Engineering Mathematics I

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, ysna@snu.ac.kr, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 1 First-Order ODEs

1.1 Basic Concepts. Modeling

1.2 Geometric Meaning of y'=f(x, y). Direction Fields

1.3 Separable ODEs. Modeling

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics

1.6 Orthogonal Trajectories

1.7 Existence and Uniqueness of Solutions

Ch. 1 First-Order ODEs (1계 상미분방정식)

- **물리적 문제:**

  상미분방정식을 유도, 표준화된 방법으로 방정식을 풀고,
  주어진 문제의 견지에서 그래프와 해를 해석

- **내용:**

  - 1계 상미분방정식: 미지 함수의 고계 도함수를 포함하지 않고 단지 1계 도함수만을 포함.
  - 1계 상미분방정식의 해법

1.1 Basic Concepts. Modeling
(기본 개념. 모델화)

- **Differential Equation (미분방정식)**

  : 미지함수의 도함수(Derivative)를 포함하는 방정식

미분방정식 (Differential Equation)

- 상미분방정식 (Ordinary Differential Equation)
- 편미분방정식 (Partial Differential Equation)

1.1 Basic Concepts. Modeling
(기본 개념. 모델화)

- **Ordinary Differential Equation (상미분방정식):**

  Independent Variable (독립변수)가 1개인 미분방정식

$$\text{Ex.}\quad y' = \cos x, \quad y'' + 9y = 0, \quad x^2 y''' y' + 2e^x y'' = \left(x^2 + 2\right) y^2$$

- **Partial Differential Equation (편미분방정식)** :

  2개 이상의 독립변수와 이들의 편미분 성분이 포함된
  미분방정식 (12장에서 다룸)

$$\text{Ex.}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1.1 Basic Concepts. Modeling
(기본 개념. 모델화)

- **Order (계)** : 미분방정식에 포함된 도함수 중 제일 많이 미분된 숫자

Ex. (1) $y' = \cos x, \quad \Rightarrow$ 1계 미분방정식

(2) $y'' + 9y = 0, \quad \Rightarrow$ 2계 미분방정식

(3) $x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2 \quad \Rightarrow$ 3계 미분방정식

- **First-order ODE (1계 상미분방정식):**

: 미지의 함수 (y)와 도함수, 그리고 변수 (x)의 함수들로만 구성됨 (1장)

- 양함수 형태(Explicit Form) : $y' = f(x, y)$
- 음함수 형태(Implicit Form) : $F(x, y, y') = 0$

1.1 Basic Concepts. Modeling
(기본 개념. 모델화)

- **Solution (해)** : 도함수가 존재하고 미분방정식을 만족시키는 함수

해

(Solution)

- General Solution (일반해):

  미분방정식을 만족하는 해가 임의의 적분상수
  c를 포함

- Particular Solution (특수해):

  적분상수 c가 특정조건에 의하여 특정한
  값으로 결정된 경우

- Singular Solution (특이해)

  : 일반해로 표현 불가능한 해

1.1 Basic Concepts. Modeling (기본 개념. 모델화)

- **Initial Value Problems (초기값 문제):**

  주어진 초기조건을 이용하여 일반해로부터 특수해를 구함

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- Ex.4 Solve the initial value problem.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3y, \quad y(0) = 5.7$$

Step 1 일반해를 구함 (Ex.3에 의하여)

일반해 : $y(x) = ce^{3x}$

Step 2 초기조건 적용 : $y(0) = ce^0 = c = 5.7$

특수해 : $y(x) = 5.7e^{3x}$

1.1 Basic Concepts. Modeling (기본 개념. 모델화)

- **Modeling (모델화)**

❖ 모델화의 전형적인 단계

1단계 물리적 상황(물리적 시스템)에서
수학적 공식(수학적 모델)을 도출

2단계 수학적 방법에 의한 해

3단계 결과의 물리적 해석

1.1 Basic Concepts. Modeling
(기본 개념. 모델화)

- Ex. 5 Given an amount of a radioactive substance, say, 0.5 g,
  find the amount present at any later time.

Physical Information

Experiments show that at each instant a radioactive substance decomposes at a rate proportional to the amount present.

1.1 Basic Concepts. Modeling
(기본 개념. 모델화)

- Ex. 5 Given an amount of a radioactive substance, say, 0.5 g,
  find the amount present at any later time.

Physical Information

Experiments show that at each instant a radioactive substance decomposes at a rate proportional to the amount present.

Step 1 물리적 과정의 수학적 모델(미분방정식) 설정

분해속도는 현재 양에 비례 : $\dfrac{dy}{dt} \propto y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = ky$

초기조건 : $y(0) = 0.5$

일반해 : $y(x) = ce^{kt}$

Step 2 수학적 해법

초기조건의 적용 : $y(0) = ce^{0} = c = 0.5 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0.5e^{kt}$

결과의 검토 : $\dfrac{dy}{dt} = 0.5ke^{kt} = ky, \quad y(0) = 0.5e^{0} = 0.5$

1.1 Basic Concepts. Modeling (기본 개념. 모델화)

PROBLEM SET 1.1

HW: 15, 16, 22

1.2 Geometric Meaning of y'=f(x, y). Direction Fields (y'=f(x, y)의 기하학적 의미. 방향장)

- **Direction Fields (방향장)**

  : 미분방정식이 $y' = f(x,y)$ 같은 양함수 형태로 표시되는 경우

⇒ $f(x_0, y_0)$은 좌표에서의 해곡선 y의 기울기

⇒ 각 좌표의 $f(x_0, y_0)$를 구하고 그 값만큼의 기울기를 가진 작은 선요소(Lineal Element)들을 그래프 상에 표시

⇒ 선요소들의 방향을 따라 선을 그리면 대략적인 해곡 선의 모양을 알 수 있음

⇒ 매우 복잡한 해를 갖거나 양함수 형태의 해가 존재하지 않는 미분방정식에서 대략적인 해곡선의 형태를 판단하는데 사용할 수 있음

1.2 Geometric Meaning of y'=f(x, y). Direction Fields (y′=f(x, y)의 기하학적 의미. 방향장)

$$y' = xy$$

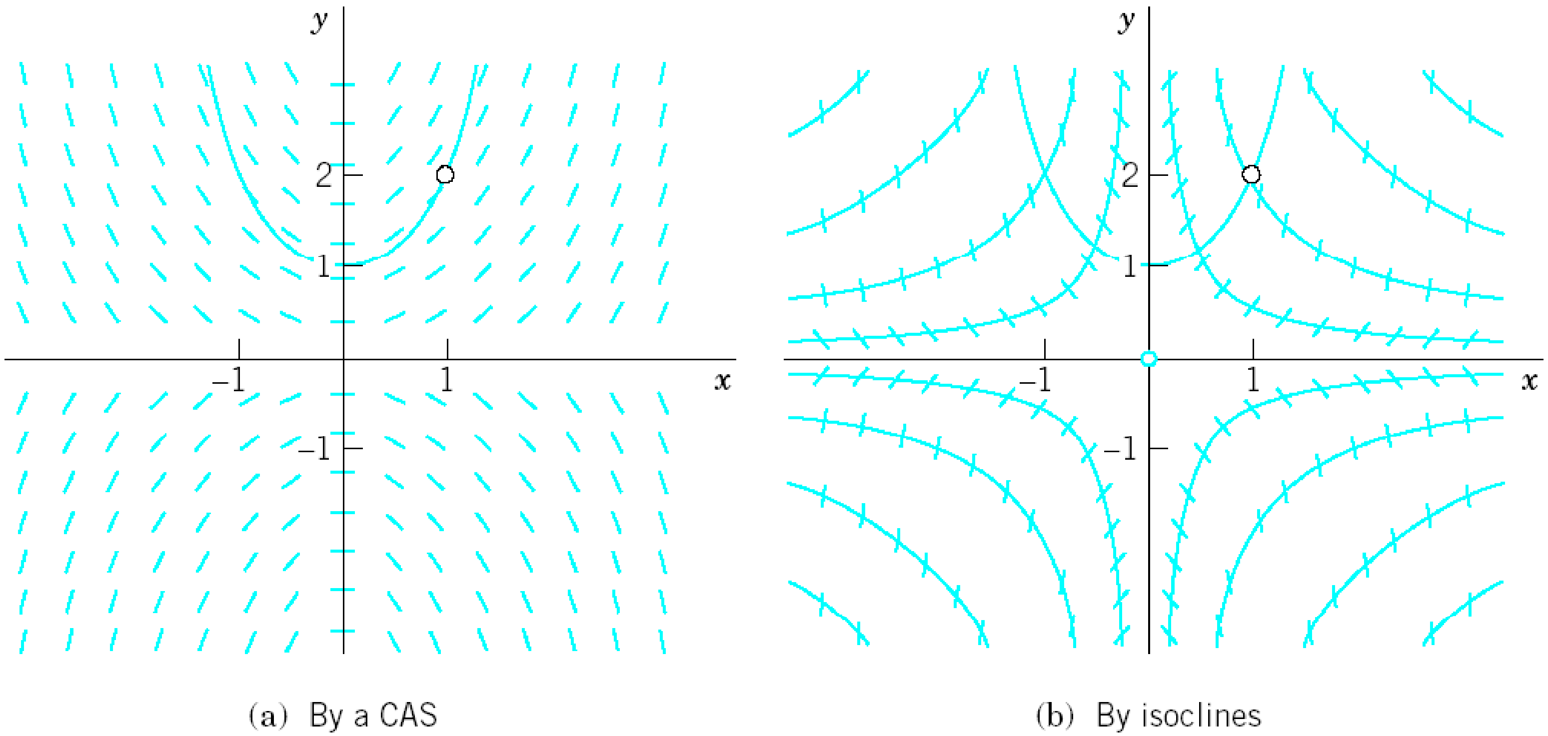


Fig. 7. Direction field of $y' = xy$

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

- **Separable Equation (변수분리형 방정식)**

  : 미분방정식의 왼쪽은 y, 오른쪽은 x만으로 구성되도록 조작 가능

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx \quad \left(\because y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

- **Method of Separating Variable (변수분리법)**

  : 미분방정식의 양변을 x로 적분하면 변수분리한 식의 왼쪽은 y, 오른쪽은 x로

  적분한 결과가 나옴

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c \quad \left(\because \frac{dy}{dx}dx = dy\right)$$

❖ 변수분리를 할 경우 양변을 적분하여 쉽게 해를 구할 수 있음.

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

- Ex. 1 Solve $y' = 1 + y^2$.

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy/dx}{1+y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1+y^2} = dx$$ (변수분리형)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int dx + c \quad \Rightarrow \quad \arctan y = x + c$$ (적분)

$$\Rightarrow \quad y = \tan(x + c)$$ (정리)

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

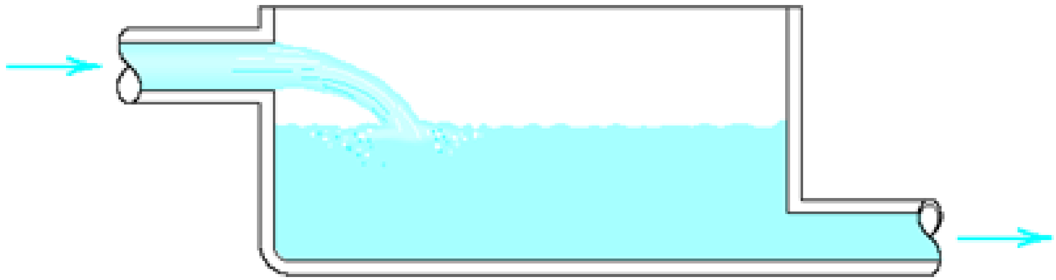
- **Modeling (모델화, 모형화) :**

  물리적인 시스템 등을 수학적인 모델
  (함수, 방정식, 미분방정식 등)로 표현하는 것

❖ 이 절에서는 변수분리형 미분방정식으로 표현되는 시스템을 모델화 해 본다.

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

■ Ex. 3 The tank contains 1000 gal of water in which initially 100 lb of salt is dissolved. Brine runs in at a rate of 10 gal/min, and each gallon contains 5 lb of dissolved salt. The mixture in the tank is kept uniform by stirring. Brine runs out at 10 gal/min. Find the amount of salt in the tank at any time t.



Tank

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

■ Ex. 3 The tank contains 1000 gal of water in which initially 100 lb of salt is dissolved. Brine runs in at a rate of 10 gal/min, and each gallon contains 5 lb of dissolved salt. The mixture in the tank is kept uniform by stirring. Brine runs out at 10 gal/min. Find the amount of salt in the tank at any time t.

Step 1 모델화

▶ 소금의 변화량 $(dy/dt = y')$ = 소금의 유입량 - 소금의 유출량

소금의 유입량 = 10 gal/min × 5 lb/gal = 50 lb/min

소금의 유출량 = 10 gal/min × y lb/1000gal = y/100 lb/min

$$\Rightarrow \quad y' = 50 - \frac{y}{100} = \frac{1}{100}(5000 - y)$$: 소금의 양에 관한 미분방정식

▶ 초기조건 : $y(0) = 100$

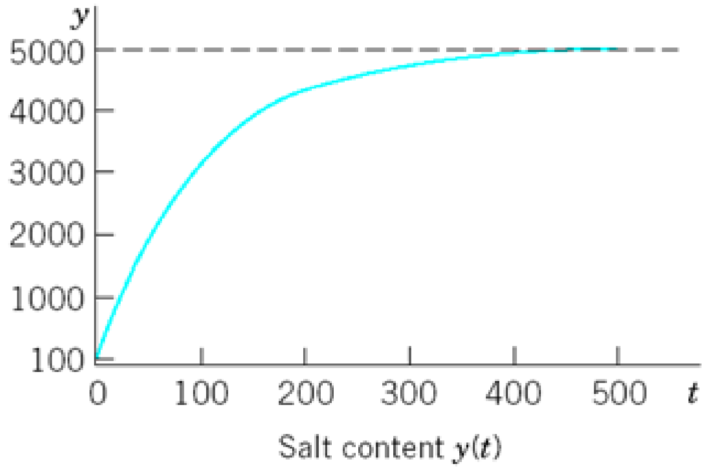
1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

Step 2 미분방정식의 일반해를 구함

$$\frac{dy}{y-5000} = -\frac{1}{100}dt \qquad \text{(변수분리형)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y-5000| = -\frac{1}{100}t + c^* \qquad \text{(적분)}$$

$$\Rightarrow \quad y-5000 = ce^{-\frac{t}{100}}$$



Step 3 초기조건을 적용하여 특수해를 구함

$$y(0) = 5000 + ce^{0} = 5000 + c = 100 \quad \Rightarrow \quad c = -4900 \qquad y = 5000 - 4900e^{-\frac{t}{100}}$$

(특수해)

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

- **Reduction to Separable Form (확장방법 - 변수분리형 형태로 변환):**

  변수분리를 할 수 없는 미분방정식을 새로운 함수를 도입하여
  변수분리가 가능한 형태로 변환함

▶ $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 와 같은 형태의 미분방정식

Ex. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

이 상태로는 변수분리가 되지 않으므로 다음과 같이 새로운 함수 u를 도입한다.

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad y' = (ux)' = u'x + u$$ (u를 도입)

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad u'x + u = f(u) \quad \Rightarrow \quad u'x = f(u) - u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{f(u) - u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx + c$$ (적분) (변수분리형)

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

- Ex. 6 Solve $2xyy' = y^2 - x^2$.

1.3 Separable ODEs. Modeling
(변수분리형 상미분방정식. 모델화)

■ Ex. 6 Solve $2xyy' = y^2 - x^2$.

$$2xyy' = y^2 - x^2 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$$ (2xy로 나눔)

$$\Rightarrow\; y = ux, \quad u = \frac{y}{x}, \quad y' = u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

$$u'x = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = -\frac{u^2+1}{2u} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \frac{2u}{u^2+1}du = -\frac{1}{x}dx$$ (변수분리형)

$$\int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{1}{x}dx + c^* \;\Rightarrow\; \ln\left|u^2+1\right| = -\ln|x| + c^* = \ln\frac{1}{|x|} + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|, \quad c = e^{c^*}$$ (적분)

$$u^2 + 1 = \frac{c}{x} \;\Rightarrow\; \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{c}{x} \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = cx$$

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$$ (정리)

1.3 Separable ODEs. Modeling (변수분리형 상미분방정식. 모델화)

PROBLEM SET 1.3

HW: Example 4, 5

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

$$y' = -\frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2y}{3x}$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors
(완전상미분방정식. 적분인자)

$$y' = -\frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2y}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2}$$

$$(1+2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy = 0$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

- **Exact Differential Equation (완전미분방정식) :** $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy$이 함수 $u(x,y)$에 대하여 미분의 형태 $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$인 경우

즉, $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

❖ 완전미분방정식이라면,

$du = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = c$이 되어 해를 쉽게 구할 수 있다.

(음함수의 해)

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors
(완전상미분방정식. 적분인자)

- 완전미분방정식의 필요충분조건

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \left(\because \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

- 완전미분방정식의 해법

Case 1) $M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)dx + k(y)$ (x에 대하여 적분)

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + k(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dk}{dy} \quad \Rightarrow \quad k(y)$$

Case 2) $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)dy + l(x)$ (y에 대하여 적분)

$$u(x,y) = \int N(x,y)dy + l(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dl}{dx} \quad \Rightarrow \quad l(x)$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

■ Ex. 1 Solve $\cos(x+y)dx + \left(3y^2 + 2y + \cos(x+y)\right)dy = 0$.

Step 1 완전미분방정식인지 판별

$$M(x,y) = \cos(x+y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x+y)$$

$$N(x,y) = 3y^2 + 2y + \cos(x+y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$: **완전미분방정식**

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

Step 2 미분방정식의 해를 구함

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y)=\int \cos(x+y)dx+k(y)=\sin(x+y)+k(y)$$

$k(y)$를 구하기 위하여

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos(x+y)+\frac{dk}{dy}=N(x,y)=3y^2+2y+\cos(x+y)\ \Rightarrow\ \frac{dk}{dy}=3y^2+2y\ \Rightarrow\ k=y^3+y^2+c^*$$

$$\therefore\quad u(x,y)=\sin(x+y)+y^3+y^2=c$$

Step 3 검증

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+y)+\cos(x+y)y'+3y^2y'+2yy'=0\quad\Rightarrow\quad \cos(x+y)+\left(\cos(x+y)+3y^2+2y\right)y'=0$$

$$\Rightarrow\quad \cos(x+y)dx+\left(3y^2+2y+\cos(x+y)\right)dy=0$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

- **Reduction to Exact Form (완전미분방정식 형태로 변환)**

  : 완전미분방정식이 아닌 방정식에, 어떤 함수 $F(x,y)$ 를 곱하여 완전미분방정식을 만듦.

- **Integrating Factors (적분인자)**

  : 완전미분방정식을 만드는 함수 $F(x,y)$

■ Ex. 3 $-ydx + xdy = 0$ is not exact.

$$\because \quad M = -y, \quad N = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{not exact}$$

미분방정식의 양변에 $1/x^2$(적분인자)을 곱하면 $-\dfrac{y}{x^2}dx + \dfrac{1}{x}dy = 0$

$$M = -\frac{y}{x^2}, \quad N = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{exact}$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors
(완전상미분방정식. 적분인자)

- **적분인자** $F(x,y)$ **를 구하는 방법**

$FPdx + FQdy = 0$ (완전미분방정식)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}P + F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

- 완전미분방정식을 만드는 $F(x,y)$를 찾는 것은 매우 어렵다.

- 하나의 변수(x 또는 y)에만 의존하는 적분인자를 구하는 것이 쉽다.

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors
(완전상미분방정식. 적분인자)

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP)=\frac{\partial}{\partial x}(FQ)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}P+F\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial x}P+F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Case 1) x만의 함수인 적분인자 $F(x)$구하는 법

적분인자 F가 x만의 함수이므로 $\frac{\partial F}{\partial x}=F'$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$이다.

$$FP_y=F'Q+FQ_x \quad \Rightarrow \quad \frac{P_y}{Q}=\frac{F'}{F}+\frac{Q_x}{Q} \quad (FQ\text{로 나눔}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

$$R(x)=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=R(x) \quad \Rightarrow \quad \ln|F|=\int R(x)dx \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F(x)=\exp\left(\int R(x)dx\right)$$

Case 2) y만의 함수인 적분인자 $F^*(y)$구하는 법

$F(x)$를 구하는 것과 마찬가지방법으로

$$R^*(y)=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),\quad F^*(y)=\exp\left(\int R^*(y)dy\right)$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors
(완전상미분방정식. 적분인자)

■ Ex. 5 Using Theorem 1 or 2, find an integrating factor and solve the IVP.

$$\left(e^{x+y} + ye^{y}\right)dx + \left(xe^{y} - 1\right)dy = 0, \quad y(0) = -1$$

Step 1 **완전미분방정식인지 판별**

$$P(x,y) = e^{x+y} + ye^{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^{y} + ye^{y}$$

$$Q(x,y) = xe^{y} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$: **완전미분방정식 아님**

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors
(완전상미분방정식. 적분인자)

Step 2 적분인자 구하기

$$R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{xe^y - 1}\left(e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y\right) = \frac{1}{xe^y - 1}\left(e^{x+y} + ye^y\right) \Rightarrow \quad \text{적용불가능}$$

$$R^* = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{e^{x+y} + ye^y}\left(e^y - e^{x+y} - e^y - ye^y\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad F^*(y) = e^{-y}$$

$$\therefore \quad \left(e^x + y\right)dx + \left(x - e^{-y}\right)dy = 0$$

검증

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x + y\right) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - e^{-y}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{완전미분방정식}$$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

Step 3 일반해 구하기

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y \quad \Rightarrow \quad u = \int \left(e^x + y\right) dx = e^x + xy + k(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + k'(y) = x - e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k'(y) = -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k(y) = e^{-y} + c^*$$

일반해 : $u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = c$

Step 4 특수해 구하기

초기조건 적용 $y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad u(0, -1) = e^0 + 0 + e = 3.72$

특수해 : $u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = 3.72$

1.4 Exact ODEs. Integrating Factors (완전상미분방정식. 적분인자)

PROBLEM SET 1.4

HW: 24

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

- 미분방정식 (ODEs)
  - 선형 미분방정식 (Linear ODEs)
    - 제차 선형 미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs)
    - 비제차 선형미분방정식 (Nonhomogeneous Linear ODEs)
  - 비선형 미분방정식 (Nonlinear ODEs)

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

- **Linear Differential Equation (선형미분방정식):**

  방정식내에서 미지의 함수 y와 그의 도함수의 관계가 선형인 미분방정식

  Ex. $y' + p(x)y = r(x)$: 선형미분방정식

  $y' + p(x)y = r(x)y^2$:비선형미분방정식

- 표준형 $(\textbf{Standard Form})$: $y' + p(x)y = r(x)$

  입력 $(\textbf{Input})$: $r(x)$

  출력 $(\textbf{Output})$: $y(x)$

- **Homogeneous (제차), Nonhomogeneous (비제차) 미분방정식**

  $y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow$ 1계 제차 선형미분방정식

  $y' + p(x)y = r(x) \neq 0 \quad \Rightarrow$ 1계 비제차 선형미분방정식

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

- **제차 미분방정식의 해법** (변수분리형)

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + c^* \quad \Rightarrow \quad y = ce^{-\int p(x)dx}$$

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

- **비제차 미분방정식의 해법**(완전미분방정식의 해법 응용)

$$y' + p(x)y = r(x) \quad \Rightarrow \quad (py - r)dx + dy = 0$$

$$P = py - r, \quad Q = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = p \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow$$ **완전미분방정식이 아님**

- **적분인자 구하기:** $R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F = e^{\int p dx}$

- **적분인자 곱하여 해 구하기**

$$e^{\int p dx}(py - r)dx + e^{\int p dx} dy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\int p dx} \quad \Rightarrow \quad u = y e^{\int p dx} + l(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = py e^{\int p dx} + l'(x) = e^{\int p dx}(py - r)$$

$$\Rightarrow \quad l'(x) = -r e^{\int p dx} \quad \Rightarrow \quad l(x) = -\int r e^{\int p dx} dx + c \quad \Rightarrow \quad u = y e^{\int p dx} - \int r e^{\int p dx} dx = c$$

$$\Rightarrow \quad y e^{\int p dx} = \int r e^{\int p dx} dx + c \quad \Rightarrow \quad \therefore\ y = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right], \ h = \int p(x) dx$$

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

- Ex. 1 Solve the linear ODE.

$$y' - y = e^{2x}$$

$$p = -1, \qquad r = e^{2x}, \qquad h = \int p\,dx = -x$$

$$\Rightarrow \quad \therefore\; y = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right] = e^{x}\left[\int e^{-x} e^{2x} dx + c\right] = e^{x}\left[e^{x} + c\right] = e^{2x} + ce^{x}$$

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

- Bernoulli Equation : $y' + p(x)y = g(x)y^a$
  - $a = 0 \quad \text{or} \quad 1$ 이면 선형
  - $a \neq 0 \quad \text{and} \quad 1$ 이면 비선형

- 비선형 Bernoulli 방정식인 경우: 선형미분방정식으로 변환가능

$$y' + p(x)y = g(x)y^a \quad \Rightarrow \quad y' = g(x)y^a - p(x)y$$

$u = y^{1-a}$ **로 치환**

$$\Rightarrow \quad u' = (1-a)y^{-a}y' = (1-a)y^{-a}(gy^a - py) = (1-a)(g - py^{1-a}) = (1-a)(g - pu)$$

$$\Rightarrow \quad u' + (1-a)pu = (1-a)g$$

: u에 관한 선형미분방정식

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

■ Ex. 4 **Logistic Equation (논리적 방정식)**

Solve the following Bernoulli eqn., known as the logistic eqn. (or Verhulst eqn.).

$$y' = Ay - By^2$$

$y' = Ay - By^2 \quad \Rightarrow \quad y' - Ay = -By^2$

$a = 2 \quad \Rightarrow \quad u = y^{-1}$ 로 치환

$\Rightarrow \quad u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left(Ay - By^2\right) = -Ay^{-1} + B = -Au + B$

$\Rightarrow \quad u' + Au = B$ (u 에 관한 선형미분방정식) cf) 변수분리법 사용

$p = A, \quad r = B \quad \Rightarrow \quad h = \int p\,dx = Ax$

$\Rightarrow \quad u = e^{-h}\left[\int e^h r\,dx + c\right] = e^{-Ax}\left[\frac{B}{A}e^{Ax} + c\right] = ce^{-Ax} + \frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad \therefore\ y = \frac{1}{u} = \frac{1}{\left(B/A + ce^{-Ax}\right)}$

(Verhulst 방정식의 해)

1.5 Linear ODEs. Bernoulli Equation. Population Dynamics (선형상미분방정식. 베르누이방정식. 인구동력학)

PROBLEM SET 1.5

HW: Example 3

1.6 Orthogonal Trajectories (직교궤적)

- **직교궤적**(Orthogonal Trajectory): 주어진 곡선에 직교하는 곡선
- 곡선 $y = g(x)$ 에 수직하게 교차하는 직교궤적 구하기
  - 1단계 주어진 곡선을 해곡선으로 하는 미분방정식을 구한다.

$$y' = f(x, y)$$

  - 2단계 직교궤적의 미분방정식은

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

  - 3단계 직교궤적의 미분방정식의 해를 구한다.

1.7 Existence and Uniqueness of Solutions (해의 존재성과 유일성)

- 초기값 문제의 특수해가 항상 존재하는 것도 아니다.

Ex. $|y'|+|y|=0, \quad y(0)=1 \quad \Rightarrow$ 만족하는 해가 없다.

$y'=2x, \quad y(0)=1 \quad \Rightarrow$ 만족하는 해가 하나 있다. $\Rightarrow \quad y=x^2+1$

$xy'=y-1, \quad y(0)=1 \quad \Rightarrow$ 만족하는 해가 무수히 많다. $\Rightarrow \quad y=1+cx$

- **존재성의 문제**

  어떤 조건하에서 초기값 문제가 적어도 하나의 해를 갖는가?

- **유일성의 문제**

  어떤 조건하에서 주어진 초기값 문제가 많아야 한 개의 해를 갖는가?

1.7 Existence and Uniqueness of Solutions (해의 존재성과 유일성)

- **존재정리**

초기값 문제 $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$에서

$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$로 정의되는 사각형내의 모든 점 (x, y)에서

- $f(x, y)$ 가 연속이고
- $|f(x, y)| \le K$ (발산하지 않음) 이면

$\Rightarrow$ $\therefore$ 최소한 하나 이상의 해를 갖는다.

1.7 Existence and Uniqueness of Solutions (해의 존재성과 유일성)

- **유일성정리**

초기값 문제 $y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$ 에서

$|x - x_0| < a,\quad |y - y_0| < b$ 로 정의되는 사각형내의 모든 점 (x, y)에서

- $f(x, y),\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 가 연속이고
- $|f| \le K,\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$ (발산하지 않음) 이면

$\Rightarrow$ $\therefore$ 최대 하나의 해를 갖는다. 해의 존재성 정리와 연결하여

생각하면 이 초기값 문제는 정확하게 하나의 해를 갖게 된다.

1.7 Existence and Uniqueness of Solutions (해의 존재성과 유일성)

PROBLEM SET 1.7

HW: