x_1^{(0)})d_2^{(0)} \quad \longleftarrow \quad \mathbf{x}^{(0)} = (1,1) \text{ 대입}$$

$$\boxed{\overline{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong -d_1^{(0)} - d_2^{(0)}}$$

선형화 된 목적 함수

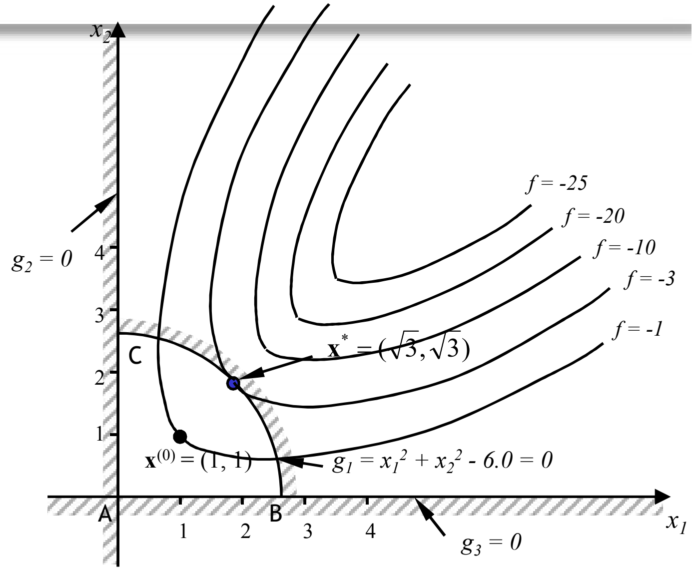
순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(2)

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$



(1) 반복 과정 1(k = 0) $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$

(iii) 단계 3: LP 문제의 정의(제약조건을 선형화 한다.)

Subject to: $g_j(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \Rightarrow \underline{g_j(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)}} \le 0; j = 1 \text{ to } m$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 제약조건

$g_j(\mathbf{x}^{(0)})$를 이항하면

$$\nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} \le -g_j(\mathbf{x}^{(0)}); j = 1 \text{ to } m$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla g_j^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_j}{\partial x_1} & \frac{\partial g_j}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \bar{g}_j(\Delta\mathbf{x}^{(0)}) = \bar{g}_j(\mathbf{d}^{(0)})$$

Subject to:

$$\bar{g}_1(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x_1^{(0)} & \frac{1}{3}x_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}d_1^{(0)} + \frac{1}{3}d_2^{(0)} \le \frac{2}{3}$$

$$\bar{g}_2(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow -d_1^{(0)} \le 1$$

$$\bar{g}_3(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow -d_2^{(0)} \le 1$$

선형화 된 제약 조건

$g_1(1,1) = -\frac{2}{3}$

$g_2(1,1) = -1$

$g_3(1,1) = -1$

순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(3)

(iv) 단계 4: LP 문제의 풀이를 통한 탐색 방향($d^{(0)}$)의 결정

Minimize $\bar{f} = -d_1 - d_2$

Subject to $\frac{1}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_2 \le \frac{2}{3}$

$-d_1 \le 1$

$-d_2 \le 1$

$-0.15 \le d_1 \le 0.15$

$-0.15 \le d_2 \le 0.15$

설계 변수의 변화 범위에 대한 제약 조건 (move limit)

목적 함수 및 제약조건을 선형화

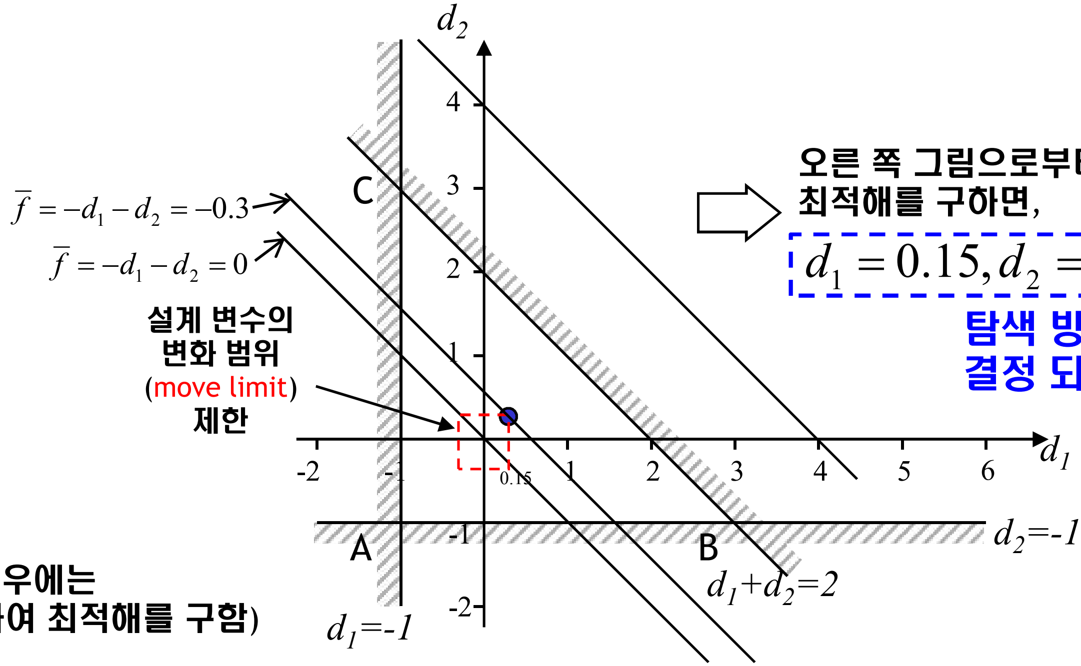
$f(1,1) = -1, g_1(1,1) = -\frac{2}{3},$
$g_2(1,1) = -1, g_3(1,1) = -1$
$\nabla f = (-1,-1), \nabla g_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}),$
$\nabla g_2 = (-1,0), \nabla g_3 = (0,-1)$

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$



오른 쪽 그림으로부터 최적해를 구하면,

$d_1 = 0.15, d_2 = 0.15$

탐색 방향이 결정 되었음

(프로그램을 이용할 경우에는 Simplex 방법을 이용하여 최적해를 구함)

순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(5)

(v) 단계 5: 수렴 기준의 검토(결정된 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)을 이용한다.)

$$\mathbf{d}^{(0)} = (d_1, d_2) = (0.15, 0.15)$$

$\left\| \mathbf{d}^{(0)} \right\| = \sqrt{0.15^2 + 0.15^2} = 0.212 > \varepsilon_2 (= 0.001)$ 이므로 수렴 기준을 만족하지 않음

(vi) 단계 6: 새로운 설계점의 결정 및 반복 횟수의 갱신

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1,1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)} = (1,1) + (0.15, 0.15) = (1.15, 1.15)$$

$$k = k + 1 = 1$$

---

0. 개선된 설계점을 찾았으므로,

1. 다시 개선된 설계점에서 주어진 문제를 선형 계획 문제로 근사화하고,

2. 선형 계획 문제를 풀어서 탐색 방향(d)을 정한 뒤,

3. 개선된 설계점을 찾는다.

(중지 조건: 단, 탐색 방향 d의 크기가 ε 보다 작으면 탐색을 중지 한다.)

SLP(Sequential Linear Programming) 알고리즘의 요약

- **단계** 1: k=0**으로 둔다.** $\mathbf{x}^{(0)}$**으로 설계 변수의 초기값을 추정한다. 또한 제약 조건의 위배 정도와 수렴 기준으로 작은 수** ε_1, ε_2**의 적절한 초기값을 선정한다.**

- **단계** 2: $\mathbf{x}^{(k)}$**에서 목적 함수, 제약 조건과 이들의 경사도**(gradient)**를 계산한다.**

- **단계** 3: $\mathbf{x}^{(k)}$**의 변화 범위**(move limit) $\Delta x_{il}{}^{(k)}$, $\Delta x_{iu}{}^{(k)}$**를 적절히 선정하고, 선형 계획 문제를 수학적으로 정의한다. 즉,**

$$\Delta x_{il}{}^{(k)} \le \Delta x_i{}^{(k)} \le \Delta x_{iu}{}^{(k)}$$

- **단계** 4: **앞서 정의된 선형 계획 문제를** Simplex **방법으로 풀어** $\mathbf{d}^{(k)}$**를 구한다.**

- **단계** 5: **수렴 여부를 확인한다. 즉,** $g_i \le \varepsilon_1 (i = 1 \text{ to } m)$, $|h_i| \le \varepsilon_1 \; (i = 1 \text{ to } p)$, **그리고** $\|\mathbf{d}^{(k)}\| \le \varepsilon_2$**인지 확인하여 그렇다면 현재의** $\mathbf{x}^{(k)}$**가 최적해라고 가정하고 종료한다. 그렇지 않다면 다음 단계로 간다.**

- **단계** 6: **새로운 설계 변수** $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$**로, 반복 횟수** $k = k+1$**로 수정하고 단계** 2**로 간다.**

제약 최적화 문제의 선형화 (Linear Programming Problem)

$$Minimize \quad f(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}) \cong f(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)}$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 목적 함수

$$Subject\ to \quad h_j(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}) \cong h_j(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla h_j^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = 0;\ j = 1\ to\ p$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 등호 제약 조건

$$g_j(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}) \cong g_j(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} \le 0;\ j = 1\ to\ m$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 부등호 제약 조건

여기서, $\bar{f} = f(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^{(k)}),\ e_j = -h_j(\mathbf{x}^{(k)}),\ b_j = -g_j(\mathbf{x}^{(k)}),$

$c_i = \partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i,\ n_{ij} = \partial h_j(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i,\ a_{ij} = \partial g_j(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i,$

$d_i = \Delta x_i^{(k)}$ 라고 가정하면

$$Minimize \quad \bar{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$$

$$Subject\ to \quad \sum_{i=1}^{n} n_{ij} d_i = e_j;\ j = 1\ to\ p$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \le b_j;\ j = 1\ to\ m$$

여기서, $d_{il} \le d_i \le d_{iu}\ (\Delta x_{il}^{(k)} \le \Delta x_i^{(k)} \le \Delta x_{iu}^{(k)})$

<u>Matrix form</u>

$$Minimize \quad \bar{f} = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

: 선형화 된 목적 함수

$$Subject\ to \quad \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{e}_{(p\times 1)}$$

: 선형화 된 등호 제약 조건

$$\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} \le \mathbf{b}_{(m\times 1)}$$

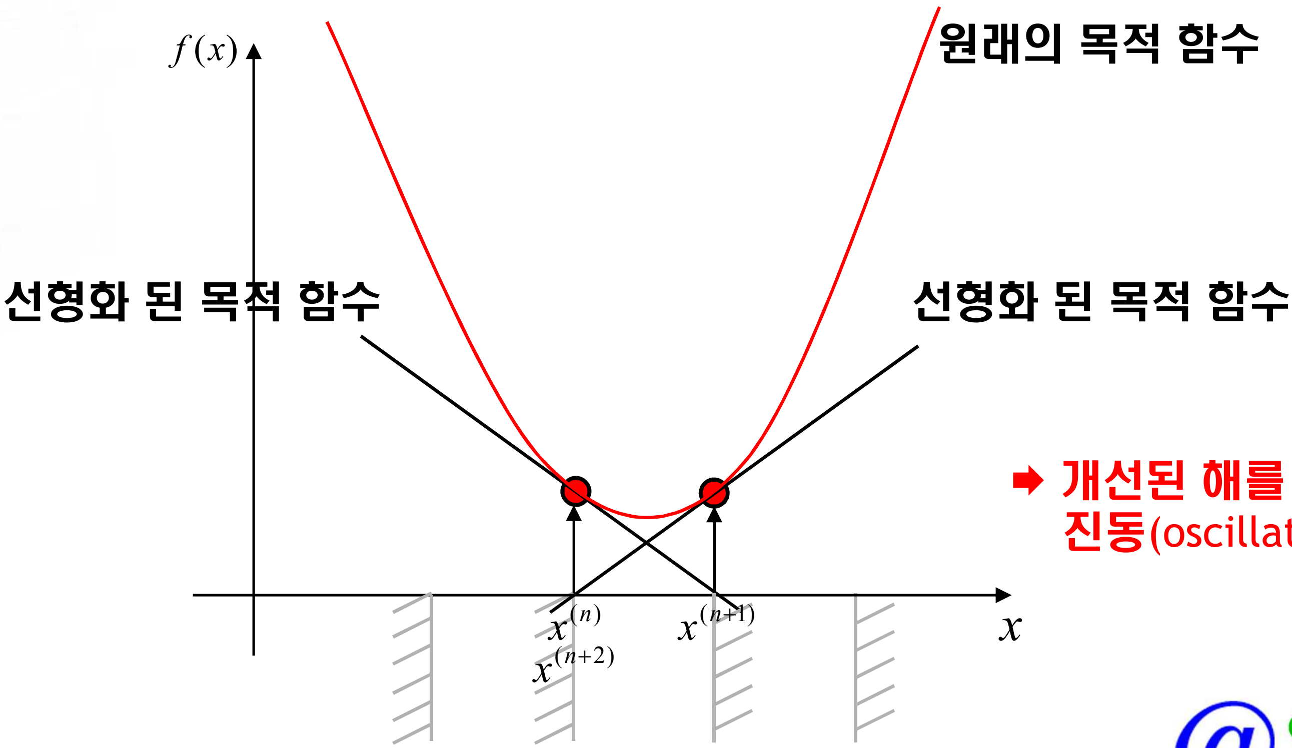
: 선형화 된 부등호 제약 조건

➡ **선형 계획 문제**(Linear Problem)

➡ Simplex **방법을 이용해 해결 가능**

SLP 방법의 한계점

- 설계 변수의 **변화 범위**(move limit)을 사용자가 주어야 함
- 설계 변수의 변화 범위가 작을 경우 최적해를 찾는 데에 많은 시간이 소요됨
- 반면, 설계 변수의 변화 범위가 클 경우 최적해를 못 찾을 수도 있음



➡ 개선된 해를 찾지 못하고 진동(oscillation)함

5.4 CSD(Constrained Steepest Descent) 방법

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

최적화 문제의 분류와 해법

	비제약 최적화 문제		제약 최적화 문제		
	선형	비선형	선형	비선형	
목적 함수 (예시)	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$	minimize $f(\mathbf{x})$ $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$
제약 조건 (예시)	없음	없음	$h(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 = 0$ $g(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$	$h(\mathbf{x}) = x_1 + 5x_2 = 0$ $g(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$	$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$ $g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$
국부 최적화 방법	① 직접 탐사법 - Hooke&Jeeves - Nelder&Mead ② Gradient 방법 - Steepest Descent방법[4] - 공액 경사도 방법[4](Conjugate Gradient 방법) - Newton 방법[5] - Davidon-Fletcher-Powell(DFP) 방법[5] - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS) 방법[5]		Penalty Function으로 해를 구할 수 있으나 일반적으로 선형 계획법을 사용	- Penalty Function[1]을 구성한 후 비제약 최적화 문제로 변환한 후 해를 구함	
			- Simplex 방법 (선형 계획법, Linear Programming)	- 2차 계획 법 (Quadratic Programming)	- 근사화 방법 - SLP 선형 계획 문제[2]로 근사화 후 개선된 탐색점을 찾고, 그 점에서 다시 선형 계획 문제를 푸는 방법
					- 근사화 방법 - SQP 2차 계획 문제[3]로 근사화 후 개선된 탐색점을 찾고, 그 점에서 다시 2차 계획 문제를 푸는 방법
전역 최적화 방법	Genetic Algorithms(GA), Simulated Annealing, etc.				

1) Penalty Function
제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수

2) 선형 계획 문제
(Linear Programming Problem)
목적함수: 1차 형식
제약조건: 1차 형식

3) 2차 계획 문제
(Quadratic Programming Problem)
목적함수: 2차 형식
제약조건: 1차 형식

4) Gradient 방법 중
함수의 1차 미분만을 고려하는 방법

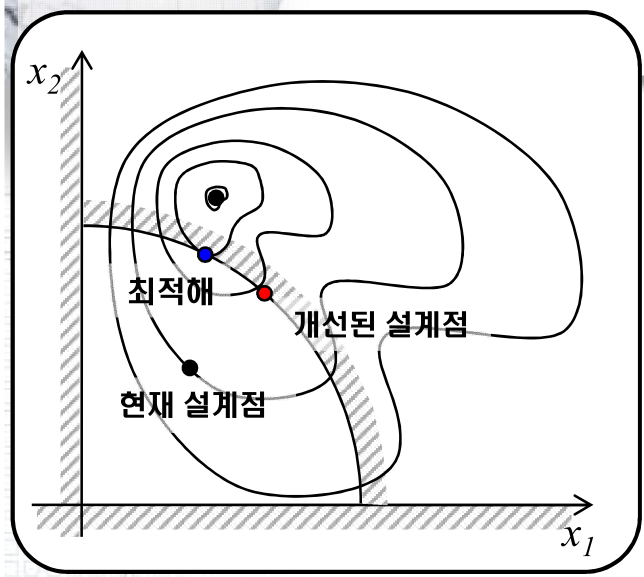
5) Gradient 방법 중
함수의 2차 미분까지 고려하는 방법

순차적 2차 계획법(SQP; Sequential Quadratic Programming)과 CSD(Constrained Steepest Descent) 방법

2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

- 순차적 2차 계획법(SQP; Sequential Quadratic Programming)
  - ① 현재의 설계점에서 주어진 목적 함수와 제약 조건을 2차 계획 문제*로 만든 후, 이를 해결하여 **탐색 방향**(search direction) $\mathbf{d}^{(k)}$를 구함
  - **② 제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수(강하 함수; Descent Function)**를 최소화하는 **최적의 이동 거리**(step size) α_k를 1차원 탐색 방법(예: 황금분할법)을 이용하여 찾아 더 나은 설계점을 구함
  - ③ 개선된 설계점에서 다시 ①로 되돌아감
  - 즉, 이차 계획 문제(Quadratic Programming) 문제를 연속적(Sequential)으로 풀어 최적해를 구하는 방법
- CSD(Constrained Steepest Descent) 방법
  - SQP의 일종이다.
  - 2차 계획 문제를 만들 때, 2차 미분 값에 해당하는 Hessian Matrix를 Identity Matrix로 가정한다.
  - Pshenichny의 강하 함수(Descent Function)를 사용한다.

CSD 알고리즘 요약

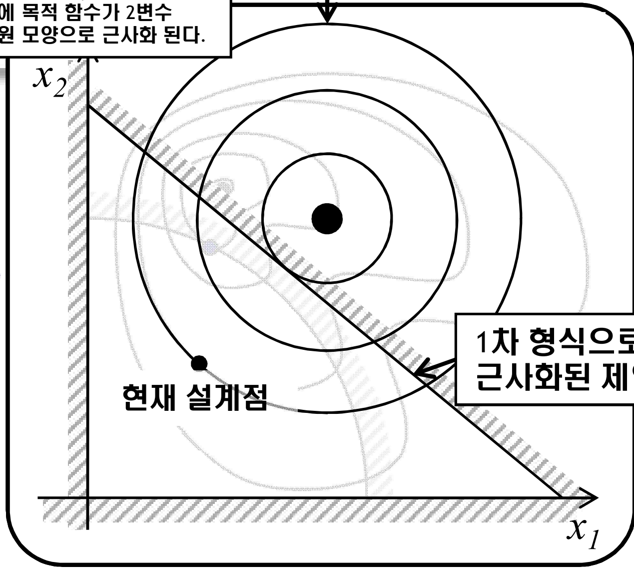


과정 1

현재 설계점에서 2차 계획 문제(QP)로 근사화 한다.

2차 형식으로 근사화된 목적 함수
CSD에서는 2차 미분 값에 해당하는 Hessian Matrix를 Identity Matrix로 가정하기 때문에 목적 함수가 2변수 함수라면 동심원 모양으로 근사화 된다.

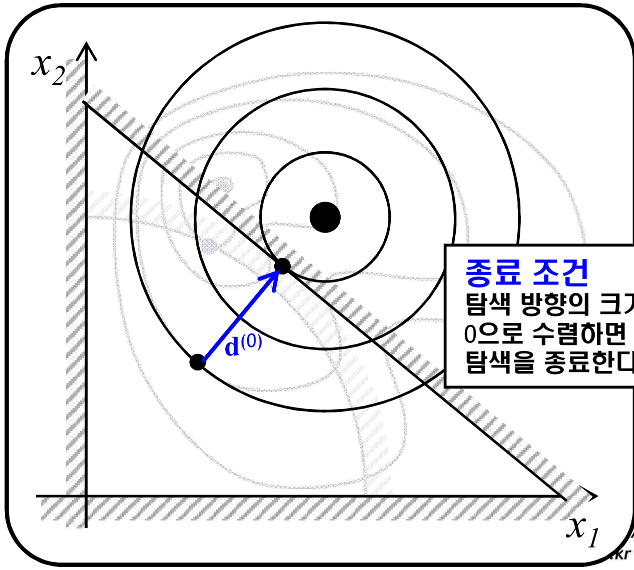
2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식



1차 형식으로 근사화된 제약 조건

과정 2

2차 계획 문제(QP)를 풀어서 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)을 찾는다.



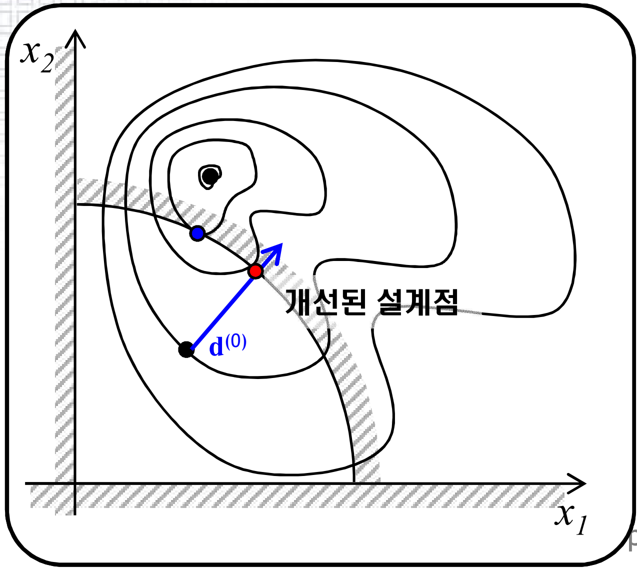
종료 조건
탐색 방향의 크기 $|\mathbf{d}^{(0)}|$가 0으로 수렴하면 탐색을 종료한다.

과정 3

Penalty Function을 정의한 후 탐색 방향으로 1차원 탐색을 수행하여 탐색 거리를 결정한다.

- Penalty Function:
제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수
(제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변경)

- 1차원 탐색의 예: 황금 분할법



개선된 설계점에서 부터 과정 1을 다시 수행한다.

[참고]목적 함수가 2변수 함수인 경우 Hessian Matrix를 Identity Matrix로 가정하면 동심원 모양으로 근사화되는 이유

2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

QP 문제의 정의(목적함수를 2차 형식으로 근사화 한다.)

탐색 방향($d^{(0)}$)을 결정하기 위하여 주어진 문제를
2차 계획 문제로 근사화 한다.

$$\textit{Minimize:} f(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}^{(0)}) \cong f(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} + 0.5\Delta\mathbf{x}^{(0)T}\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

Taylor 급수의 2차항까지 고려한 목적 함수

$$\textit{Minimize:} f(\mathbf{x}^{(0)}+\Delta\mathbf{x}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} + 0.5\Delta\mathbf{x}^{(0)T}\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla f^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \mathbf{I}$$

(CSD 방법에서는 Hessian Matrix를 Identity Matrix로 가정함)

$$\textit{Minimize:}\ f(\mathbf{x}^{(0)}+\mathbf{d}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^{(0)}} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} + 0.5(d_1^{(0)2} + d_2^{(0)2})$$

$$\bar{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}}_{\text{상수 } c_1\text{으로 치환}} d_1^{(0)} + \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_2}}_{\text{상수 } c_2\text{로 치환}} d_2^{(0)} + 0.5(d_1^{(0)2} + d_2^{(0)2})$$

$$\bar{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong \underline{c_1 d_1^{(0)} + c_2 d_2^{(0)} + 0.5(d_1^{(0)2} + d_2^{(0)2})}$$

원의 방정식과 같은 형태이다.

원의 방정식: $x_1^2 + x_2^2 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 = 0$

[복습] 1변수 함수의 최적성 조건
- 1계 필요 조건(1)

- 변수가 하나일 때, 극값을 가질 필요 조건 : $f'(x^*) = 0$

pf) 주어진 점 x^*에서 $f(x)$의 테일러 급수는 다음과 같다.

$$f(x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(x^*)}{dx^2}(x - x^*)^2 + R$$

나머지항(Remainder)
: x가 x^*에 충분히
가까우면 그 값이 매우 작음

$x - x^* = d$ 라고 놓으면

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)d + \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 + R$$

함수 값의 변화량 $f(x) - f(x^*) = \Delta f(x)$

$$\Delta f(x) = f'(x^*)d + \frac{1}{2} f''(x^*)d^2 + R$$

[복습] 2변수 함수의 테일러 전개(Taylor Series Expansion)(1)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$에 대한 점 (x_1^*, x_2^*)에서의 테일러 전개식

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*)^2\right) + R$$

각 항을 다시 표현하면

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*)^2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_2 - x_2^*) \;\middle|\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*)\right]\begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1 - x_1^* \;\middle|\; x_2 - x_2^*\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + R$$

$$\left(\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T,\ \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T,\ \boxed{\mathbf{H} \in M_{2\times 2}}\right)$$

2x2 Matrix의 원소

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(1)

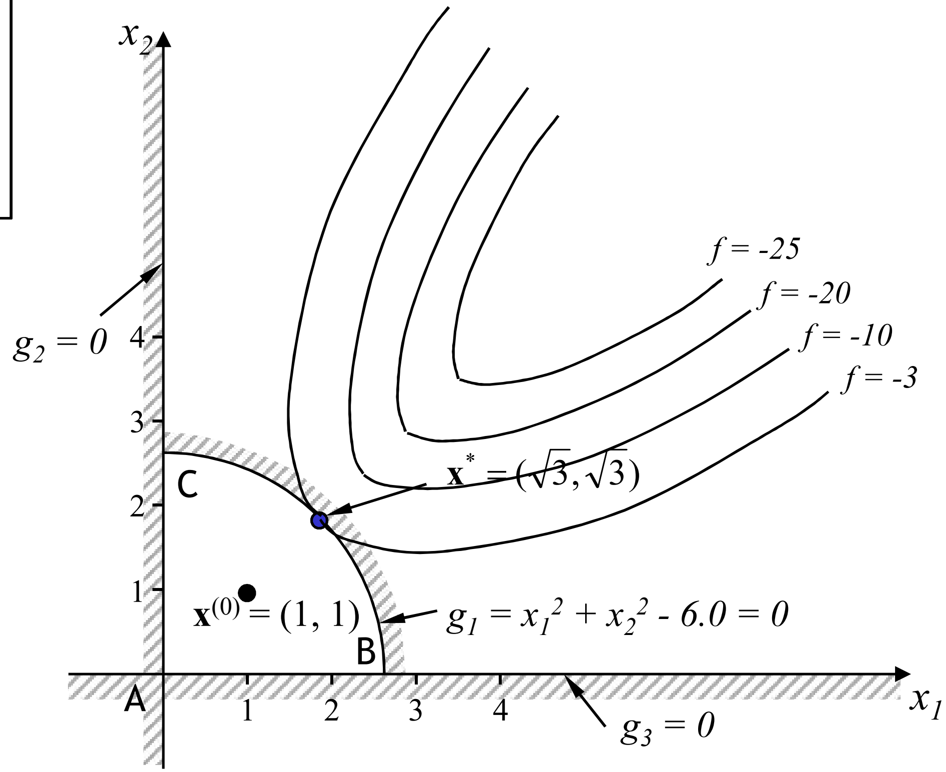
$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\sqrt{3}, \sqrt{3}), f(\mathbf{x}^*) = -3$



초기 시작점은 $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$ 이라 가정

(1) 반복 과정 1(k = 0)

(i) 단계 1: 목적 함수와 제약 조건 값의 계산

$$f(1,1) = -1$$

$g_1(1,1) = -\frac{2}{3} < 0$ ➡ 제약 조건 만족

$g_2(1,1) = -1 < 0$ ➡ 제약 조건 만족

$g_3(1,1) = -1 < 0$ ➡ 제약 조건 만족

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(2)

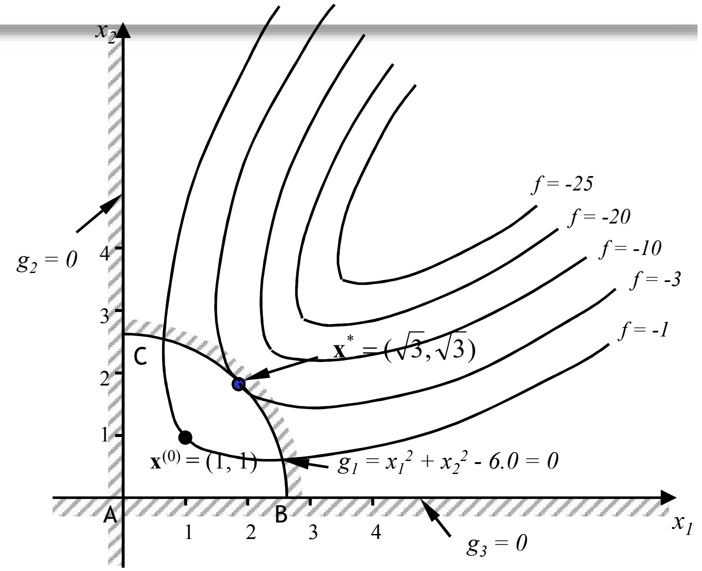
2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$



(1) 반복 과정 1(k = 0) $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$

(ii) 단계 2: QP 문제의 정의(목적함수를 2차 형식으로 근사화 한다.)

탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)을 결정하기 위하여 주어진 문제를 2차 계획 문제로 근사화 한다.

$$Minimize: f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \cong f(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} + 0.5\Delta\mathbf{x}^{(0)T}\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

Taylor 급수의 2차항까지 고려한 목적 함수

$$Minimize: f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} + 0.5\Delta\mathbf{x}^{(0)T}\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla f^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\right], \mathbf{H} = \mathbf{I}$ (CSD 방법에서는 Hessian Matrix를 Identity Matrix로 가정함)

$$Minimize: \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \left[2x_1 - 3x_2 \quad 2x_2 - 3x_1\right]_{\mathbf{x}^{(0)}} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} + 0.5(d_1^{(0)2} + d_2^{(0)2})$$

$$\bar{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong (2x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)})d_1^{(0)} + (2x_2^{(0)} - 3x_1^{(0)})d_2^{(0)} + 0.5(d_1^{(0)2} + d_2^{(0)2})$$

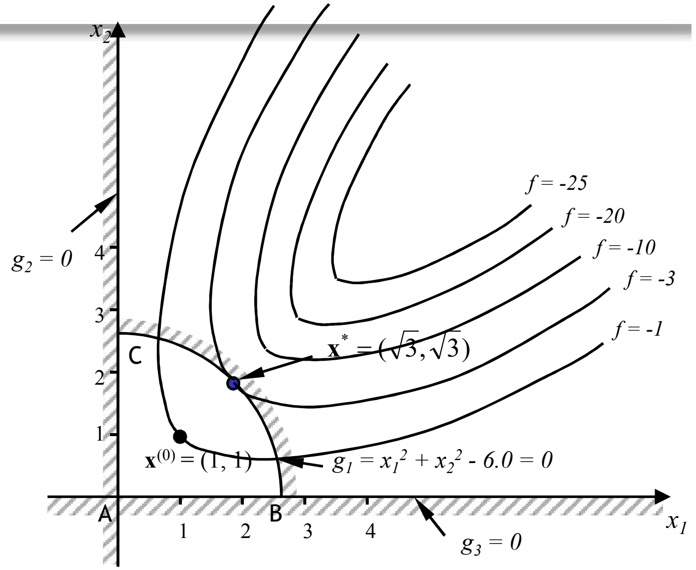
$$\bar{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong \underline{-d_1^{(0)} - d_2^{(0)}} + \underline{0.5(d_1^{(0)2} + d_2^{(0)2})}$$

1차항까지 근사화한 목적 함수

2차항까지 근사화한 목적 함수

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(3)

2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식



Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$

(1) **반복 과정** 1(k = 0) $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$

(ii) **단계** 3: QP **문제의 정의(제약조건을 선형화 한다.)**

탐색 방향(d⁽⁰⁾)을 결정하기 위하여 주어진 문제를 2차 계획 문제로 근사화 한다.

Subject to: $g_j(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \simeq \underline{g_j(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla g_j^{\,T}(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)}} \le 0;\ j = 1\ to\ m$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 제약조건

$g_j(\mathbf{x}^{(0)})$**를 이항하면**

$\nabla g_j^{\,T}(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} \le -g_j(\mathbf{x}^{(0)});\ j = 1\ to\ m$

$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla g_j^T = \left[\frac{\partial g_j}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g_j}{\partial x_2}\right], \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \overline{g}_j(\Delta\mathbf{x}^{(0)}) = \overline{g}_j(\mathbf{d}^{(0)})$

Subject to:

$$\overline{g}_1(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow \left[\tfrac{1}{3}x_1^{(0)} \quad \tfrac{1}{3}x_2^{(0)}\right]\begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}d_1^{(0)} + \tfrac{1}{3}d_2^{(0)} \le \frac{2}{3}$$

$$\overline{g}_2(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow -d_1^{(0)} \le 1$$

$$\overline{g}_3(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow -d_2^{(0)} \le 1$$

선형화 된 제약 조건

$g_1(1,1) = -\frac{2}{3}$

$g_2(1,1) = -1$

$g_3(1,1) = -1$

2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(4)

(iii) 단계 3: QP 문제의 풀이를 통한 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)의 결정

제약 최적화 문제 (근사화 하기 전)

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\text{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

①

$f(1,1) = -1, g_1(1,1) = -\frac{2}{3},$
$g_2(1,1) = -1, g_3(1,1) = -1$
$\nabla f = (-1,-1), \nabla g_1 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3}),$
$\nabla g_2 = (-1,0), \nabla g_3 = (0,-1)$

2차 계획 문제

$$\text{Minimize} \quad \bar{f} = (-d_1 - d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

$$\text{Subject to} \quad \tfrac{1}{3}d_1 + \tfrac{1}{3}d_2 \le \tfrac{2}{3}$$

$$-d_1 \le 1$$

$$-d_2 \le 1$$

여기서,
$d_1 = x_1 - 1, \; d_2 = x_2 - 1$

②

Lagrange 함수

$$L = (-d_1 - d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2) + u_1[\tfrac{1}{3}(d_1 + d_2 - 2) + s_1^2] + u_2(-d_1 - 1 + s_2^2) + u_3(-d_2 - 1 + s_3^2)$$

③

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = -1 + d_1 + \tfrac{1}{3}u_1 - u_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = -1 + d_2 + \tfrac{1}{3}u_1 - u_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \tfrac{1}{3}\left(d_1 + d_2 - 2\right) + s_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -d_1 - 1 + s_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = -d_2 - 1 + s_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i = 0, \; u \ge 0, \; i = 1,2,3$$

최적해를 구하면

$$\mathbf{u}^{(0)} = (u_1, u_2, u_3) = (0,0,0),$$

$$\mathbf{s}^{(0)} = (s_1, s_2, s_3) = (0, 1.414, 1.414),$$

$$\boxed{\mathbf{d}^{(0)} = (d_1, d_2) = (1,1)}$$

탐색 방향이 결정 되었음

*실제 프로그램에서는 Simplex 방법을 이용하여 최적해를 구함

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(5)

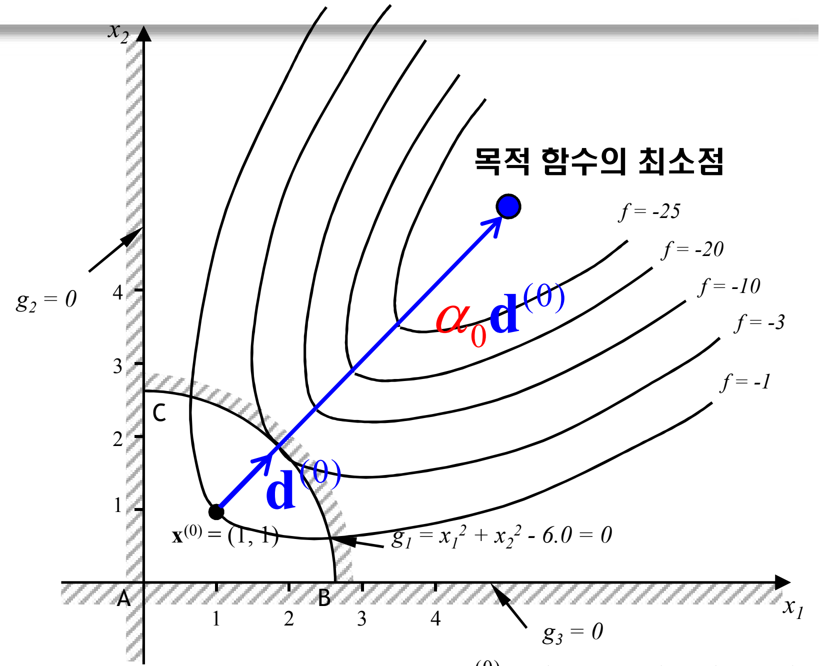
2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

$$\boxed{\mathbf{d}^{(0)} = (d_1, d_2) = (1,1)}$$ ← 탐색 방향이 결정 되었음

(iv)단계 4:탐색 방향($d^{(0)}$)이 결정되었으므로,
다음 방법을 통하여 최적의 이동거리를 구한다.

탐색 방향으로 목적 함수를 최소화하는 최적의 이동 거리

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(1)}}_{\text{개선된 설계점}} = \underbrace{\mathbf{x}^{(0)}}_{\text{현재의 설계점}} + \alpha_0 \underbrace{\mathbf{d}^{(0)}}_{\text{2차 계획 문제로부터 구한 탐색 방향}}$$



$\mathbf{u}^{(0)} = (u_1, u_2, u_3) = (0,0,0),$
$\mathbf{d}^{(0)} = (d_1, d_2) = (1,1)$

Find α_k : *Minimize* $f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0 \mathbf{d}^{(0)}\right) = f\left(\alpha_0\right)$

Find: α_0

주어진 목적 함수: f

Given: $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{d}^{(0)}$

탐색 방향($d^{(0)}$)이 정해졌고, 이 방향으로 목적함수 값을 최소로 하는 이동거리를 구하면 개선된 설계점이 제약조건을 위배한다.

따라서 제약조건 위배 값을 Penalty로 부가하여, 목적 함수 값에 더한다. (Penalty Function)

제약조건을 위배하면 목적 함수 값이 커지므로,
제약조건을 위배하지 않는 범위에서 목적 함수 값이 최소가 되는 점을 찾을 수 있다.

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(6)

$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$

새로운 목적함수의 정의 (Pshenichny의 강하 함수)

제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수를 이용하여 제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환.

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k)})$$ (k는 QP로 근사화하는 과정의 반복 회수이다.)

$V(\mathbf{x}^{(k)})$는 최대 제약 조건 위배 값이다.

$V(\mathbf{x}^{(k)})$는 0보다 크거나 같은 값으로 제약 조건을 모두 만족하면 이 값은 0이다.

$$V(\mathbf{x}^{(k)}) = \max\{0; |h_1|, |h_2|, \cdots, |h_p|; g_1, g_2, \cdots, g_m\}$$ ➡ 모든 제약 조건을 만족하면 이 값은 0

R_k은 양의 상수로서 벌칙 매개 변수이다.(Penalty Parameter, 초기에 사용자에 의해 명시됨).

$$R_k = \max\left\{R_0,\ \underline{r_k} \left(= \sum_{i=1}^{p} \left|v_i^{(k)}\right| + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)}\right)\right\}$$

모든 Lagrange multiplier의 합

(v) 단계 5: 벌칙 매개 변수 R_k의 계산 (본 예제에서는 초기값으로 R_0=10을 가정한다.)

$\mathbf{u}^{(0)} = (u_1, u_2, u_3) = (0,0,0)$ 이고 $r_k = \sum_{i=1}^{p} \left|v_i^{(k)}\right| + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)}$ 로부터 $r_0 = \sum_{i=1}^{m} u_i^{(0)} = 0$

따라서 $R_0 = \max\{R_0, r_0\} = \max\{10, 0\} = 10$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) &= f(\mathbf{x}^{(k)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k)}) \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k)}),\quad V(\mathbf{x}^{(k)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\},\ (k=0)\end{aligned}$$

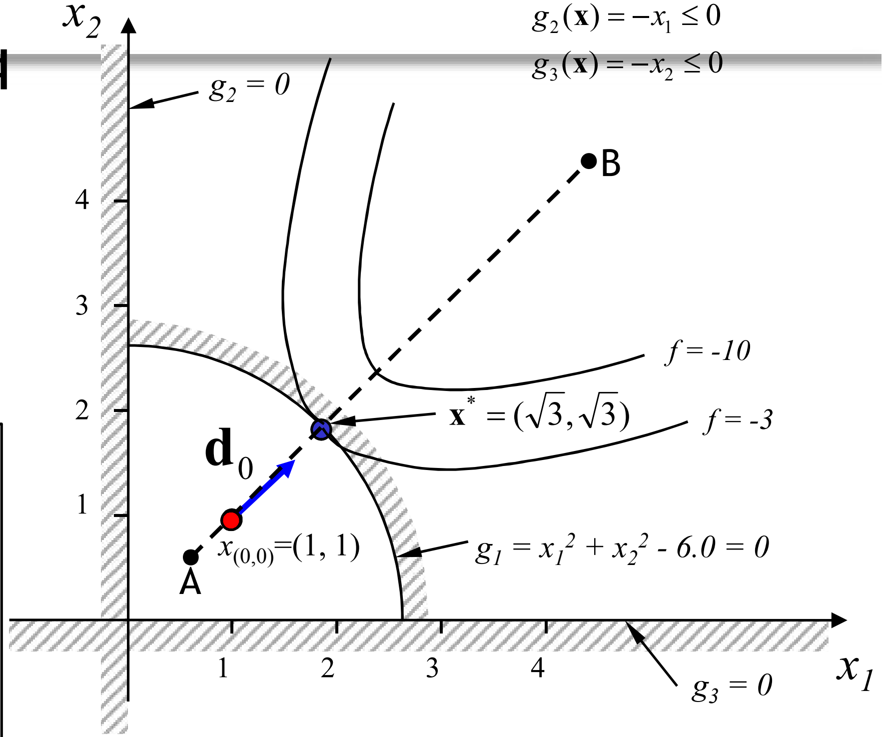
CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(7)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($d^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$V(\mathbf{x}^{(k)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}\ ,(k=0)$$

- CSD 알고리즘의 k번째 반복 과정 내에서 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 통하여 α_k 를 결정한다.
- 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)역시 여러 번 반복하여 적용 한다.
- 따라서 CSD 알고리즘의 반복 횟수를 k로, 1차원 탐색법(황금 분할법) 내의 반복 횟수를 j로 정하고 다음과 같이 표기 한다.



CSD 알고리즘의 k번째 반복 과정 내에서 1차원 탐색법의 반복 횟수 j표기

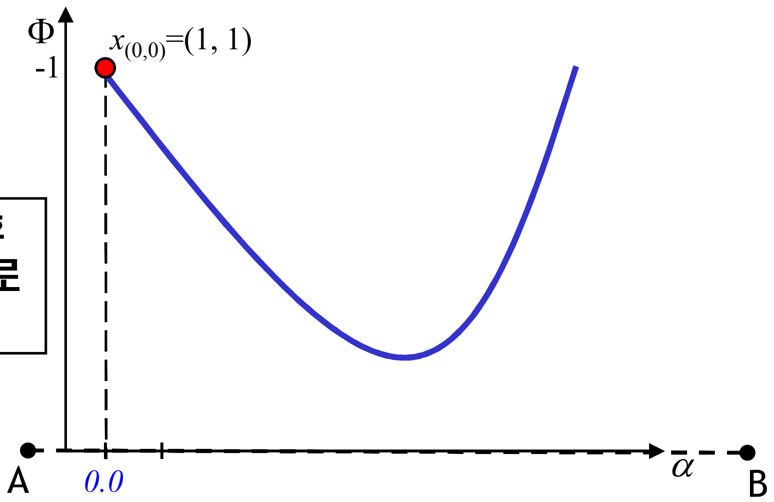
$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \underline{\mathbf{x}^{(k)}} + \alpha_{(k,j)}\underline{\mathbf{d}^{(k)}}$$

1차원 탐색 내에서는 변경되지 않음

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(k,j)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(k,j)}\right) + \underline{R_k} \cdot V\left(\mathbf{x}^{(k,j)}\right)$$

1차원 탐색 내에서는 변경되지 않음

⇨ 1차원 탐색이 끝난 후 마지막 $\mathbf{x}^{(k,j)}$ 가 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 로 변경 된다.



CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(7)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k=0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ⇨ CSD 알고리즘의 k번째 반복 과정 황금 분할 내의 j번째 반복 과정

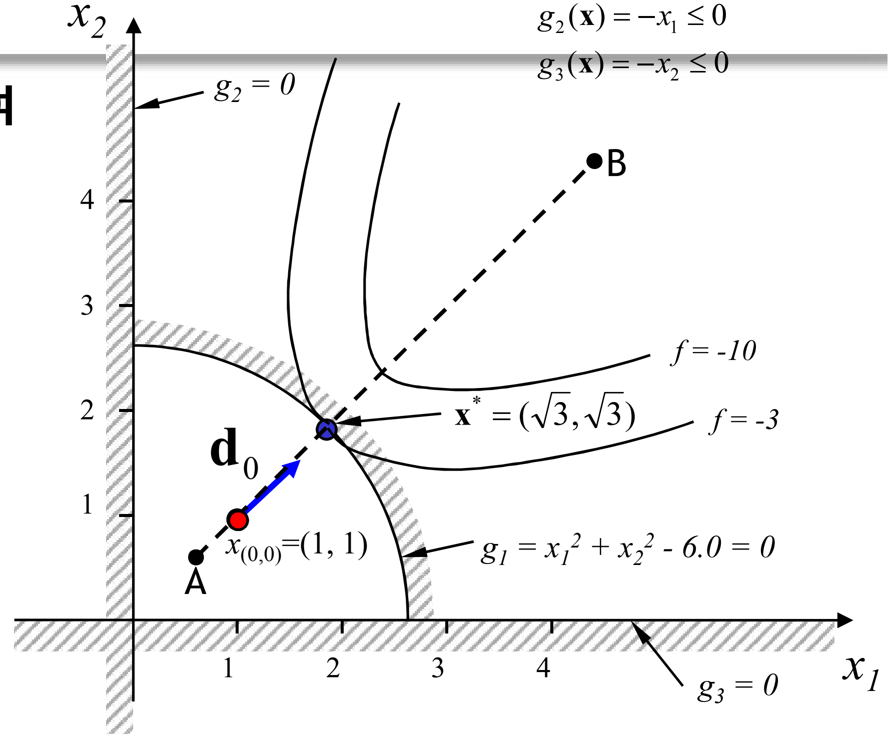
탐색방향 : $\mathbf{d}_0 = (1,1), \quad k = 0, \ j = 0$

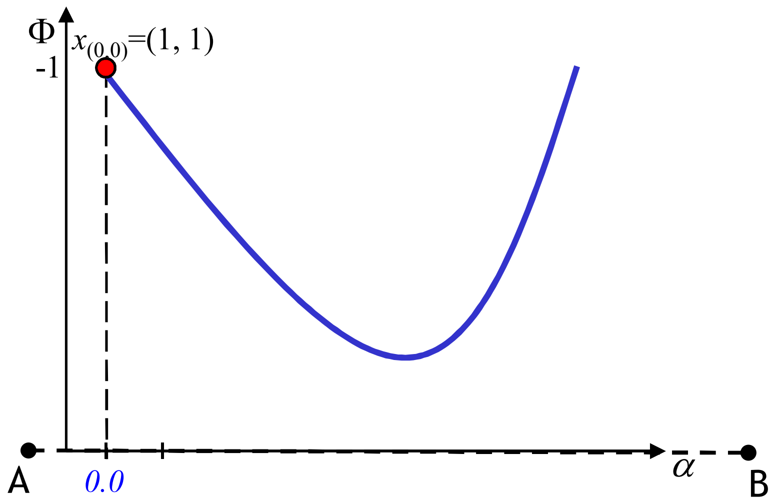
$\alpha_{(0,j)} = 0.0$ **일때**

$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 0 \cdot (1,1) = (1,1)$$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -1 + 10 \times 0 = -1$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,j)}) = \max\{0, g_1(\mathbf{x}^{(0,j)}), g_2(\mathbf{x}^{(0,j)}), g_3(\mathbf{x}^{(0,j)})\}$$
$$= \max\{0, -\tfrac{2}{3}, -1, -1\} = 0$$





CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(8)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$

$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k=0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ⇨ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
황금 분할 내의 j번째 반복 과정

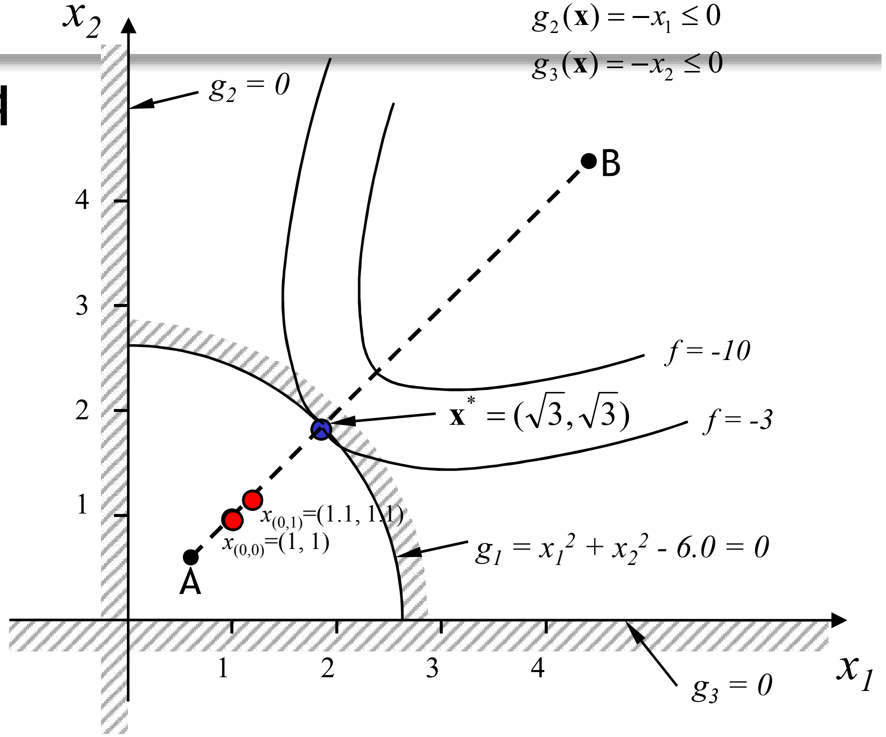
탐색방향 : $\mathbf{d}_0 = (1,1)$ $\quad k = 0,\ j = 1$

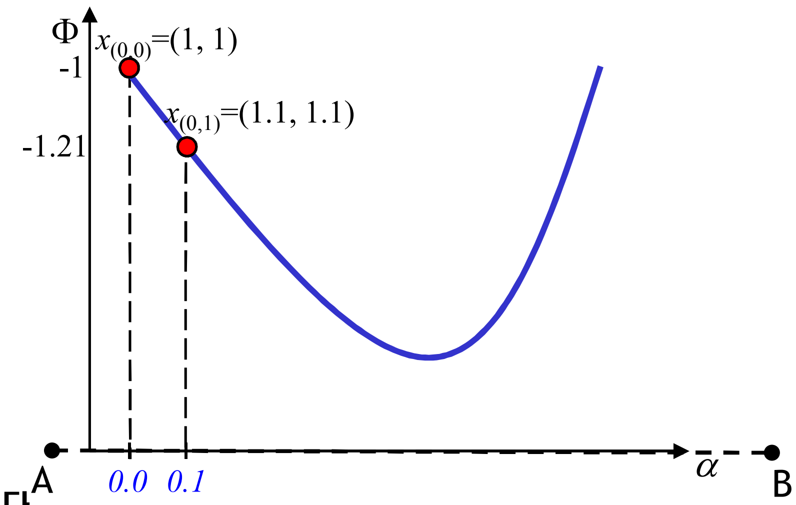
$\alpha_{(0,j)} = 0.1$ **로 가정하면***,

$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 0.1 \cdot (1,1) = (1.1, 1.1)$$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -1.21 + 10 \times 0 = -1.21$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,j)}) = \max\{0, g_1(\mathbf{x}^{(0,j)}), g_2(\mathbf{x}^{(0,j)}), g_3(\mathbf{x}^{(0,j)})\}$$
$$= \max\{0, -0.57, -1.1, -1.1\} = 0$$





* $\alpha_{(k,j)}$ 의 초기 값 0.1은 사용자가 정의한 값이며, 다른 값(예: 0.5)으로 가정할 수 있다.

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(9)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

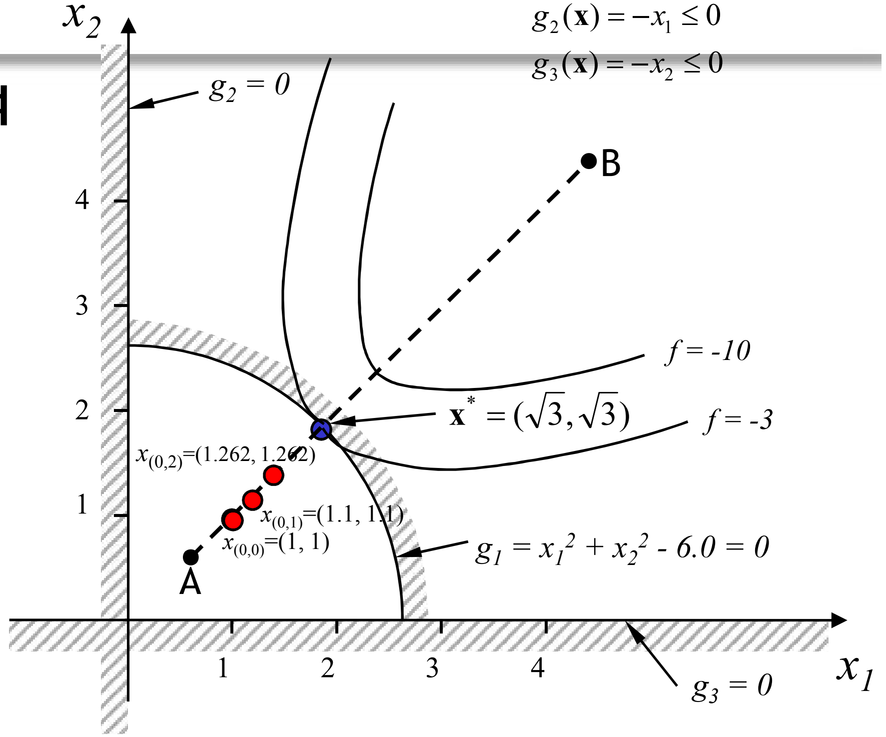
(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k=0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ➡ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
황금 분할 내의 j번째 반복 과정

탐색방향 : $\mathbf{d}_0 = (1,1) \qquad k = 0,\ j = 2$

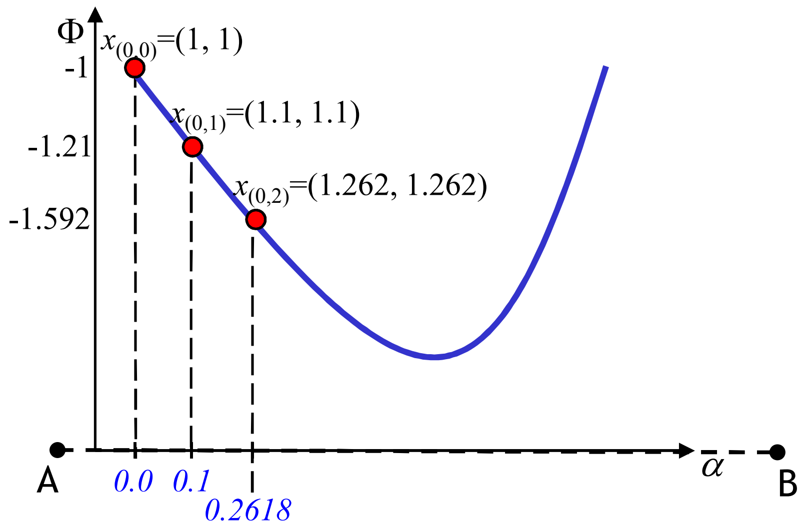


$$\alpha_{(0,j)} = 0.1 + 1.618(0.1) = 0.2618 \text{ 일 때}$$

$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 0.262 \cdot (1,1) = (1.262, 1.262)$$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -1.592 + 10 \times 0 = -1.592$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,2)}) = \max\{0, g_1(\mathbf{x}^{(0,2)}), g_2(\mathbf{x}^{(0,2)}), g_3(\mathbf{x}^{(0,2)})\}$$
$$= \max\{0, -0.469, -1.262, -1.262\} = 0$$



CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(10)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

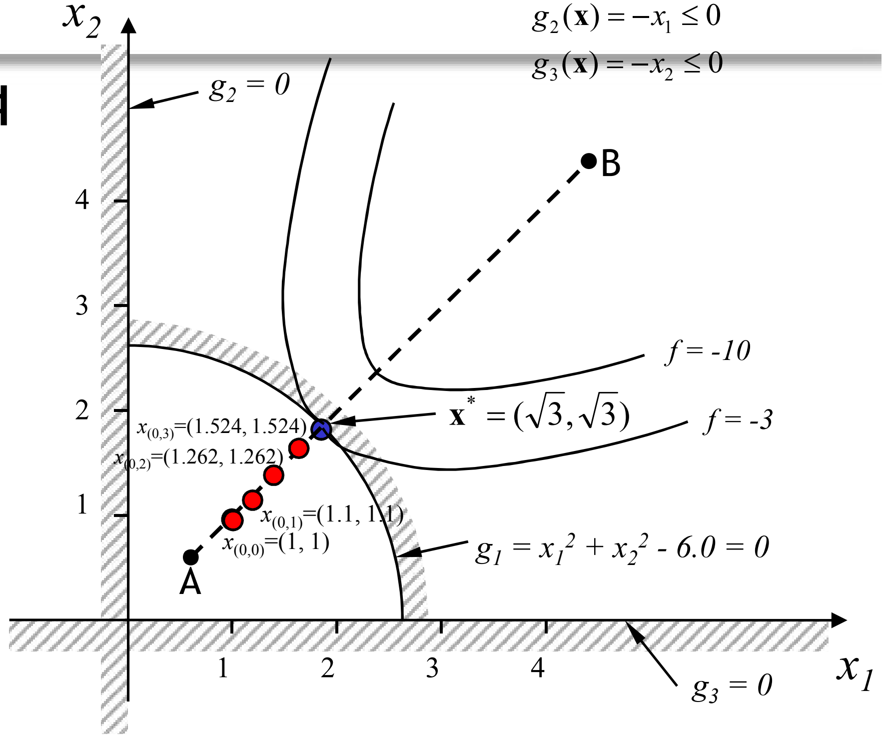
(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($d^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\} \text{ ,(}k\text{=0)}$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ⇨ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
황금 분할 내의 j번째 반복 과정

탐색방향 : $\mathbf{d}_0 = (1,1) \qquad k=0,\ j=3$

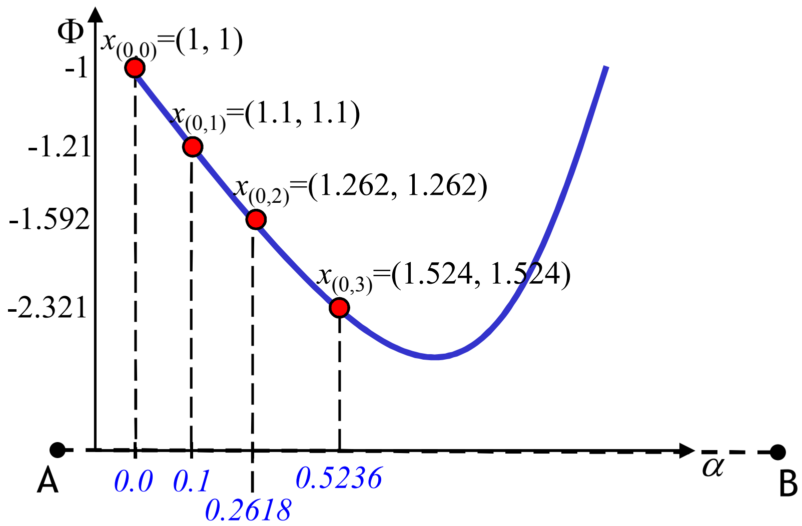


$\alpha_{(0,j)} = 0.1 + 1.618(0.1) + 1.618^2(0.1) = 0.5236$ 일 때

$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 0.524 \cdot (1,1) = (1.524, 1.524)$$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -2.321 + 10 \times 0 = -2.321$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,j)}) = \max\{0, g_1(\mathbf{x}^{(0,j)}), g_2(\mathbf{x}^{(0,j)}), g_3(\mathbf{x}^{(0,j)})\}$$
$$= \max\{0, -0.226, -1.524, -1.524\} = 0$$



CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(11)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k{=}0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ⇨ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
황금 분할 내의 j번째 반복 과정

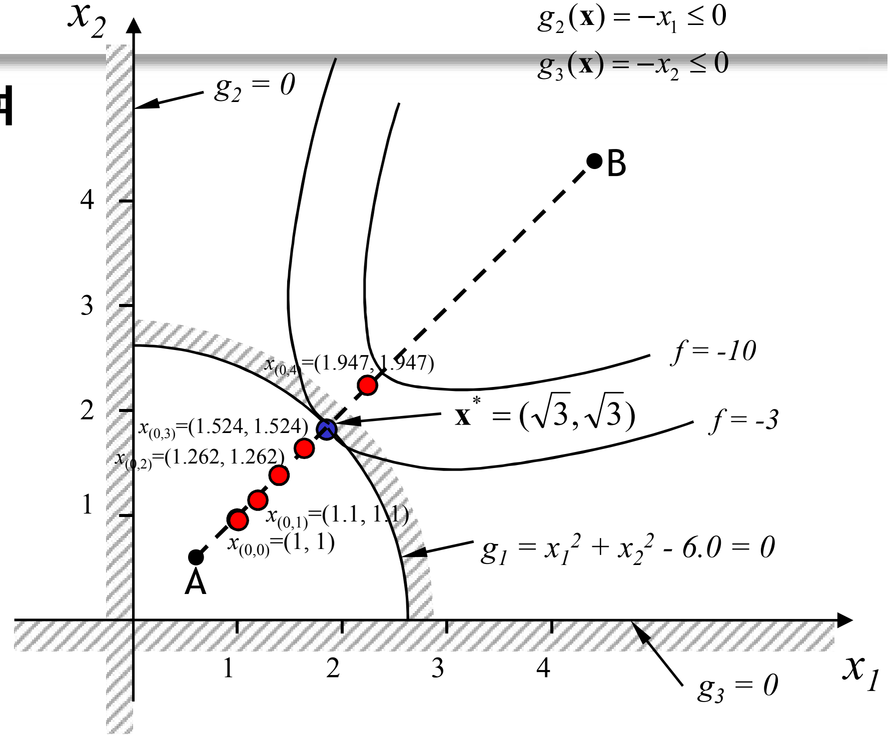
탐색방향 : $\mathbf{d}_0 = (1,1) \qquad k = 0,\ j = 4$

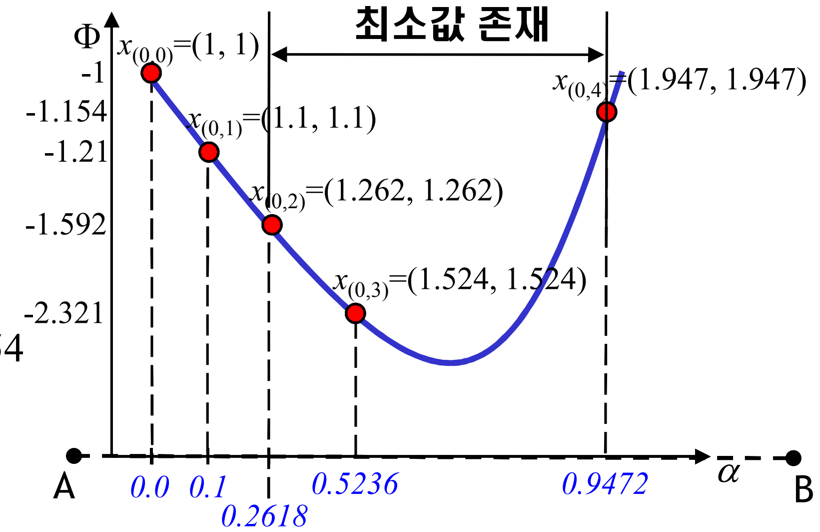
$$\alpha_{(0,j)} = 0.1 + 1.618(0.1) + 1.618^2(0.1) + 1.618^3(0.1) = 0.9472$$ 일 때

$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 0.947 \cdot (1,1) = (1.947, 1.947)$$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -3.792 + 10 \times 0.2638 = -1.154$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,4)}) = \max\{0, g_1(\mathbf{x}^{(0,4)}), g_2(\mathbf{x}^{(0,4)}), g_3(\mathbf{x}^{(0,4)})\}$$
$$= \max\{0, 0.2638, -1.947, -1.947\} = 0.2638$$





CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(12)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

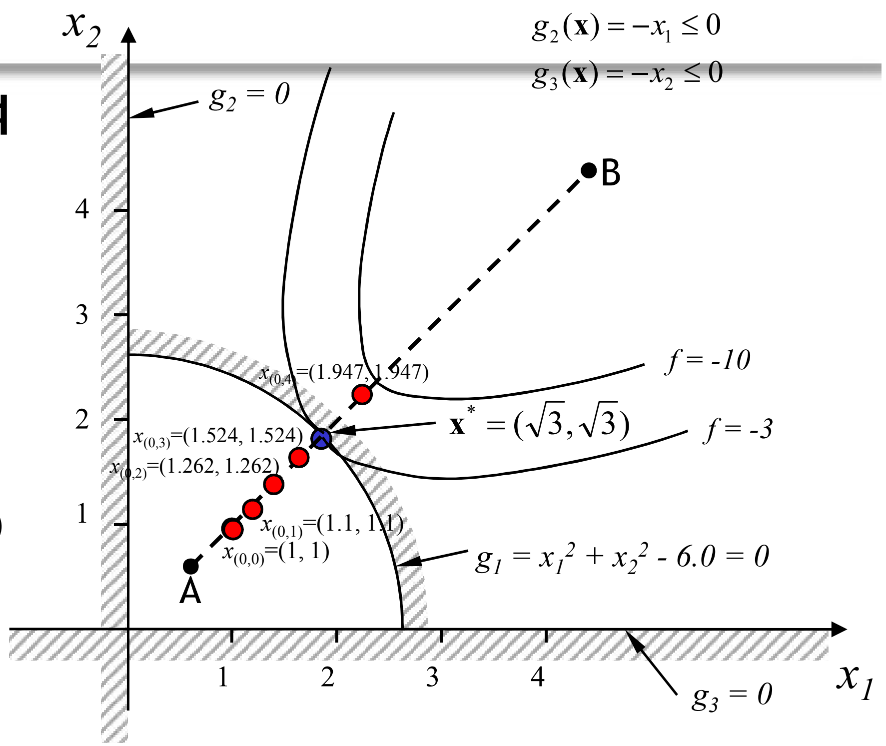
두 점 $\mathbf{x}^{(0,2)}, \mathbf{x}^{(0,4)}$ 사이를 황금 분할법을 이용하여

강하 함수 값이 최소가 되는 α_0 를 찾으면

$\alpha_0 = 0.732$ 가 된다.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0 \cdot \mathbf{d}^{(0)} = (1,1) + 0.732 \cdot (1,1) = (1.732, 1.732)$$

$$f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = f\left(1.732, 1.732\right) = -3$$



0. 개선된 설계점을 찾았으므로,

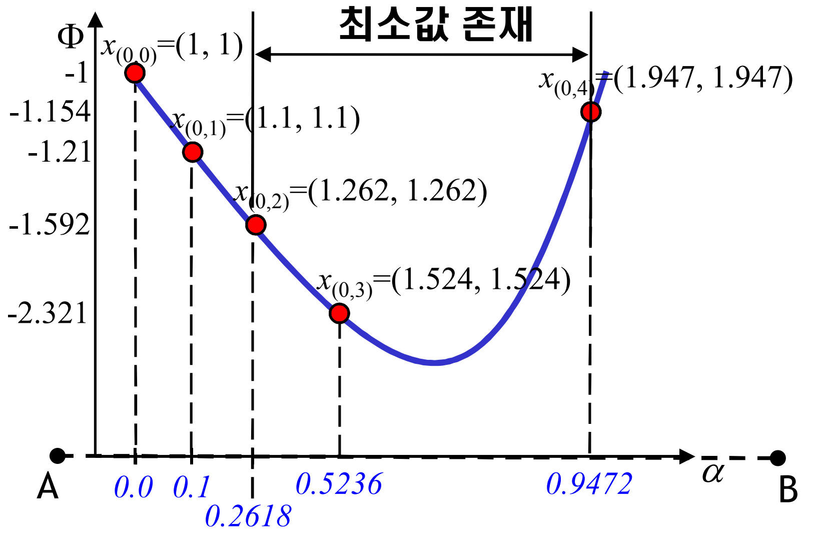
1. 다시 개선된 설계점에서 주어진 문제를 2차 계획 문제로 근사화하고,

2. 2차 계획 문제를 풀어서 탐색 방향(d)를 정한 뒤,

3. Penalty Function과 황금분할법을 이용하여 탐색 거리 α 를 결정한 후,

4. 개선된 설계점을 찾는다.

(중지 조건: 단, 탐색 방향 d의 크기가 ε 보다 작으면 탐색을 중지 한다.)



CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(9)

(2) 반복 과정 2(k = 1)

(ii) 단계 2: 최대 위배 제약 조건 값의 계산

이전 단계로부터

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1.732, 1.732)$$

$$f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = f\left(1.732, 1.732\right) = -2.999824$$

$$g_1\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = g_1\left(1.732, 1.732\right) = -5.866 \times 10^{-5}$$ ➡ 제약 조건 만족

$$g_2\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = -1.732$$ ➡ 제약 조건 만족

$$g_3\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = -1.732$$ ➡ 제약 조건 만족

$$V_1 = V\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \max\{0; -5.866 \times 10^{-5}, -1.732, -1.732\} = 0$$

한편,

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(1)}) = (2x_1 - 3x_2, 2x_2 - 3x_1) = (-1.732, -1.732)$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}^{(1)}) = (\tfrac{1}{3}x_1, \tfrac{1}{3}x_2) = (0.577, 0.577), \nabla g_2 = (-1, 0), \nabla g_3 = (0, -1)$$

Minimize $\quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $\quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$\quad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$\quad g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(10)

2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

(iii) 단계 3: QP 문제의 풀이를 통한 탐색 방향($\mathbf{d}^{(1)}$)의 결정

제약 최적화 문제 (근사화 하기 전)

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$f(1.732,1.732) = -3, \nabla f = (-1.732,-1.732)$

$g_1(1.732,1.732) = -5.866\times10^{-5}, \nabla g_1 = (0.577,0.577)$

$g_2(1.732,1.732) = -1.732, \nabla g_2 = (-1,0)$

$g_3(1.732,1.732) = -1.732, \nabla g_3 = (0,-1)$

① ⇒

2차 계획 문제

Minimize $\bar{f} = (-1.732d_1 - 1.732d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$

Subject to $0.577d_1 + 0.577d_2 \le 5.866\times10^{-5}$

$-d_1 \le 1.732$

$-d_2 \le 1.732$

여기서,

$d_1 = x_1 - 1.732,$

$d_2 = x_2 - 1.732$

②

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{0}$

Lagrange 함수

$$L = (-1.732d_1 - 1.732d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2) + u_1[0.577(d_1+d_2) - 5.866\times10^{-5} + s_1^2] + u_2(-d_1 - 1.732 + s_2^2) + u_3(-d_2 - 1.732 + s_3^2)$$

③ ⇒

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = -1.732 + d_1 + 0.577u_1 - u_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = -1.732 + d_2 + 0.577u_1 - u_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 0.577\left(d_1 + d_2\right) - 5.866\times10^{-6} + s_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -d_1 - 1.732 + s_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = -d_2 - 1.732 + s_3^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i = 0,\ u \ge 0,\ i = 1,2,3$$

최적해를 구하면

$$\mathbf{d}^{(1)} = (d_1, d_2) = (5.081\times10^{-5}, 5.081\times10^{-5})$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = (u_1, u_2, u_3) = (3,0,0)$$

$$\mathbf{s}^{(1)} = (s_1, s_2, s_3) = (0,1.316,1.316)$$

CSD(Constrained Steepest Descent) 방법을 이용한 풀이 예(11)

2차 계획 문제의 정의
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

(iv) 단계 4: 수렴 기준의 검토

$$\mathbf{d}^{(1)} = (d_1, d_2) = (5.081\times10^{-5},\quad 5.081\times10^{-5})$$

$$\left\|\mathbf{d}^{(1)}\right\| = \sqrt{\left(5.081\times10^{-5}\right)^2 + \left(5.081\times10^{-5}\right)^2} = 7.186\times10^{-5} < \varepsilon_2 (= 0.001)$$ 이므로 수렴 기준을 만족

(iv) 단계 5: 종료

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\sqrt{3}, \sqrt{3}), f(\mathbf{x}^*) = -3$

이때 Lagrange multiplier는

$$\mathbf{u}^* = (3, 0, 0),\ \mathbf{s}^* = (0, 1.316, 1.316)$$

[요약] CSD(Constrained Steepest Descent) 방법에서의 Pshenichny의 강하 함수

최적화 문제

Minimize $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Subject to $h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,p$ 등호 제약 조건

$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$ 부등호 제약 조건

Pshenichny의 강하 함수 제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k)})$$ (k는 QP로 근사화하는 과정의 반복 회수이다.)

$V(\mathbf{x}^{(k)})$는 최대 제약 조건 위배 값이다.

$V(\mathbf{x}^{(k)})$는 0보다 크거나 같은 값으로 제약 조건을 모두 만족하면 이 값은 0이다.

$$V(\mathbf{x}^{(k)}) = \max\{0; |h_1|, |h_2|, \cdots, |h_p|; g_1, g_2, \cdots, g_m\}$$ ➡ 모든 제약 조건을 만족하면 이 값은 0

R_k은 양의 상수로서 벌칙 매개 변수이다.(Penalty Parameter, 초기에 사용자에 의해 명시됨).

$$R_k = \max\left\{R_0,\ r_k\left(= \sum_{i=1}^{p}\left|v_i^{(k)}\right| + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)}\right)\right\}$$

모든 Lagrange multiplier의 합

새로운 해의 결정

현재의 설계점보다 강하 함수의 값을 더 감소시키는 새로운 설계점을 다음과 같이 결정

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(k+1)}}_{\text{개선된 설계점}} = \underbrace{\mathbf{x}^{(k)}}_{\text{현재의 설계점}} + \alpha_k \cdot \mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{d}^{(k)}$: 2차 계획 문제로부터 구한 탐색 방향

α_k: 1차원 탐색법(예: 황금 분할법)을 이용하여 계산한 이동 거리(Step Size)

[참고]CSD(Constrained Steepest Descent) 방법에서 황금 분할 대신 Descent Condition을 사용(1/4)

$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$

$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k=0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ⇨ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
Descent Condition 방법 내의 j번째 반복 과정

$\mathbf{d}_0 = (1,1) \quad \mathbf{x}^{(0,0)} = (1,1),$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(1,j)}\right) = \Phi\left(\mathbf{x}^{(0)} + t_{(0,j)}\mathbf{d}^{(0)}\right) = \boxed{\Phi\left(t_{(0,j)}\right)}$$

$\boxed{\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,0)}\right) - t_{(0,j)}\beta_k}$ 단, $\beta_k = \gamma\left\|\mathbf{d}^{(k)}\right\|^2, (\gamma = 0.5,$ 사용자 정의 값$)$

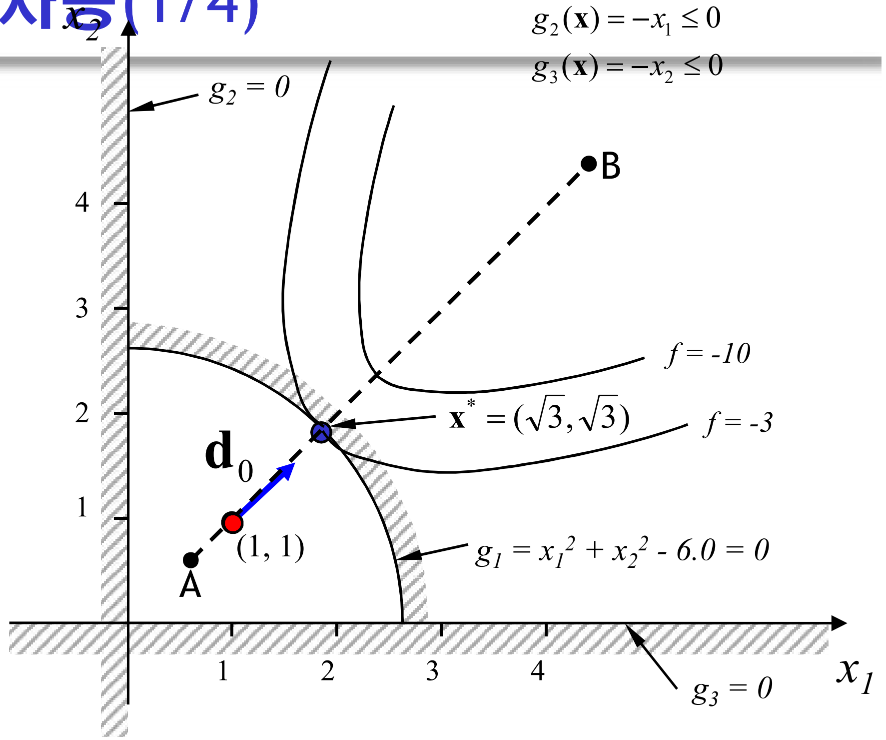
t값을 1부터 반으로 줄이면서 다음 식을 만족하는 점을 찾는다.

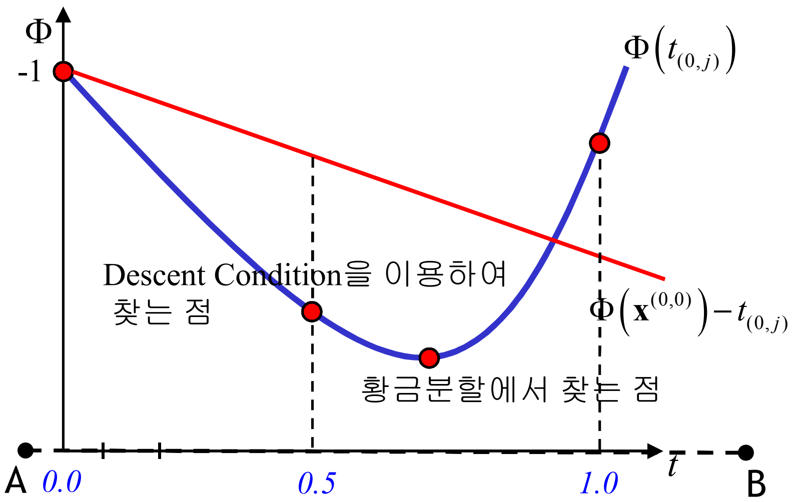
$$\boxed{\Phi\left(t_{(0,j)}\right)} \le \boxed{\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,0)}\right) - t_{(0,j)}\beta_k}$$

$\Phi\left(t_{(0,j)}\right) \le -1 - t_{(0,j)}$ where, $\beta_k = \gamma\left\|\mathbf{d}^{(k)}\right\|^2 = 0.5(1^2 + 1^2) = 1$

$$\Phi\left(\mathbf{x}^{(0,0)}\right) = f\left(\mathbf{x}^{(0,0)}\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,0)}\right) = -1 + 10 \times 0 = -1$$

$$V(\mathbf{x}^{(0,0)}) = \max\{0, -\tfrac{2}{3}, -1, -1\} = 0$$





[참고]CSD(Constrained Steepest Descent) 방법에서 황금 분할 대신 Descent Condition을 사용(2/4)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($d^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$
$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k=0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ⇨ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
Descent Condition 내의 j번째 반복 과정

t값을 1부터 반으로 줄이면서 다음 식을 만족하는 점을 찾는다.

$$\Phi\left(t_{(0,j)}\right) \le -1 - t_{(0,j)} \qquad k = 0,\ j = 0$$

$t_{(0,j)} = 1$ 일때

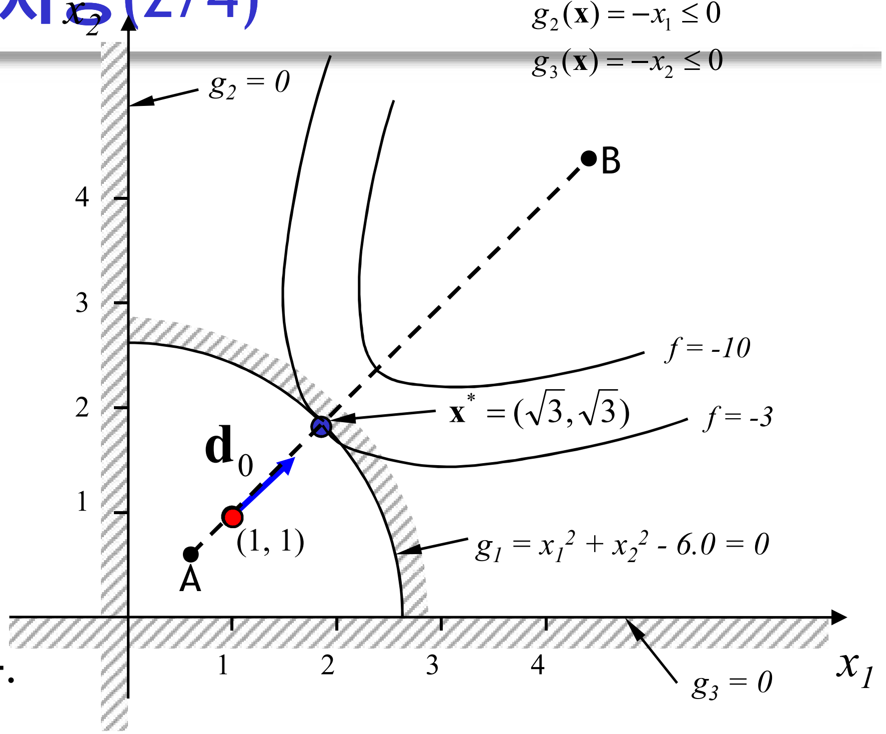
$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + t_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 1 \cdot (1,1) = (2,2)$$

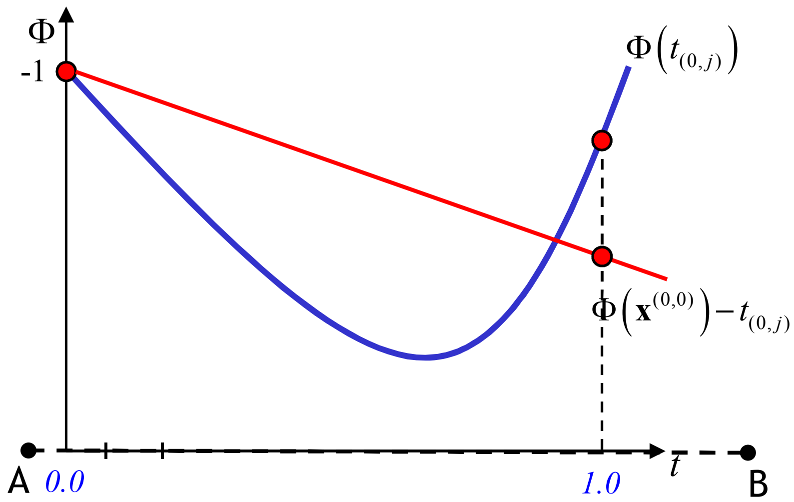
$$\Phi\left(t_{(0,j)}\right) = f(2,2) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -4 + 10 \times 0.333 = -0.667$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,j)}) = \max\{0, \tfrac{1}{3}, -2, -2\} = 0.333$$

$$-1 - t_{(0,j)} = -1 - 1 = -2$$

조건 $\Phi\left(t_{(0,j)}\right) \le -1 - t_{(0,j)}$ 를 만족하지 않으므로 t를 0.5로 줄임





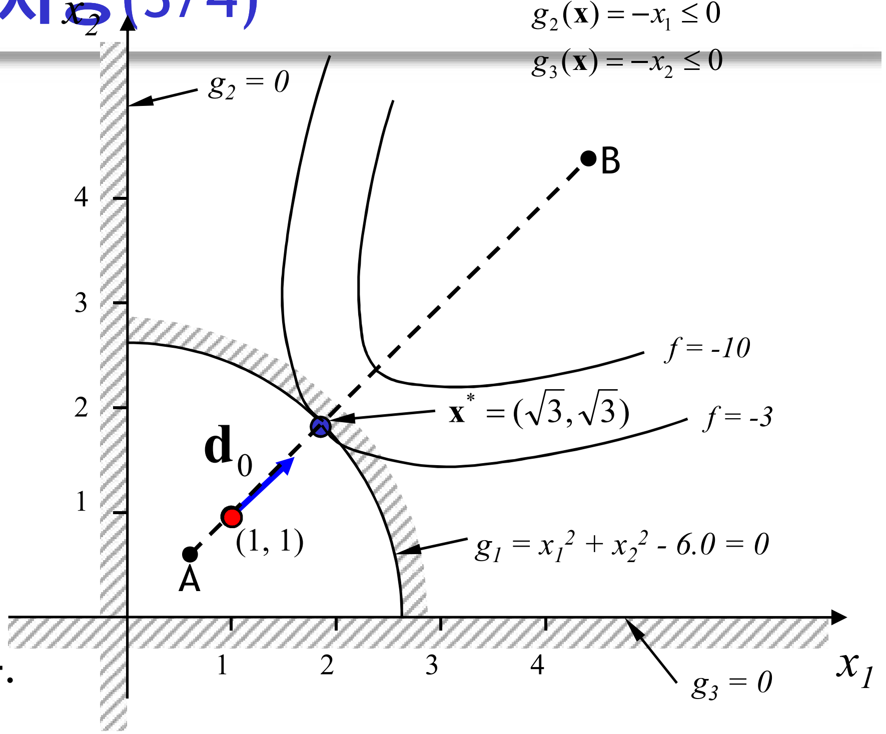
[참고]CSD(Constrained Steepest Descent) 방법에서 황금 분할 대신 Descent Condition을 사용(3/4)

$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$



(vi) 단계 6: 1차원 탐색법(황금 분할법)을 이용하여 탐색 방향($d^{(0)}$)으로 강하 함수를 최소화 하는 개선된 설계점 계산

$$\Phi(\mathbf{x}^{(k,j)}) = f(\mathbf{x}^{(k,j)}) + R_k \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 10 \cdot V(\mathbf{x}^{(k,j)})$$

$$V(\mathbf{x}^{(k,j)}) = \max\{0, g_1, g_2, g_3\}, (k=0)$$

$$\mathbf{x}^{(k,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_{(k,j)}\mathbf{d}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k,j)}$ ➡ CSD 전체 과정의 k번째 반복 과정
Descent Condition 내의 j번째 반복 과정

t값을 1부터 반으로 줄이면서 다음 식을 만족하는 점을 찾는다.

$$-2.25 = \Phi\left(t_{(0,j)}\right) \le -1 - t_{(0,j)} = -1.5 \qquad k = 0,\ j = 1$$

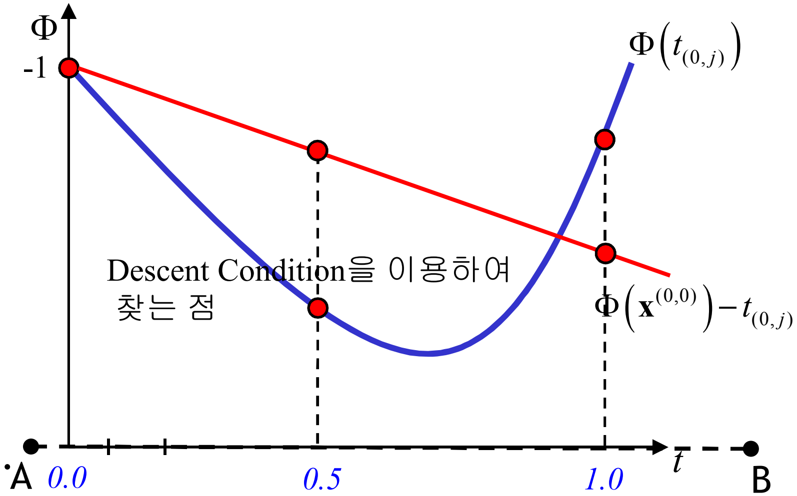
$t_{(0,j)} = 0.5$일때

$$\mathbf{x}^{(0,j)} = \mathbf{x}^{(0)} + t_{(0,j)} \cdot d^{(0)} = (1,1) + 0.5 \cdot (1,1) = (1.5, 1.5)$$

$$\Phi\left(t_{(0,j)}\right) = f\left(1.5, 1.5\right) + R_0 \cdot V\left(\mathbf{x}^{(0,j)}\right) = -2.25 + 10 \times 0 = -2.25$$

$$where,\ V(\mathbf{x}^{(0,j)}) = \max\{0, -\tfrac{2}{8}, -1.5, -1.5\} = 0$$

$$-1 - t_{(0,j)} = -1 - 0.5 = -1.5$$



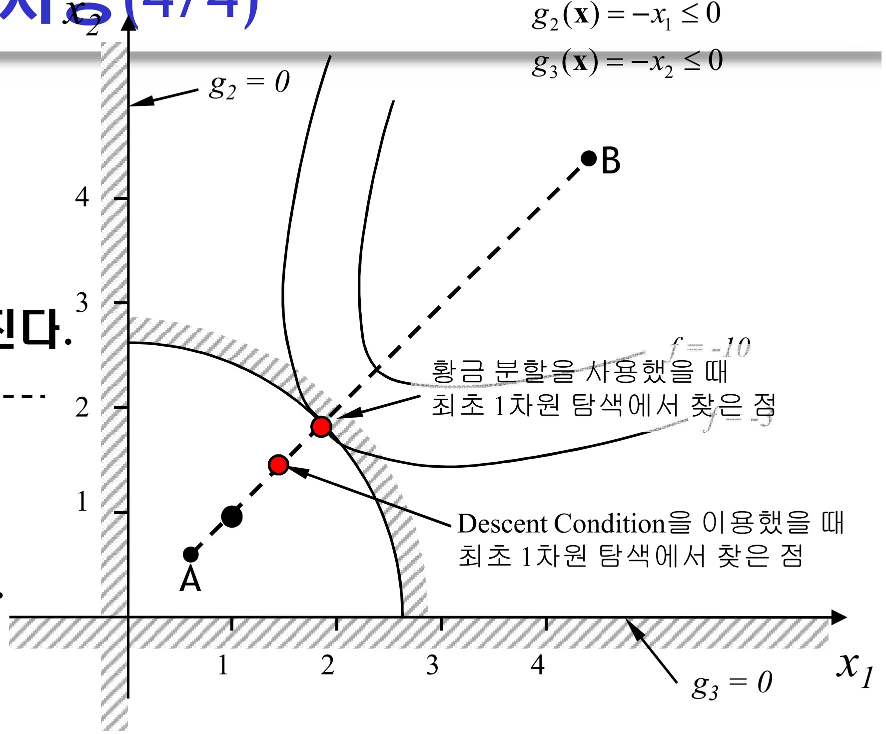
조건 $\Phi\left(t_{(0,j)}\right) \le -1 - t_{(0,j)}$ 를 만족 하므로 (1.5, 1.5)가 다음 설계점이다.

[참고]CSD(Constrained Steepest Descent) 방법에서 황금 분할 대신 Descent Condition을 사용(4/4)

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$
$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

Descent Condition을 이용하여 찾은 이동 거리와 황금분할법을 이용하여 찾은 이동 거리는 서로 다르다.

개선된 탐색점의 위치가 서로 달라지게 되며, 이로 인하여 QP 문제로 근사화 하는 반복 횟수가 달라진다.

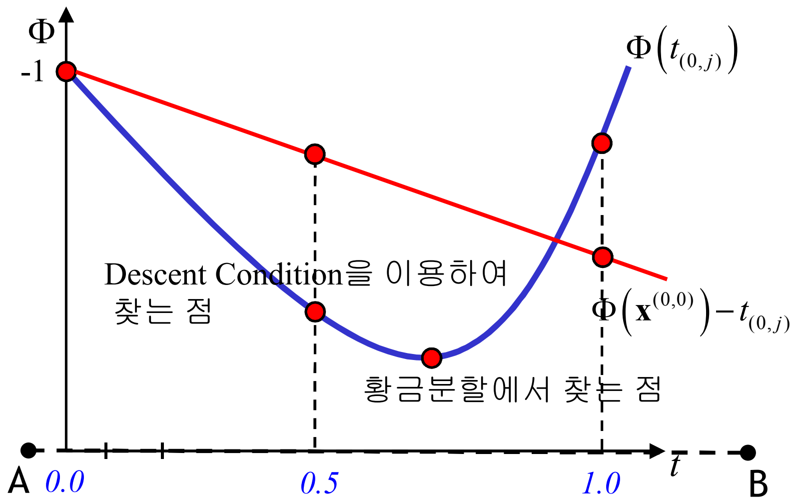


오른쪽 예제에서 황금 분할법을 사용하면

- **최초 1차원 탐색법 내의 계산 반복 횟수는 62번이다.**
- **총 2번의 QP 근사화를 통해 최적점을 찾았다.**
  + 1차원 탐색법으로 계산한 이동 거리가 비교적 정확함

오른쪽 예제에서 Descent Condition을 사용하면

- **최초 1차원 탐색법 내의 계산 반복 횟수는 1번이다.**
- **1차원 탐색법으로 계산한 이동 거리가 최적점과는 거리가 있기 때문에 총 20번의 QP 근사화를 통해 최적점을 찾았다.**



[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (1)

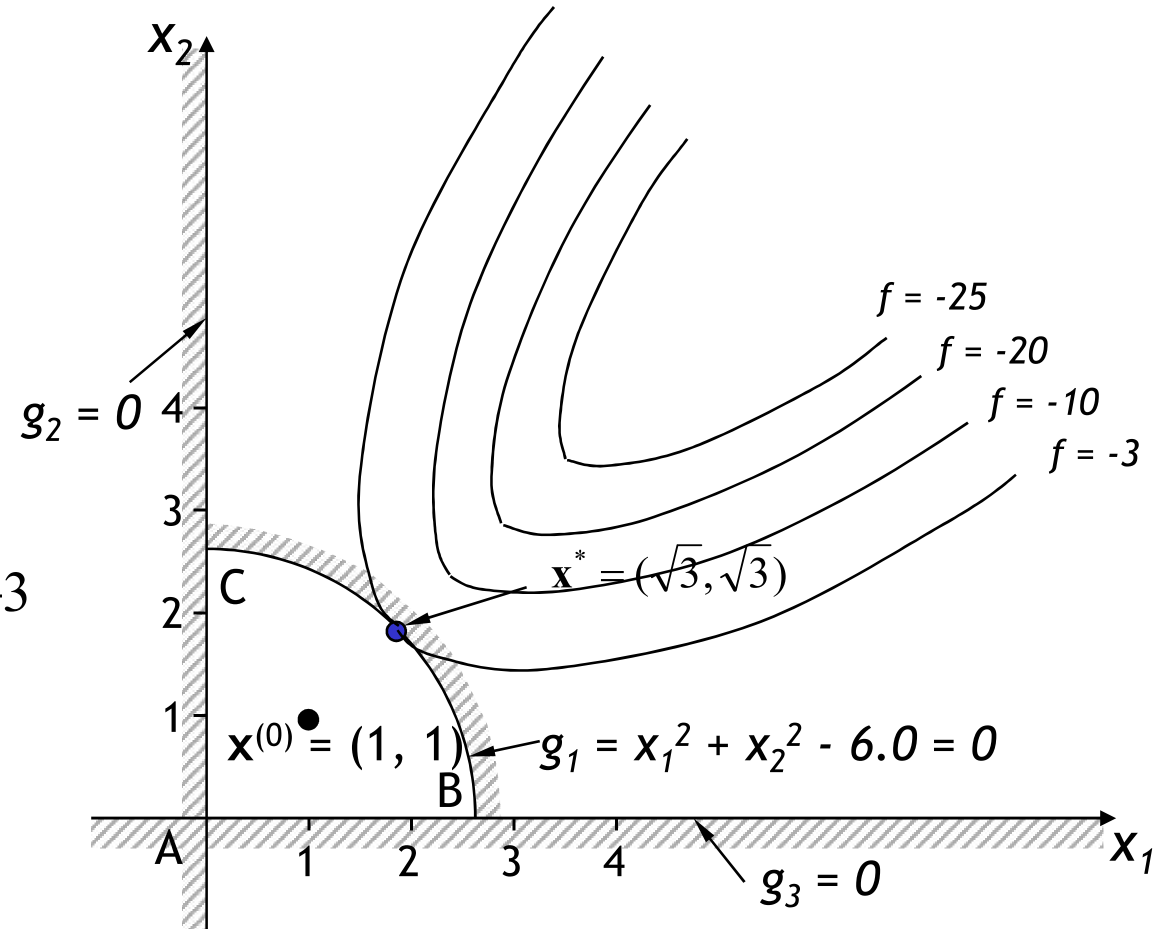
Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\sqrt{3}, \sqrt{3}), f(\mathbf{x}^*) = -3$



[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (1)

Minimize: $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to:

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

Solution: $\mathbf{x} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}), \ f(\mathbf{x}) = -3$

초기값	방법		QP로 근사화한 반복 횟수	1차원 탐색 내의 반복 횟수 총합	Local Optimum Point	Optimum Value
(1, 1)	Descent Condition	r = 0.0	19	19	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.1	19	19	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.5	19	19	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.9	19	19	(1.732, 1.732)	-3.0
	황금분할법		1	62	(1.732, 1.732)	-3.0
(0.1, 0.1)	Descent Condition	r = 0.0	35	85	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.1	36	52	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.5	29	44	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.9	44	124	(1.732, 1.732)	-3.0
	황금분할법		1	38	(1.732, 1.732)	-3.0
(1.5, 1.5)	Descent Condition	r = 0.0	18	18	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.1	18	18	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.5	18	18	(1.732, 1.732)	-3.0
		r = 0.9	18	18	(1.732, 1.732)	-3.0
	황금분할법		2	68	(1.732, 1.732)	-3.0

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (2)

Minimize: $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

Solution: $\mathbf{x} = (-1.0,\ 1.5),\ f(\mathbf{x}) = -1.25$

초기값	방법		QP로 근사화한 반복 횟수	1차원 탐색 내의 반복 횟수 총합	Local Optimum Point	Optimum Value
(0, 0)	Descent Condition	r = 0.0	39	59	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.1	38	58	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.5	41	67	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.9	60	127	(-1.0, 1.5)	-1.25
	황금분할법		17	329	(-1.0, 1.5)	-1.25
(1, 1)	Descent Condition	r = 0.0	40	63	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.1	40	63	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.5	40	66	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.9	72	194	(-1.0, 1.5)	-1.25
	황금분할법		17	282	(-1.0, 1.5)	-1.25
(-1, 2)	Descent Condition	r = 0.0	35	55	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.1	35	55	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.5	37	61	(-1.0, 1.5)	-1.25
		r = 0.9	66	177	(-1.0, 1.5)	-1.25
	황금분할법		18	299	(-1.0, 1.5)	-1.25

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (3)

Minimize

$$f(x_1, x_2) = -\left[25 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2\right]$$

Subject to

$$g_1(x_1, x_2) = -32 + 4x_1 + x_2^{\,2} \le 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = x_1 \le 10$$

$$g_4(x_1, x_2) = -x_2 \le 0$$

$$g_5(x_1, x_2) = x_2 \le 10$$

Solution

$$x_1^{\,*} = 4.374, x_2^{\,*} = 3.808, f(x_1^{\,*}, x_2^{\,*}) = -4.815$$

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (3)

Minimize: $f(x_1, x_2) = -\left[25 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2\right]$

Subject to:
$g_1(x_1, x_2) = -32 + 4x_1 + x_2^{\,2} \le 0$
$g_2(x_1, x_2) = -x_1 \le 0$
$g_3(x_1, x_2) = x_1 \le 10$
$g_4(x_1, x_2) = -x_2 \le 0$
$g_5(x_1, x_2) = x_2 \le 10$

Solution: $\mathbf{x} = (4.374,\ 3.808),\ f(\mathbf{x}) = -4.815$

초기값	방법		QP로 근사화한 반복 횟수	1차원 탐색 내의 반복 횟수 총합	Local Optimum Point	Optimum Value
(0, 0)	Descent Condition	r = 0.0	22	23	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.1	22	23	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.5	22	23	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.9	22	24	(4.374, 3.808)	-23.188
	황금분할법		590	13,509	(4.374, 3.808)	-23.188
(7, 1)	Descent Condition	r = 0.0	15	22	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.1	15	22	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.5	15	22	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.9	24	45	(4.374, 3.808)	-23.188
	황금분할법		1143	26,804	(4.374, 3.808)	-23.188
(-3, -10)	Descent Condition	r = 0.0	19	35	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.1	19	35	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.5	19	35	(4.374, 3.808)	-23.188
		r = 0.9	28	61	(4.374, 3.808)	-23.188
	황금분할법		884	20,005	(4.374, 3.808)	-23.188

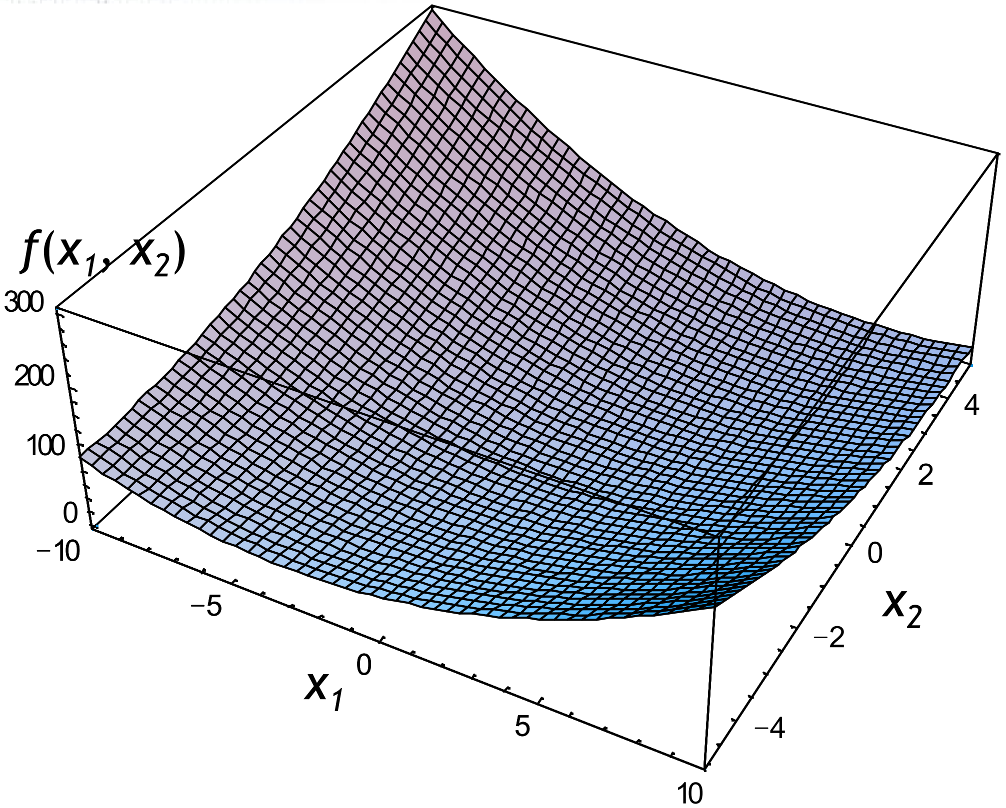
[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (4)

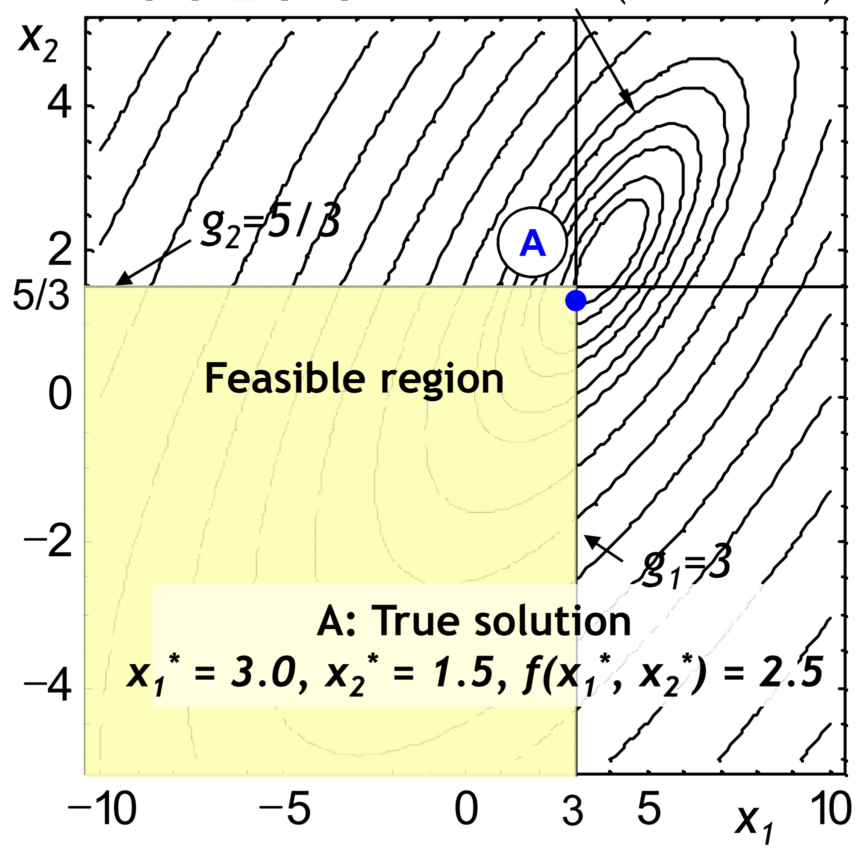
Find $x_1(=B/T), x_2(=1/C_B)$

Minimize $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2-4x_1-2x_1x_2+10$

Subject to $g_1(x_1,x_2)=x_1-3\le 0$ ➡ **미지수 2개, 부등호 제약 조건 2개인 최적화 문제**

$g_2(x_1,x_2)=x_2-5/3\le 0$





[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (4)

Minimize: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2 + 10$

Subject to: $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 3 \le 0$

$g_2(x_1, x_2) = x_2 - 5/3 \le 0$

Solution: $\mathbf{x} = (3.0,\ 1.5),\ f(\mathbf{x}) = 2.5$

초기값	방법		QP로 근사화한 반복 횟수	1차원 탐색 내의 반복 횟수 총합	Local Optimum Point	Optimum Value
(0, 0)	Descent Condition	r = 0.0	22	24	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.1	22	24	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.5	22	26	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.9	24	33	(3.0, 1.5)	2.5
	황금분할법		13	203	(3.0, 1.5)	2.5
(2, 1)	Descent Condition	r = 0.0	19	20	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.1	19	20	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.5	19	20	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.9	19	20	(3.0, 1.5)	2.5
	황금분할법		4	89	(3.0, 1.5)	2.5
(-3, -5)	Descent Condition	r = 0.0	26	52	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.1	25	28	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.5	25	28	(3.0, 1.5)	2.5
		r = 0.9	25	30	(3.0, 1.5)	2.5
	황금분할법		9	255	(3.0, 1.5)	2.5

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (5)

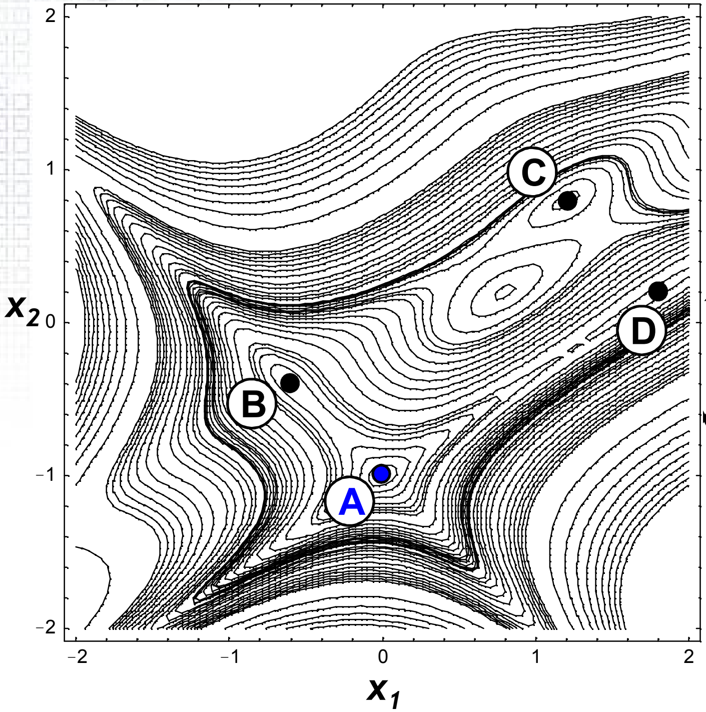
Goldstein-Price Function

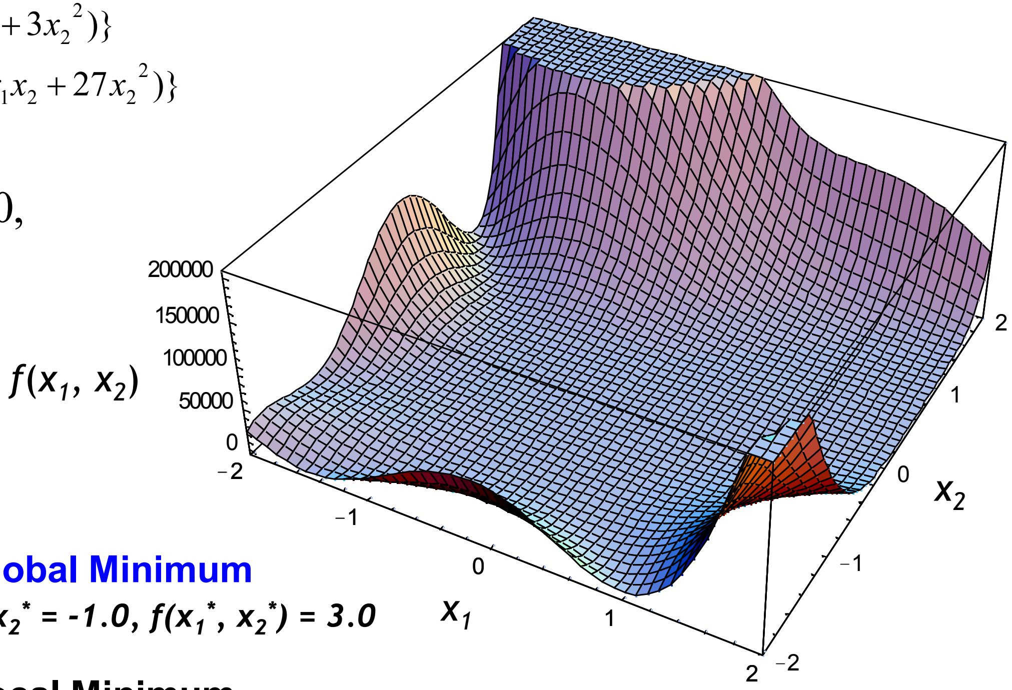
Minimize

$$f(x_1,x_2) = \{1+(x_1+x_2+1)^2\cdot(19-14x_1+3x_1^{\,2}-14x_2+6x_1x_2+3x_2^{\,2})\}$$
$$\cdot\{30+(2x_1-3x_2)^2\cdot(18-32x_1+12x_1^{\,2}+48x_2-36x_1x_2+27x_2^{\,2})\}$$

Subject to

$$g_1(x_1,x_2) = -2-x_1 \le 0,\ g_2(x_1,x_2) = -2-x_2 \le 0,$$
$$g_3(x_1,x_2) = x_1-2 \le 0,\ g_4(x_1,x_2) = x_2-2 \le 0$$





A : Global Minimum

$x_1^* = 0.0,\ x_2^* = -1.0,\ f(x_1^*, x_2^*) = 3.0$

B : Local Minimum

$x_1^* = -0.6,\ x_2^* = -0.4,\ f(x_1^*, x_2^*) = 30.0$

C : Local Minimum

$x_1^* = 1.2,\ x_2^* = 0.8,\ f(x_1^*, x_2^*) = 840.0$

D : Local Minimum

$x_1^* = 1.8,\ x_2^* = 0.2,\ f(x_1^*, x_2^*) = 84.0$

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (5)

Minimize:

$$f(x_1, x_2) = \{1 + (x_1 + x_2 + 1)^2$$
$$\times(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)\}$$
$$\times\{30 + (2x_1 - 3x_2)^2$$
$$\times(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)\}$$

Subject to:

$$g_1(x_1, x_2) = -2 - x_1 \le 0,\ g_2(x_1, x_2) = -2 - x_2 \le 0,$$
$$g_3(x_1, x_2) = x_1 - 2 \le 0,\ g_4(x_1, x_2) = x_2 - 2 \le 0$$

본 예제의 경우 국부 최소점이 여러 곳에 존재한다.
초기 탐색점에 따라 구해지는 최적점이 달라진다.
따라서 여러 초기 탐색점을 정의하여 계산 후 그 결과를 비교하는 과정이 필요하다.

초기값	방법		QP로 근사화한 반복 횟수	1차원 탐색 내의 반복 횟수 총합	Local Optimum Point	Optimum Value
(0, 0)	Descent Condition	r = 0.0	30	302	(-0.6, -0.4)	30.0
		r = 0.1	26	258	(-0.6, -0.4)	30.0
		r = 0.5	21	208	(-0.6, -0.4)	30.0
		r = 0.9	62	739	(-0.6, -0.4)	30.0
	황금분할법		15	467	(-0.6, -0.4)	30.0
(2, 3)	Descent Condition	r = 0.0	77	605	(0.0, -1.0)	3.0
		r = 0.1	31	194	(0.0, -1.0)	3.0
		r = 0.5	28	172	(0.0, -1.0)	3.0
		r = 0.9	56	523	(0.0, -1.0)	3.0
	황금분할법		13	417	(0.0, -1.0)	3.0
(-5, -5)	Descent Condition	r = 0.0	70	545	(0.0, -1.0)	3.0
		r = 0.1	24	135	(0.0, -1.0)	3.0
		r = 0.5	24	136	(0.0, -1.0)	3.0
		r = 0.9	51	459	(0.0, -1.0)	3.0
	황금분할법		17	497	(0.0, -1.0)	3.0

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (6)

Rastrigin's Function

Minimize

$$f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 - 10\cos(2\pi \cdot x_1) + x_2^2 - 10\cos(2\pi \cdot x_2)$$

Subject to

$$g_1(x_1, x_2) = -5.12 - x_1 \le 0$$

$$g_2(x_1, x_2) = -5.12 - x_2 \le 0$$

$$g_3(x_1, x_2) = x_1 - 5.12 \le 0$$

$$g_4(x_1, x_2) = x_2 - 5.12 \le 0$$

Solution

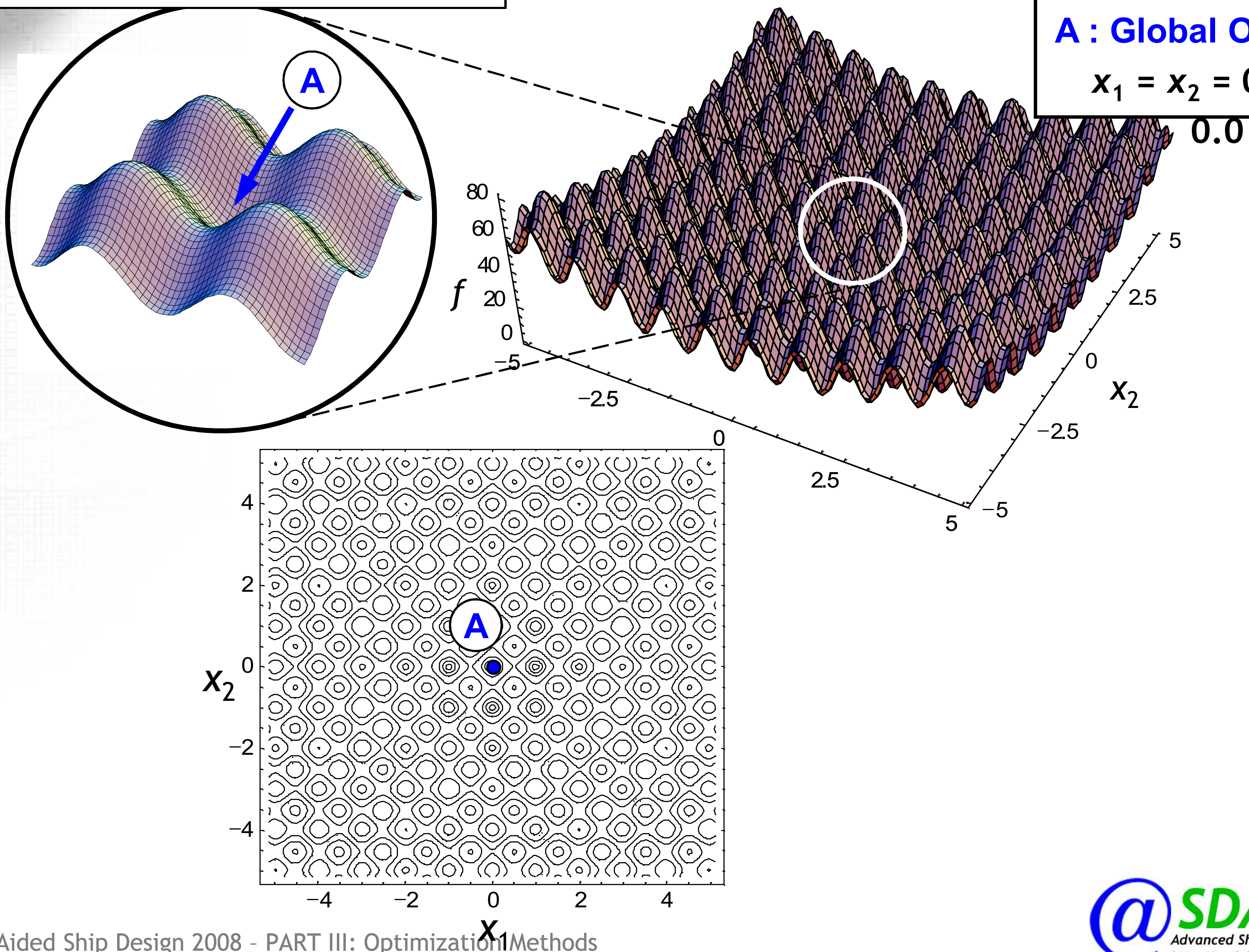
$$x_1^* = 0.0, x_2^* = 0.0, f(x_1^*, x_2^*) = 0.0$$

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (6)

Rastrigins's Function의 전역 및 국부 최소점

A : Global Optimum

$x_1 = x_2 = 0.0, f = 0.0$



@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

[참고] 황금 분할법과 Descent Condition 방법의 비교 (6)

Minimize:

$$f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 - 10\cos(2\pi \cdot x_1) + x_2^2 - 10\cos(2\pi \cdot x_2)$$

Subject to:

$$g_1(x_1, x_2) = -5.12 - x_1 \le 0$$
$$g_2(x_1, x_2) = -5.12 - x_2 \le 0$$
$$g_3(x_1, x_2) = x_1 - 5.12 \le 0$$
$$g_4(x_1, x_2) = x_2 - 5.12 \le 0$$

본 예제의 경우 국부 최소점이 여러 곳에 존재한다.
초기 탐색점에 따라 구해지는 최적점이 달라진다.
따라서 여러 초기 탐색점을 정의하여 계산 후 그 결과를 비교하는 과정이 필요하다.

초기값	방법		QP로 근사화한 반복 횟수	1차원 탐색 내의 반복 횟수 총합	Local Optimum Point	Optimum Value
(0.1, 0.1)	Descent Condition	r = 0.0	18	147	(0.0, 0.0)	0.0
		r = 0.1	18	147	(0.0, 0.0)	0.0
		r = 0.5	9	82	(0.0, 0.0)	0.0
		r = 0.9	39	427	(0.0, 0.0)	0.0
	황금분할법		1	47	(0.0, 0.0)	0.0
(2.1, 2.1)	Descent Condition	r = 0.0	16	134	(1.990, 1.990)	7.960
		r = 0.1	16	134	(1.990, 1.990)	7.960
		r = 0.5	7	69	(1.990, 1.990)	7.960
		r = 0.9	32	358	(1.990, 1.990)	7.960
	황금분할법		1	45	(1.990, 1.990)	7.960
(-2.1, -3)	Descent Condition	r = 0.0	18	144	(-1.990, -2.985)	12.934
		r = 0.1	18	144	(-1.990, -2.985)	12.934
		r = 0.5	9	82	(-1.990, -2.985)	12.934
		r = 0.9	36	395	(-1.990, -2.985)	12.934
	황금분할법		7	229	(-1.990, -2.985)	12.934

1차원 탐색 방법의 종류에 따른 최적 계산 과정 비교

계산 과정	Descent Condition 방법	황금분할법
QP로 근사화한 반복 횟수	많음	적음
1차원 탐색 내의 반복 횟수 총 합	적음	많음

- 1차원 탐색 방향의 종류에 따른 최적 계산 과정 비교
  - 1차원 탐색 방법 수행 시 목적 함수와 제약 조건을 반복하여 계산함
  - 목적 함수와 제약 조건의 계산 시간이 오래 걸리는 경우 Descent Condition 방법을 사용하는 것이 유리