Engineering Mathematics I

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, ysna@snu.ac.kr, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 4 Systems of ODEs. Phase Plane. Qualitative Methods

Ch. 4 Systems of ODEs. Phase Plane. Qualitative Methods (연립상미분방정식. 상평면 및 정성법)

- 내용 : 행렬과 벡터를 이용한 선형연립방정식의 해법

4.0 Basics of Matrices and Vectors (행렬과 벡터)

- **Systems of Differential Equations (연립미분방정식):**

두 개 이상의 미지함수를 갖는 두 개 이상의 상미분방정식

Ex.

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \qquad y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n,$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \qquad y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n,$$

$$\vdots$$

$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n,$$

- **미분:**

요소(또는 성분)가 변수인 행렬(또는 벡터)의 도함수는 각각의 요소를 미분함.

Ex.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}$$

Ex.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

4.0 Basics of Matrices and Vectors (행렬과 벡터)

- **Eigenvalue (고유값), Eigenvector (고유벡터)**

$\mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor$을 주어진 $n \times n$행렬이라 하고, 어떤 벡터 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$에 대하여 식 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$가 성립하게 하는 스칼라 λ를 의 **고유값(Eigenvalue)**이라 하며, 이 때의 벡터 $\mathbf{x}$를 λ에 대응하는 **고유벡터(Eigenvector)**라 함.

❖ 임의의 λ에 대하여 영벡터 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 방정식 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$의 해이다.

❖ $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ n개의 미지수 $x_1, \cdots, x_n$(벡터 $\mathbf{x}$의 성분)에 관한 대수적인 1차 연립방정식

❖ 방정식 $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$이 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$인 해를 갖기 위해서는 계수행렬 $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$의 역행렬이 존재하지 않는다. $\quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

4.0 Basics of Matrices and Vectors (행렬과 벡터)

Ex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 이면

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Characteristic Equation (특성방정식):** $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$
- 행렬 A의 고유값: 특성방정식의 해
- x가 행렬 A의 고유벡터이면 임의의 스칼라 $k \neq 0$ 에 대하여 $k\mathbf{x}$ 도 고유벡터임

■ Ex. 1 Eigenvalue Problem

Find the eigenvalue and eigenvectors of the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}$$

4.0 Basics of Matrices and Vectors (행렬과 벡터)

Ex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 이면

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Characteristic Equation (특성방정식):** $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$
  - 행렬 A의 고유값: 특성방정식의 해
  - x가 행렬 A의 고유벡터이면 임의의 스칼라 $k \neq 0$ 에 대하여 $k\mathbf{x}$ 도 고유벡터임

■ Ex. 1 Eigenvalue Problem

Find the eigenvalue and eigenvectors of the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -0.8 \qquad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

4.0 Basics of Matrices and Vectors (행렬과 벡터)

- **Eigenvalue와 Eigenvector의 기하학적 의미:**

행렬의 고유값은 영벡터가 아닌 벡터 x에 행렬 A를 곱하여 벡터 x의 변화가 원래 자신의 상수배-고유값만큼 길이가 길어진다는 것을 나타냄.

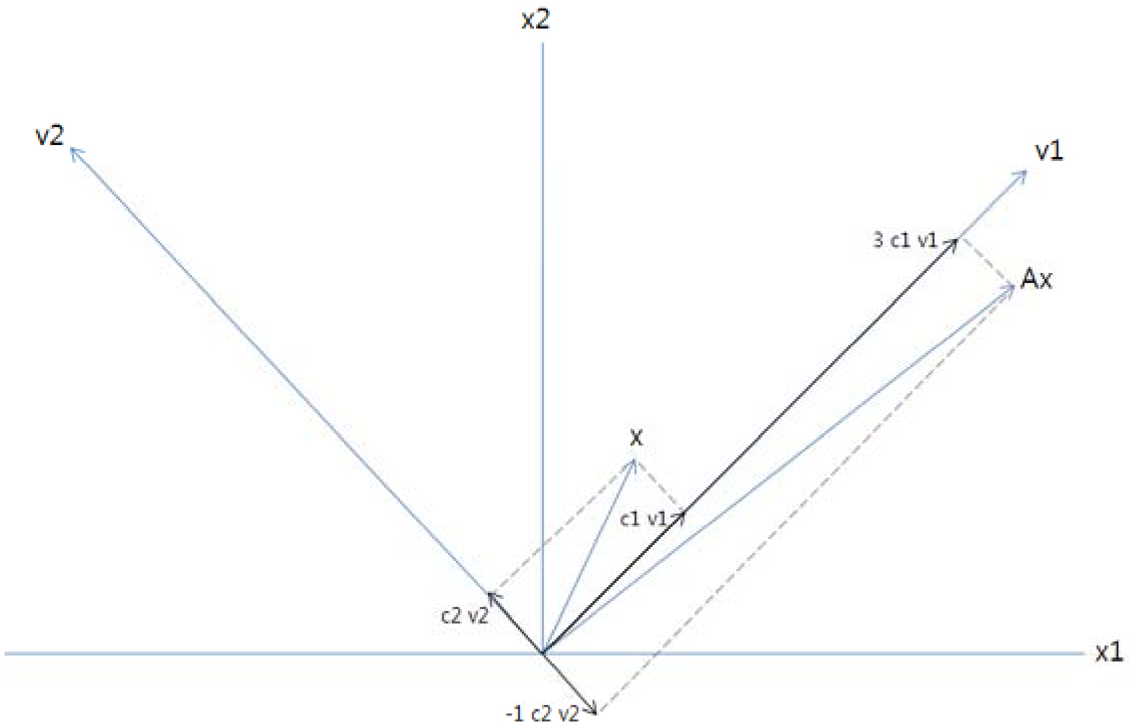
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = c1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x1 = c1 - c2\,,\ x2 = c1 + c2$$

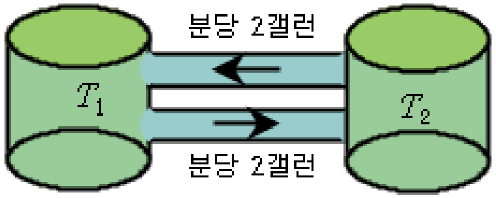
$$c1 = \frac{x1 + x2}{2}\,,\ c2 = \frac{x2 - x1}{2}$$

$$Ax = \lambda 1\, c1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda 2\, c2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

Ex. 1 Mixing Problem Involving Two Tanks



- Tank T_1 : pure water 100 gal
- Tank T_2 : water 100 gal (fertilizer 150 lb dissolved)
- By circulating liquid at a rate of 2 gal/min and stirring (to keep the mixture uniform)

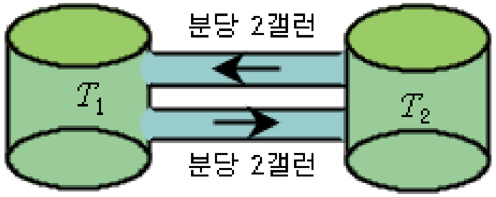
$y_1(t)$: amount of fertilizer in T_1, $y_2(t)$: amount of fertilizer in T_2

How long should we let the liquid circulate so that T_1 will contain at least half as much fertilizer as there will be left in T_2?

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

Ex. 1 Mixing Problem Involving Two Tanks

- Tank T_1 : pure water 100 gal
- Tank T_2 : water 100 gal (fertilizer 150 lb dissolved)
- By circulating liquid at a rate of 2 gal/min and stirring (to keep the mixture uniform)



$y_1(t)$: amount of fertilizer in T_1, $y_2(t)$: amount of fertilizer in T_2

How long should we let the liquid circulate so that T_1 will contain at least half as much fertilizer as there will be left in T_2?

Step 1 Setting up the model

$$y_1' = \text{분당 유입량} - \text{분당 유출량} = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1 \quad (\text{탱크 } T_1) \Rightarrow y_1' = -0.02y_1 + 0.02y_2$$

$$y_2' = \text{분당 유입량} - \text{분당 유출량} = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2 \quad (\text{탱크 } T_2) \Rightarrow y_2' = 0.02y_1 - 0.02y_2$$

$$\therefore \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

Step 2 General Solution

Idea: t 에 대한 지수함수로 시도

$e^{\lambda t}$ for both y_1 and y_2

$$y_1''-(a_{11}+a_{22})y_1'+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y_1=0$$

$$y_2''-(a_{11}+a_{22})y_2'+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y_2=0$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}e^{\lambda t} \Rightarrow \mathbf{y}'=\lambda\mathbf{x}e^{\lambda t}=\mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \Rightarrow$$ 행렬 A의 고유값과 고유벡터 계산

특성방정식:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-0.02-\lambda & 0.02\\ 0.02 & -0.02-\lambda\end{vmatrix}=(-0.02-\lambda)^2-0.02^2=\lambda(\lambda+0.04)=0$$

$\Rightarrow$ 고유값 : $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-0.04$ 고유벡터 : $\mathbf{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

중첩의 원리 적용

$$\mathbf{y}=c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t}=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-0.04t}$$ (c_1 과 c_1 는 임의의 상수)

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

Step 3 Use of initial conditions

초기조건 : $y_1(0)=0, \quad y_2(0)=150$

$$\mathbf{y}(0)=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_1-c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\150\end{bmatrix} \Rightarrow \quad c_1=75, \quad c_2=-75$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}=75\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-75\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-0.04t}$$

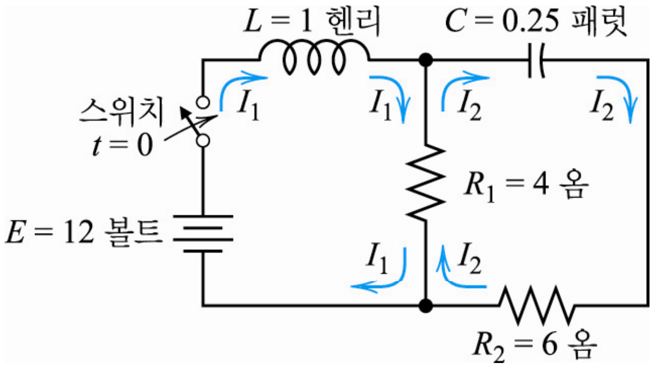
Step 4 Answer

탱크 T_1 이 50파운드의 비료를 포함하면, 탱크 T_1 이 포함한 비료의 양이
탱크 T_2 가 포함한 비료 양의 반

$$y_1=75-75e^{-0.04t}=50 \quad \Rightarrow \quad e^{-0.04t}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad t=\ln 3 / 0.04=27.5$$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

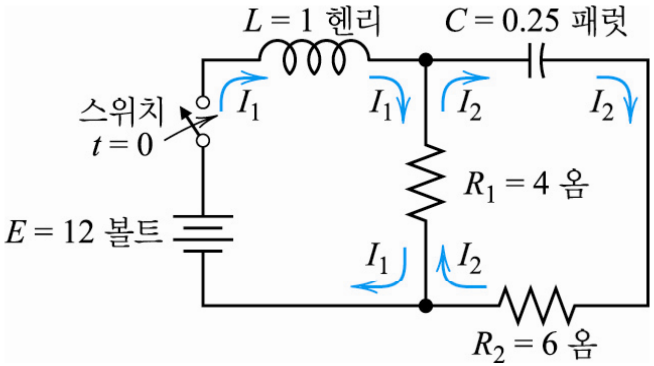
■ **Ex. 2 Electrical Network**



Find the currents, $I_1(t)$ and $I_2(t)$ in the network. Assume all currents and charges to be zero at $t = 0$, the instant when switch is closed.

4.1 Systems of ODEs as Models
(연립상미분방정식 모델)

■ **Ex. 2 Electrical Network**



Find the currents, $I_1(t)$ and $I_2(t)$ in the network. Assume all currents and charges to be zero at $t=0$, the instant when switch is closed.

Step 1 Setting up the mathematical model: Kirchhoff의 전압법칙 적용

왼쪽 루프 : $I_1'+4(I_1-I_2)=12 \Rightarrow I_1'=-4I_1+4I_2+12$

오른쪽 루프 : $6I_2+4(I_2-I_1)+4\int I_2 dt=0 \Rightarrow I_2'-0.4I_1'+0.4I_2=0$

$$\Rightarrow I_2'=-1.6I_1+1.2I_2+4.8$$

$$\therefore \ \mathbf{J}'=A\mathbf{J}+\mathbf{g}, \quad \mathbf{J}=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}=\begin{bmatrix} 12.0 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

Step 2 **General Solution**

제차 연립방정식 $\mathbf{J}' = A\mathbf{J}$ 에 $\mathbf{J} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ 를 대입하면 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 이므로
A의 고유값과 고유벡터 계산

고유값 $\lambda_1 = -2$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

고유값 $\lambda_2 = -0.8$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

제차 연립미분방정식의 일반해 : $\mathbf{J}_h = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t}$

4.1 Systems of ODEs as Models
(연립상미분방정식 모델)

비제차 연립미분방정식의 특수해 구하기

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ 라 하면, } \quad \mathbf{J}_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로 } \quad A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

일반해 :

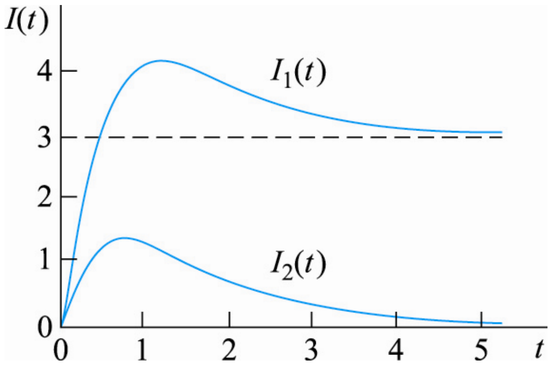
$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4.0a_1 + 4.0a_2 + 12.0 = 0 \\ -1.6a_1 + 1.2a_2 + 4.8 = 0 \end{array} \Rightarrow a_1 = 3, \quad a_2 = 0 \quad \therefore \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

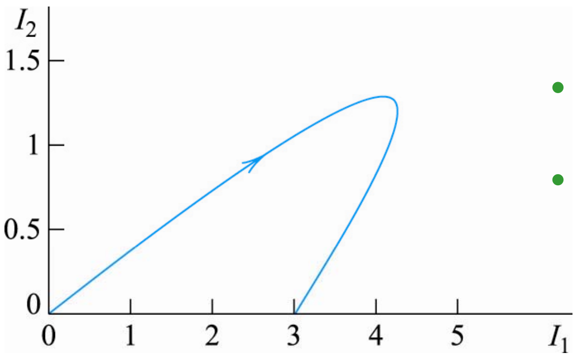
$$\mathbf{J} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} I_1 = 2c_1e^{-2t} + c_2e^{-0.8t} + 3 \\ I_2 = c_1e^{-2t} + 0.8c_2e^{-0.8t} \end{array}$$

초기조건 적용

$$\begin{array}{l} I_1(0) = 2c_1 + c_2 + 3 = 0 \\ I_2(0) = c_1 + 0.8c_2 = 0 \end{array} \Rightarrow c_1 = -4, \quad c_2 = 5 \quad \therefore \quad \begin{array}{l} I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3 \\ I_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0.8t} \end{array}$$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)





- 그림 79a는 $I_1(t)$과 $I_2(t)$의 곡선을 개별적으로 나타낸 것
- 그림 79b는 I_1I_2-평면에서 하나의 곡선 $[I_1(t), I_2(t)]$을 그린 것 ⇒ t를 parameter(매개변수)로 하는 매개변수표현식
- I_1I_2- 평면을 방정식 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 의 phase plane (상평면)이라 함
- 상편면에서의 곡선을 Trajectory(궤적)라 한다.
- 상평면의 궤적이 전체 해집합의 일반적인 양상을 잘 표현할 수 있음

4.1 Systems of ODEs as Models
(연립상미분방정식 모델)

- **Conversion of an *n* th-Order ODE to a System**

- ***n* 계 상미분방정식**: $y^{(n)} = F\left(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$

- **1계 연립상미분방정식으로의 변환**

$$y_1 = y,\ \ y_2 = y',\ \ y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \ \Rightarrow \ \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F\left(t, y_1, y_2, \cdots, y_n\right) \end{aligned}$$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

■ **Ex. 3 Mass on a Spring**

앞에서 다룬 용수철에 달린 물체의 자유진동을 모델화하는 문제에 변환방법을 적용

$$my''+cy'+ky=0 \xrightarrow{y_1=y,\ y_2=y'} \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1-\frac{c}{m}y_2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0 \Rightarrow$$ 2.4 절의 특성방정식과 일치

4.1 Systems of ODEs as Models
(연립상미분방정식 모델)

$m = 1$, $c = 2$, and $k = 0.75$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

m = 1, c = 2, and k = 0.75

고유값 $\lambda_1 = -0.5$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

고유값 $\lambda_2 = -1.5$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$

제차 연립미분방정식의 일반해 : $y = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{bmatrix} e^{-1.5t}$

4.1 Systems of ODEs as Models (연립상미분방정식 모델)

PROBLEM SET 4.1

HW: 16

4.2 Basic Theory of Systems of ODEs (연립상미분방정식에 대한 기본 이론)

- **Systems of ODEs**

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

- **Solution Vector (벡터해):**

  어떤 구간 $a < t < b$ 에서 연립상미분방정식을 만족하는 미분가능한 n개의 함수들 $y_1 = h_1(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$ 의 집합.

- **Initial Conditions**

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \longrightarrow \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

4.2 Basic Theory of Systems of ODEs (연립상미분방정식에 대한 기본 이론)

- **Existence and Uniqueness Theorem**

연립상미분방정식의 $f_1, \cdots, f_n$ 이 점 $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$ 을 포함하는 공간 내의 어떤 영역 R에서 연속인 함수이고, 이 영역에서 연속인 편도함수

$\partial f_1/\partial y_1, \cdots, \partial f_1/\partial y_n, \cdots, \partial f_n/\partial y_n$ 를 갖는다고 하자.

그러면 연립상미분방정식은 어떤 구간 $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$ 에서 초기조건을 만족하는 해를 가지며 이 해는 유일하다.

4.2 Basic Theory of Systems of ODEs
(연립상미분방정식에 대한 기본 이론)

- **Linear System**

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$$

- **Homogeneous:** $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$
- **Nonhomogeneous:** $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$

4.2 Basic Theory of Systems of ODEs (연립상미분방정식에 대한 기본 이론)

- **Existence and Uniqueness in the Linear Case**

선형연립미분방정식의 a_{jk} 와 g_j 가 점 $t = t_0$ 를 포함하는 열린 구간 $\alpha < t < \beta$ 내에서 t 의 연속함수라 하자. 그러면 선형연립미분방정식은 이 구간에서 초기조건을 만족하는 해를 가지며 이 해는 유일하다.

- **Superposition Principle or Linearity Principle**

$\mathbf{y}^{(1)}$ 과 $\mathbf{y}^{(2)}$ 가 어떤 주어진 구간에서 제차선형연립방정식의 해이면, 그들의 일차 결합 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)}$ 또한 제차선형연립방정식의 해이다.

4.2 Basic Theory of Systems of ODEs (연립상미분방정식에 대한 기본 이론)

- **Basis or Fundamental System:**

  미분아님

  어떤 구간 *J* 에서 일차 독립인 *n* 개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$

- **General Solution:**

  기저들의 일차결합 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$ $(c_1, \cdots, c_n$ 은 임의의 상수$)$

- 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 에서 모든 $a_{jk}(t)$ 가 구간 *J* 에서 연속이면,
  방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 는 에서 해의 기저를 갖는다는 사실을 보일 수 있음.

- 이 경우에 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 는 *J* 에서 일반해를 가지고, 일반해는 모든 해를 포함.

- **Fundamental Matrix (기본행렬)**: *n* 개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$ 를 열로 가지는 $n \times n$ 행렬

- **Wronskian**: 기본행렬의 행렬식

4.2 Basic Theory of Systems of ODEs
(연립상미분방정식에 대한 기본 이론)

$$W(y^{(1)},\cdots,y^{(n)})=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Cf) Section 2.6

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- 상수계수를 갖는 선형연립방정식의 해법

상수계수를 갖는 선형연립방정식: $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{A} = [a_{jk}]$, a_{jk} 는 상수

Idea $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ 으로 시도

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$: Eigenvalue Problem으로 변환

- **General Solution**

연립미분방정식의 상수행렬이 n 개의 일차 독립인 고유벡터를 갖는다면 이에 대응하는 식 $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ 의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$ 는 연립방정식의 해의 기저를 형성하고, 이에 대응되는 일반해는 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ 이다.

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- **How to Graph Solutions in the Phase Plane**

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \left(\Leftrightarrow \begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{array} \right) \text{ 의 일반해 } \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

- 성분 $y_1(t)$와 $y_1(t)$를 t-축 위에 두 개의 곡선으로 나타냄.
- 매개변수 t를 사용한 매개변수표현법 (또는, 매개변수방정식):

  y_1y_2 − 평면에 하나의 곡선으로 나타낼 수 있음.

- 용어정리

- **Trajectory (궤적)**, 때로는 **Orbit (궤도)**, **Path (경로)**: y_1y_2 − 평면의 곡선
- **Phase Plane (상평면)**: y_1y_2 − 평면
- **Phase Portrait (상투영)**: 상평면을 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 의 궤적들로 채워서 얻는다.

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

■ **Ex. 1 Trajectories in the Phase Plane (Phase Portrait)**

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Characteristic Equation:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

고유값 $\lambda_1 = -2$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

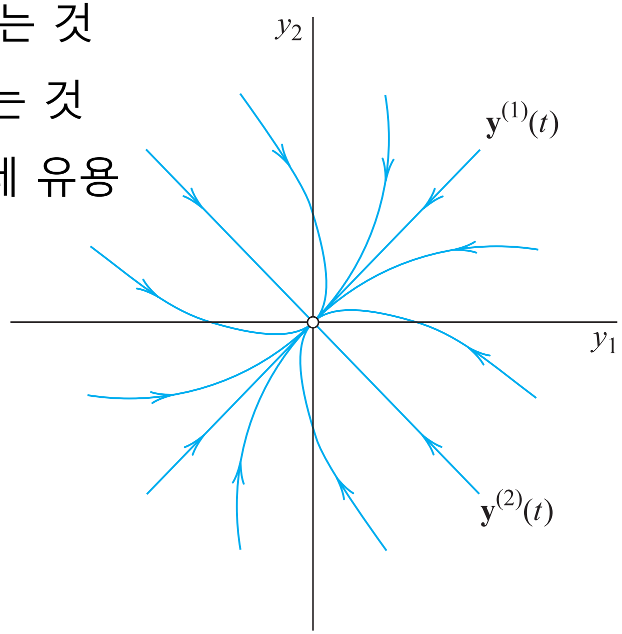
고유값 $\lambda_2 = -4$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

General Solution :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t}$$

- 두 개의 직선궤적은 각각 $c_1 = 0$ 과 $c_2 = 0$ 에 대응하는 것
- 나머지 궤적들은 다르게 선택된 c_1, c_2 의 값에 대응하는 것
- 상투영은 일반적으로 해 전체를 정성적으로 파악하는데 유용
- 해를 구하기가 어렵거나 불가능한 경우에 유용



4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- 연립미분방정식의 **Critical Point (임계점)**: dy_2 / dy_1 이 정의되지 않는 점

Ex.

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{dy_2/dt}{dy_1/dt} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

- 점 $P = P_0 : (0,0)$ 을 제외한 임의의 점 $P : (y_1, y_2)$ 을 지나는 궤적은 이 점에서 유일한 접선방향 dy_2 / dy_1 을 갖게 됨.

- 원점 P_0 에서 dy_2 / dy_1 은 $0/0$ 이 되어 정의되지 않음. → Critical Point

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- **Five Types of Critical Points:**

  임계점은 근방에서 궤적의 모양에 따라 5가지 유형으로 구분.

- Improper Node (비고유마디점)
- Proper Node (고유마디점)
- Saddle Point (안장점)
- Center (중심점)
- Spiral Point (나선점)

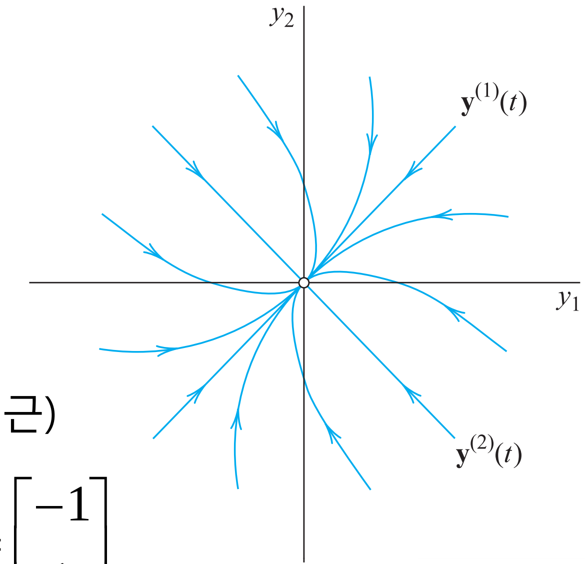
4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

■ Ex. 1 **Improper Node:**

두 개의 궤적을 제외한 모든 궤적이 주어진 점에서 같은 접선방향의 극한을 갖는 경우.

- 예외적인 두 개의 궤적도 주어진 점에서 접선방향의 극한을 갖게 됨
- 극한값은 앞의 극한값과 다르다.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$



- 공통인 접선방향이 극한은 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 임.

(t 가 증가할 때 e^{-4t} 가 e^{-2t} 보다 훨씬 더 빨리 0에 접근)

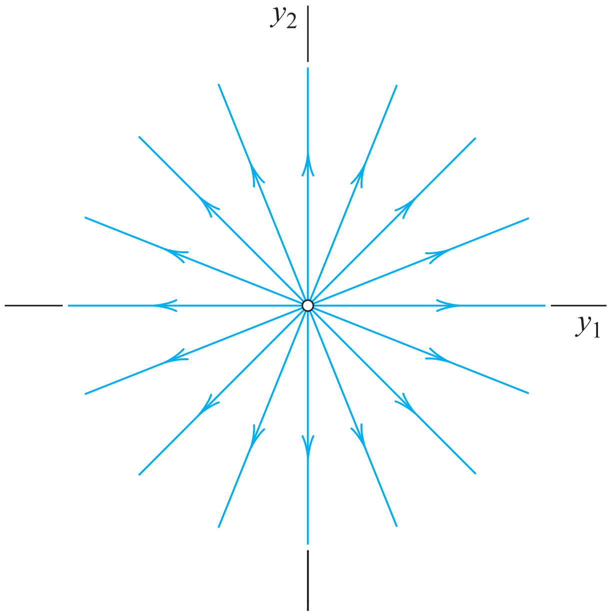
- 예외적인 궤적의 접선방향극한: $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $-\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

■ Ex. 2 **Proper Node :**

모든 궤적이 명확한 접선방향의 극한을 가지고,
임의로 주어진 방향 d에 대하여 d를 극한방향으로 가지는 궤적이 존재하는 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \left(즉, \quad \begin{matrix} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{matrix} \right)$$



General Solution:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = c_1 e^t \\ y_2 = c_2 e^t \end{matrix}$$

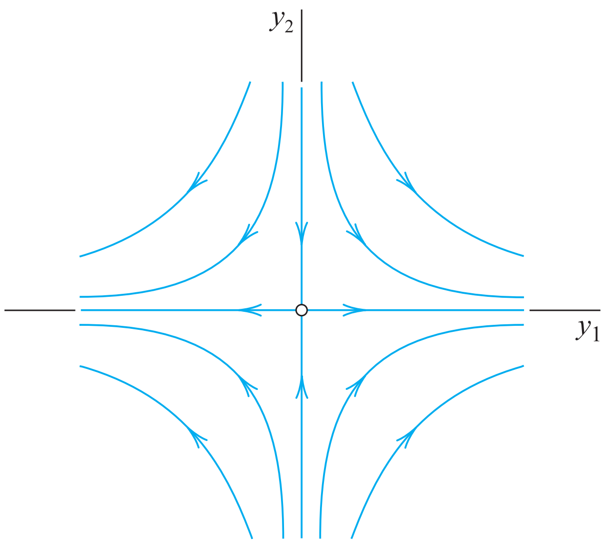
$$\Rightarrow \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

■ Ex. 3 **Saddle Point:**

두 개의 들어오는 궤적과 두 개의 나아가는 궤적이 존재하고,
나머지 궤적은 주어진 점을 지나지 않고 우회하는 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \left(\text{즉} \quad \begin{array}{l} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{array} \right)$$



General Solution :

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = c_1 e^{t} \\ y_2 = c_2 e^{-t} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 y_2 = \text{상수}$$

- 두 좌표축과 쌍곡선족(族)이다

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- Ex. 4 **Center:**

무수히 많은 폐곡선으로 이루어진 궤적으로 둘러싸인 임계점을 말함.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \left(\text{즉}, \quad \begin{matrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 \end{matrix} \right)$$

Characteristic Equation: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i$

고유값 $\lambda_1 = 2i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$

고유값 $\lambda_1 = -2i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

General Solution:

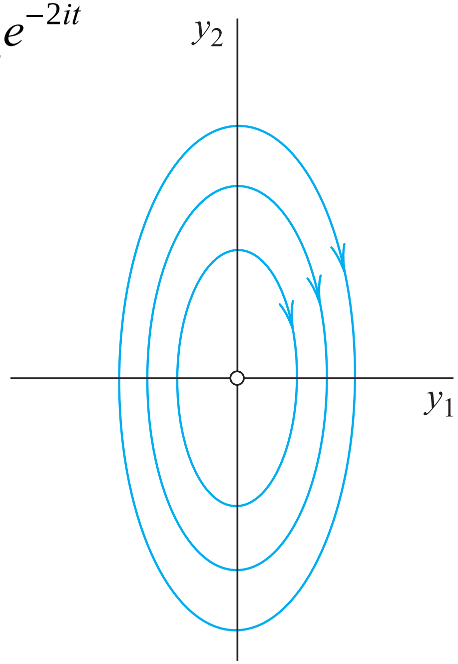
$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it} \\ y_2 &= 2ic_1 e^{2it} - 2ic_2 e^{-2it} \end{aligned}$$

궤적그리기

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -4y_1$$

$$\Rightarrow \quad 4y_1 y_1' = -y_2 y_2'$$

$$\Rightarrow \quad 2y_1^{\,2} + \frac{1}{2} y_2^{\,2} = \text{상수}$$



4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

■ Ex. 5 **Spiral Point:**

$t \to \infty$ 를 취할 때, 임계점 근방에서 나선형의 궤적이 임계점으로 향하여 접근하는 (혹은 임계점로부터 벗어나 멀어지는) 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \left(\text{즉} \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{aligned} \right)$$

특성방정식: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm i$

고유값 $\lambda_1 = -1 + i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

고유값 $\lambda_1 = -1 - i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

일반해 : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

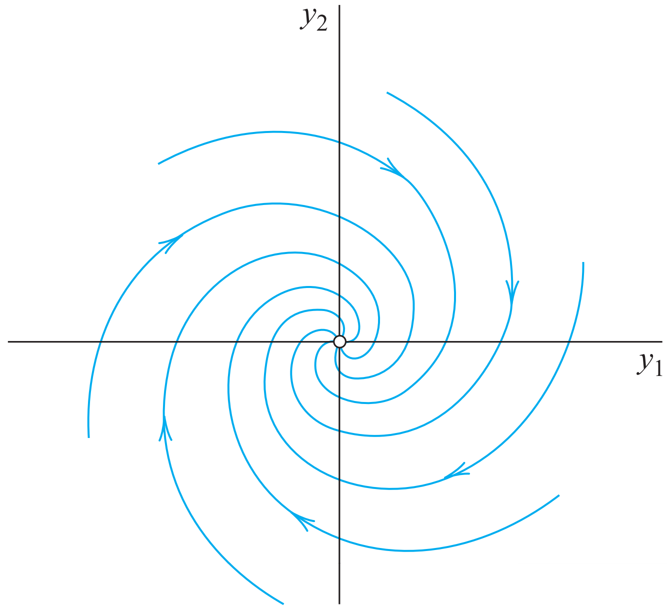
궤적그리기

$$y_1' = -y_1 + y_2,\quad y_2' = -y_1 - y_2 \xrightarrow[\quad]{\text{극좌표 이용}\ r^2 = y_1^2 + y_2^2} \frac{1}{2}\left(r^2\right)' = -r^2 \xrightarrow{\left(r^2\right)' = 2rr'} rr' = -r^2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 y_1' + y_2 y_2' = -\left(y_1^2 + y_2^2\right)$$

변수분리형 해법에 의하여 적분하면

$$\ln r = -t + c^* \quad \Rightarrow \quad r = ce^{-t}$$



4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- **고유벡터가 기저를 형성하지 않는 경우. Degenerate Node (퇴화마디점)**

- 대칭행렬($a_{kj}=a_{jk}$)이거나 반대칭행렬($a_{kj}=-a_{jk}$, $a_{jj}=0$)과 같은 경우, 고유벡터들로 이루어진 기저가 존재한다.

- $n\times n$ 행렬 A가 중복고유값 λ (즉, λ 가 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ 의 중복근)를 가지고,

  λ 에 대응하는 고유벡터(의 상수배는 같은 것으로 취급하여)가 오직 하나 뿐이라고

  가정

  $\Rightarrow$ 우선 하나의 해 $\mathbf{y}^{(1)}=\mathbf{x}e^{\lambda t}$ 를 얻음.

  $\mathbf{y}^{(1)}$ 과 일차독립인 두 번째 해: $\mathbf{y}^{(2)}=\mathbf{x}te^{\lambda t}+\mathbf{u}e^{\lambda t}$

$$\left(\mathbf{y}^{(2)}\right)'=\mathbf{x}e^{\lambda t}+\lambda\mathbf{x}te^{\lambda t}+\lambda\mathbf{u}e^{\lambda t}=\mathbf{A}\mathbf{y}^{(2)}=\mathbf{A}\mathbf{x}te^{\lambda t}+\mathbf{A}\mathbf{u}e^{\lambda t}\quad(\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{x}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{u}\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{x}$$

.

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

- Ex. 6 **Degenerate Node**

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

■ Ex. 6 **Degenerate Node**

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

● **Solution**

특성방정식: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3,\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

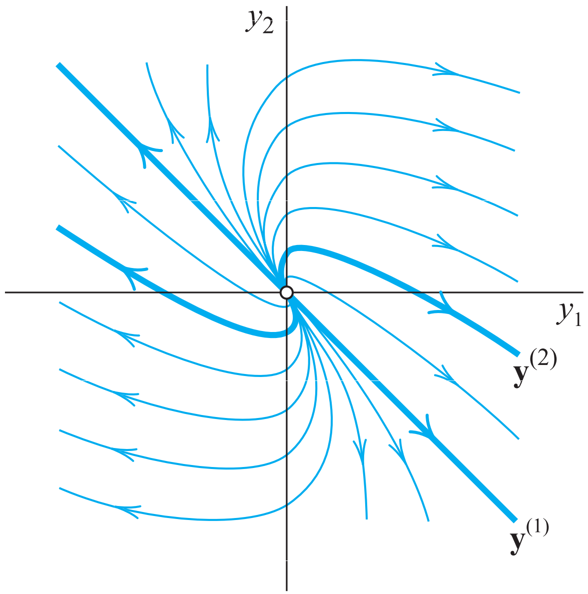
일반해:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$$

4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

● **그래프 관찰**

- $c_1\mathbf{y}^{(1)}$ 의 그래프는 굵게 표시된 직선
- 제4사분면의 반직선은 $c_1 > 0$ 인 경우
- 제2사분면의 반직선은 $c_1 < 0$ 인 경우
- 굵은 곡선의 오른쪽은 $\mathbf{y}^{(2)}$ 를 왼쪽부분은 $-\mathbf{y}^{(2)}$



4.3 Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method (상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법)

PROBLEM SET 4.3

HW: 9

4.4 Criteria for Critical Points. Stability (임계점에 대한 판별기준. 안정성)

- **Criteria for Types of Critical Points (임계점 유형의 판별기준)**

행렬 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 의 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 고유값

특성방정식 : $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\det\mathbf{A}=0$

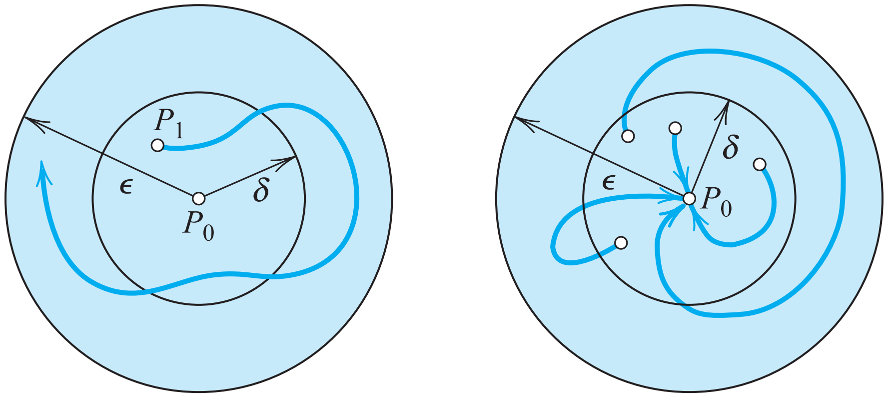
$p=a_{11}+a_{22}$ (고유값의 합), $q=\det\mathbf{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (고유값의 곱),

$\Delta=p^2-4q$ (판별식)

- **Eigenvalue Criteria for Critical Points**

Name	$p=\lambda_1+\lambda_2$	$q=\lambda_1\lambda_2$	$\Delta=(\lambda_1-\lambda_2)^2$	Comments on λ_1,λ_2
(a) Node		$q>0$	$\Delta \geqq 0$	Real, same sign
(b) Saddle point		$q<0$		Real, opposite sign
(c) Center	$p=0$	$q>0$		Pure imaginary
(d) Spiral point	$p\neq 0$		$\Delta<0$	Complex, not pure imaginary

4.4 Criteria for Critical Points. Stability
(임계점에 대한 판별기준. 안정성)



- **Stable Critical point (안정적 임계점)**:

  어떤 순간 $t = t_0$ 에서 임계점에 아주 가깝게 접근한 모든 궤적이 이후의 시간에서도 임계점에 아주 가까이 접근한 상태로 남아 있는 경우.

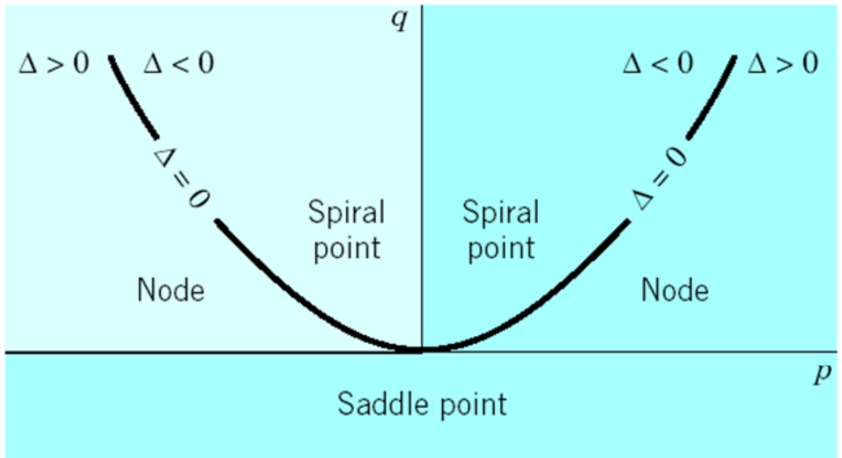
- **Unstable Critical point (불안정적 임계점)**: 안정적이 아닌 임계점
- **Stable and Attractive Critical point (안정적 흡인 임계점)**:

  안정적 임계점이고, 임계점 근처 원판 내부의 한 점을 지나는 모든 궤적이 $t \to \infty$ 를 취할 때 임계점에 가까이 접근하는 경우

4.4 Criteria for Critical Points. Stability (임계점에 대한 판별기준. 안정성)

Name	$p = \lambda_1 + \lambda_2$	$q = \lambda_1 \lambda_2$	$\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$	Comments on λ_1, λ_2
(a) Node		$q > 0$	$\Delta \geqq 0$	Real, same sign
(b) Saddle point		$q < 0$		Real, opposite sign
(c) Center	$p = 0$	$q > 0$		Pure imaginary
(d) Spiral point	$p \neq 0$		$\Delta < 0$	Complex, not pure imaginary

Stable and attractive: the second quadrant without the q-axis
Stability also on the positive q-axis (which corresponds to centers)
Unstable: dark blue region



4.4 Criteria for Critical Points. Stability
(임계점에 대한 판별기준. 안정성)

■ Ex. 2 **Free Motions of a Mass on a Spring**

What kind of critical point does $my''+cy'+ky=0$ have?

No damping:

Under damping:

Critical damping:

Overdamping:

4.4 Criteria for Critical Points. Stability (임계점에 대한 판별기준. 안정성)

■ Ex. 2 **Free Motions of a Mass on a Spring**

What kind of critical point does $my''+cy'+ky=0$ have?

$$\mathbf{y}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -c/m-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{c}{m}\lambda+\frac{k}{m}=0$$

No damping: $c = 0$, $p = 0$, $q > 0$, a center

Under damping: $c^2 < 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta < 0$, a stable and attractive spiral point

Critical damping: $c^2 = 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta = 0$, a stable and attractive node

Overdamping: $c^2 > 4mk$, $p < 0$, $q > 0$, $\Delta > 0$, a stable and attractive node

4.4 Criteria for Critical Points. Stability (임계점에 대한 판별기준. 안정성)

PROBLEM SET 4.4

HW: 16

4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

- **Qualitative Method (정성법)**
  - 방정식의 해를 실제로 구하지 않으면서 해에 대한 정성적인 정보를 얻는 방법
  - 연립방정식의 해를 해석적으로 구하기 어렵거나 불가능한 경우에 매우 유용한 방법
  - 상평면법을 선형연립방정식으로부터 비선형연립방정식으로 확장

4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

비선형 연립방정식

비선형연립방정식의 선형화

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \xrightarrow{\qquad\qquad} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

따라서 $\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$

따라서

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

- **Linearization**

비선형 연립방정식의 f_1과 f_2가 임계점 P_0근방에서 연속이고 또한 연속인 도함수를

가지며, $\det \mathbf{A} \neq 0$이면, 비선형연립방정식의 임계점에 대한 유형및 안정성은 선형화를

통해 얻어진 선형연립방정식

$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$ 따라서 $\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$

의 유형 및 안정성과 같다.

4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

■ Ex. 1 **Free Undamped Pendulum. Linearization (자유비감쇠진자. 선형화)**

A pendulum consisting of a body of mass *m* (the bob) and a rod of length *L*.
Determine the locations and types of the critical points.
Assume that the mass of the rod and air resistance are negligible.

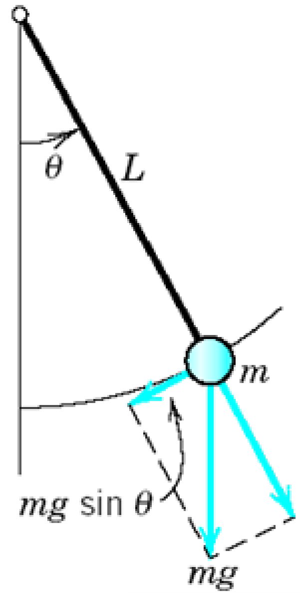
Step 1 Setting up the mathematical model.

θ : 평형위치로부터 반시계방향으로 측정된 변위각

추의 무게 : mg $\rightarrow$ 추의 운동곡선의 접선방향으로 복원력 : $mg\sin\theta$

*Newton*의 제2법칙 적용 : 복원력은 가속력 $mL\theta''$과 평형

$$\therefore\ mL\theta'' + mg\sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta'' + k\sin\theta = 0 \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$



4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

Step 2 **Critical points** $(0,0),\ (\pm 2\pi,0),\ (\pm 4\pi,0),\ \cdots$ **, Linearization.**

$$\theta'' + k\sin\theta = 0 \xrightarrow{y_1 = \theta,\ y_2 = \theta' \text{ 로 치환}} \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k\sin y_1 \end{aligned}$$

$y_2 = 0,\ \sin y_1 = 0 \ \rightarrow$ 임계점 : $(n\pi, 0),\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$

임계점 $(0,0)$을 고려

Maclaurin 급수 $\sin y_1 = y_1 - \frac{1}{6}y_1^{\,3} + -\cdots \approx y_1$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{따라서} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 \end{aligned}$$

$p = a_{11} + a_{22} = 0,\ q = \det\mathbf{A} = k = \frac{g}{L},\quad \Delta = p^2 - 4q = -4k \quad \Rightarrow$ 임계점 유형 : 안정한 중심

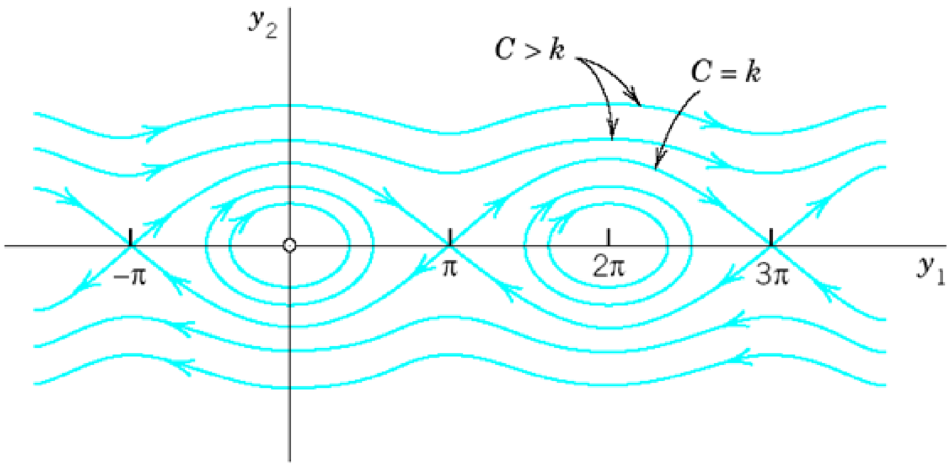
4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

Step 3 **Critical points** $(\pm\pi, 0), (\pm 3\pi, 0), (\pm 5\pi, 0), \cdots$, **Linearization.**

임계점 $(\pi, 0)$을 고려

$$\theta'' + k\sin\theta = 0 \xrightarrow[\sin\theta = \sin(y_1+\pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{1}{6}y_1{}^3 - + \cdots \approx -y_1]{y_1 = \theta - \pi,\ y_2 = (\theta-\pi)' = \theta' \text{ 로 치환}} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

$p = 0,\ q = -k(<0),\quad \Delta = p^2 - 4q = 4k \quad \Rightarrow$ 임계점 유형 : 안장점(불안정한)



4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

- **Transformation to a First-Order Equation in the Phase Plane (상평면에서 1계방정식으로의 변환)**

$$F(y, y', y'') = 0 \xrightarrow[\displaystyle y'' = y_2' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2]{y = y_1,\ y' = y_2 \text{로 치환}} F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1} y_2\right) = 0$$

$$\theta'' + k\sin\theta = 0,\ \theta = y_1,\ \theta' = y_2$$

$$\theta'' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1} y_2 = -k\sin\theta$$

$$y_2 dy_2 = -k\sin y_1 dy_1$$

$$\frac{1}{2} y_2^2 = k\cos y_1 + C$$

$$\frac{1}{2} m(Ly_2)^2 - mL^2 k\cos y_1 = mL^2 C$$

4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems (비선형연립방정식에 대한 정성법)

PROBLEM SET 4.5

HW: 16

4.6 Nonhomogeneous Linear Systems of ODEs (비제차 선형연립방정식)

$t-$

- **Nonhomogeneous of Linear Systems (비제차 선형연립미분방정식)**: $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g},\ \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$

  $g(t)$ 와 행렬 $A(t)$의 모든 성분은 t-축의 어떤 구간 J에서 연속이라고 가정

  일반해: $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)}$

- $\mathbf{y}^{(h)}$: 제차방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 의 general solution
- $\mathbf{y}^{(p)}$: 비제차방정식의 particular solution (임의의 상수를 포함하지 않는 해)

- **Particular Solution $\mathbf{y}^{(p)}$ 를 구하는 방법**

- Method of Undetermined Coefficients (미정계수법)
- Method of the Variation of Parameter (매개변수변환법)

4.6 Nonhomogeneous Linear Systems of ODEs (비제차 선형연립방정식)

- **미정계수법**: 벡터 g 의 성분이 t 의 거듭제곱, 지수함수, 사인함수와 코사인함수 등으로 이루어져 있을 때 적합.

■ Ex. 1 **Find a general solution of**

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

제차연립방정식의 일반해: $\mathbf{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

미정계수법에 의하여 비제차연립방정식의 특수해 구하기

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u} t e^{-2t} + \mathbf{v} e^{-2t} \qquad \left(\mathbf{y}^{(p)}\right)' = \mathbf{u} e^{-2t} - 2\mathbf{u} t e^{-2t} - 2\mathbf{v} e^{-2t} = \mathbf{A}\mathbf{u} t e^{-2t} + \mathbf{A}\mathbf{v} e^{-2t} + \mathbf{g}$$

te^{-2t} 항의 계수 : $-2\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (a : 임의의 상수)

e^{-2t}항의 계수 : $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -2, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k \\ k+4 \end{bmatrix}$ ($k = 0$으로 선택)

일반해 : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

4.6 Nonhomogeneous Linear Systems of ODEs (비제차 선형연립방정식)

- **매개변수변환법:**

  t-축의 어떤 구간 J 상에서 제차연립미분방정식의 일반해

  $\mathbf{y}^{(h)} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(n)}$ 를 이미 알고 있을 때, 이 일반해를 이용하여 방정식의 한 특수해를 찾아내는 방법

제차연립방정식의 일반해: $\mathbf{y}^{(h)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c} \quad (\because\ \mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y})$

비제차연립방정식의 특수해를 $\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{u}(t)$ 라 하자.

$$\left(\mathbf{y}^{(p)}\right)' = \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tilde{t})\mathbf{g}(\tilde{t})\,d\tilde{t}$$

4.6 Nonhomogeneous Linear Systems of ODEs (비제차 선형연립방정식)

■ Ex. 2 **Solve Ex. 1 by the method of variation of parameters.**

$$\mathbf{y}^{(h)} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}$$

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-6t}} \begin{bmatrix} -e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -8e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \int_0^t \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2\tilde{t}} \end{bmatrix} d\tilde{t} = \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - 2 \\ -2t + 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

$$\therefore \; y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

4.6 Nonhomogeneous Linear Systems of ODEs (비제차 선형연립방정식)

PROBLEM SET 4.6

HW: 19