Engineering Mathematics I

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, ysna@snu.ac.kr, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 8 Linear Algebra: Matrix Eigenvalue Problems

Ch. 8 Linear Algebra: Matrix Eigenvalue Problems (선형대수학: 행렬의 고유값 문제)

- 내용 : 고유값 문제, 여러 가지 행렬, 대각화를 통한 문제 해결법

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

- **Eigenvalues, Eigenvector**

$\mathbf{A}$가 $n \times n$행렬일 때, 만약 $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$인 $\mathbf{0}$이 이닌 벡터 $\mathbf{x}$가 존재하면 스칼라 λ를 $\mathbf{A}$의 Eigenvalue(고유값)라 한다. λ가 $\mathbf{A}$의 고유값이면, $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$인 $\mathbf{0}$이 아닌 모든 벡터는 λ에 대응하는 $\mathbf{A}$의 Eigenvector(고유벡터)라 한다.

- 고유값과 고유벡터를 구하는 방법

$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$: 제차선형연립방정식

$\Rightarrow \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$인 자명하지 않는 해를 가질 필요충분조건$(\Rightarrow$ 계수행렬식$=0)$

$\Rightarrow \quad D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ (특성방정식)의 해인 λ가 $\mathbf{A}$의 고유값

$D(\lambda)$: Characteristic determinant

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

■ Ex. 1 Illustrate all the steps in terms of the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Step 1 Eigenvalues

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -1, \ \lambda = -6 \ (\mathbf{A}\text{의 고유값})$$

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

Step 2 Eigenvectors

$$\begin{aligned}(-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 &= 0\end{aligned} \xrightarrow{\lambda = -1} \begin{aligned}-4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0\end{aligned}$$

$$\longrightarrow x_2 = 2x_1 \xrightarrow{x_1 = 1} \text{고유벡터는 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(-5-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (-2-\lambda)x_2 &= 0\end{aligned} \xrightarrow{\lambda = -6} \begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0\end{aligned}$$

$$\longrightarrow x_2 = {-x_1}/{2} \xrightarrow{x_1 = 2} \text{고유벡터는 } x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

- **Eigenvalues**

정방행렬 $\mathbf{A}$의 고유값들은 $\mathbf{A}$의 특성방정식의 근이다.

따라서 $n \times n$ 행렬은 적어도 하나 이상, 많아야 n개의 서로 다른 고유값을 가진다.

- **Eigenvectors, Eigenspace**

만일 $\mathbf{w}$와 $\mathbf{x}$가 행렬 $\mathbf{A}$의 같은 고유값 λ에 대응하는 고유벡터인 경우, $\mathbf{w}+\mathbf{x}$(단 $\mathbf{x} \neq \mathbf{w}$)와 임의의 $k \neq 0$에 대하여 $k\mathbf{x}$도 고유벡터가 된다. 따라서 같은 고유값에 해당되는 벡터들은 $\mathbf{0}$ 벡터와 함께 하나의 벡터공간을 이루며, 이것을 고유값 λ에 해당되는 **고유공간** (Eigenspace)이라한다.

- **Eigenvalues of the Transpose**

정방행렬 $\mathbf{A}$의 전치 $\mathbf{A}^T$는 행렬 $\mathbf{A}$와 같은 고유값을 갖는다.

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

- Ex. 2 Find the eigenvalues and eigenvectors of $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

- Ex. 2 Find the eigenvalues and eigenvectors of $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Characteristic equation: $-\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = 0$ Eigenvalues: $\lambda = 5,\ \lambda = -3$(이중근)

$\lambda = 5$에 대한 특성행렬

$$\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{행을 간략화}} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_3 = -1} \text{고유벡터는} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -3$에 대한 특성행렬

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{행을 간략화}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{x_2 = 1,\ x_3 = 0} \text{고유벡터는} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{x_2 = 0,\ x_3 = 1} \text{고유벡터는} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

- **Algebraic Multiplicity (대수적 다중도):**

  Characteristic polynomial(특성다항식)의 근으로서 고유값의 차수

- **Geometric Multiplicity (기하적 다중도):**

  고유값에 대응하는 일차독립인 고유벡터의 수

- **Defect (부족지수):**

  대수적 다중도와 기하적 다중도의 차

- Ex. 3 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors (고유값, 고유벡터)

- **Algebraic Multiplicity (대수적 다중도):**

  Characteristic polynomial(특성다항식)의 근으로서 고유값의 차수

- **Geometric Multiplicity (기하적 다중도):**

  고유값에 대응하는 일차독립인 고유벡터의 수

- **Defect (부족지수):**

  대수적 다중도와 기하적 다중도의 차

■ Ex. 3 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

특성방정식 : $\lambda^2 = 0,\ (3-\lambda)^2 = 0$ $\Rightarrow$ 고유값 : $\lambda = 0,\ 3$ (이중근) $\Rightarrow$ 고유벡터 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

대수적 다중도 : 2

기하적 다중도 : 1

부족지수 : 1

8.1 Eigenvalues, Eigenvectors
(고유값, 고유벡터)

PROBLEM SET 8.1

HW: 24

8.2 Some Applications of Eigenvalue Problems (고유값 문제의 몇 가지 응용)

■ **Ex. 1 Stretching of an Elastic Membrane (탄성막의 팽창)**

경계로서 원 $x_1^2 + x_2^2 = 1$을 갖는 x_1x_2 평면상에 있는 탄성막을 잡아당겨 점 $P(x_1, x_2)$가

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ 또는 성분식으로 } \begin{aligned} y_1 &= 5x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

로 표현된 점 $Q(x_1, x_2)$로 가도록 한다. 이 경우 **주방향**(Principle Directions) 즉, Q의 위치벡터 $\mathbf{y}$의 방향이 P의 위치벡터 $\mathbf{x}$의 방향과 같은 방향 또는 정반대 방향이 되는 위치벡터 $\mathbf{x}$의 방향을 구하라. 이런 변형하에서 경계원은 어떤 꼴을 취하는지 살펴보라.

$$\text{특성방정식}: \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{고유값}: \lambda = 8,\ \lambda = 2$$

$$\lambda = 8\text{일 때, 고유벡터는 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 2\text{일 때, 고유벡터는 } x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

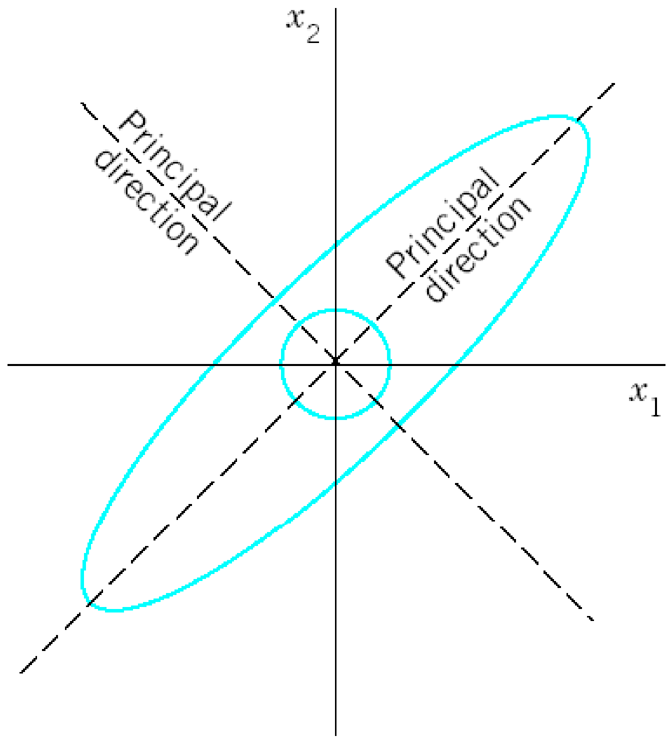
8.2 Some Applications of Eigenvalue Problems (고유값 문제의 몇 가지 응용)

주방향 : 양의 x_1축 방향과 45°와 135°의 각을 이루는 방향(고유벡터의 방향)

∗주방향으로 각각 8과 2만큼 팽창

$\Rightarrow$ 새로운 좌표계 : $z_1 = 8\cos\phi,\quad z_2 = 2\sin\phi$

$$\therefore\ \frac{z_1^{\,2}}{8^2} + \frac{z_2^{\,2}}{2^2} = 1 \text{ (타원)}$$



8.2 Some Applications of Eigenvalue Problems (고유값 문제의 몇 가지 응용)

■ Ex. 2 Eigenvalue Problems Arising from Markov Processes

Markov 과정에서, 상태벡터 $\mathbf{x}$가 공정을 결정짓는 확률행렬 $\mathbf{A}$와 곱해질때 자신의 값이 되는 즉, $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$와 같은 극한상태 문제를 다룰 경우의 고유값 문제가 된다. 따라서 확률행렬 $\mathbf{A}$는 고유값 1을 갖게 되며, $\mathbf{x}$는 이에 해당되는 고유벡터가 된다. 이러한 문제의 관심을 갖게 되는 이유는 이런 Markov 과정이 장기 모델을 설명해 주기 때문이다.

8.2 Some Applications of Eigenvalue Problems (고유값 문제의 몇 가지 응용)

■ Ex. 2 Eigenvalue Problems Arising from Markov Processes

Markov 과정에서, 상태벡터 $\mathbf{x}$가 공정을 결정짓는 확률행렬 $\mathbf{A}$와 곱해질때 자신의 값이 되는

즉, $\mathbf{Ax}=\mathbf{x}$와 같은 극한상태 문제를 다룰 경우의 고유값 문제가된다. 따라서 확률행렬 $\mathbf{A}$는

고유값 1을 갖게 되며, $\mathbf{x}$는 이에 해당되는 고유벡터가된다. 이러한 문제의 관심을 갖게 되는

이유는 이런 Markov 과정이 장기 모델을 설명해 주기 때문이다.

7.2 Ex. 13

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T\text{의고유값} : 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\text{의고유값} : 1$$

$$\lambda=1\text{일 때, 고유벡터는 } \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

확률행렬 $\mathbf{A}$가 변하지 않는다는 가정 하에 상업:공업:거주지역의 비율이 2:6:1로 접근함을 의미

8.2 Some Applications of Eigenvalue Problems (고유값 문제의 몇 가지 응용)

PROBLEM SET 8.2

HW: 17

8.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

- Square matrix (정방행렬) $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$에 대하여

- **Symmetric**: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
- **Skew-Symmetric**: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$
- **Orthogonal**: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

❖ 실수 정방행렬 **A**는 대칭행렬 **R**과 반대칭행렬 **S**의 합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

■ Ex. 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \mathbf{S}$$

8.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

- Square matrix (정방행렬) $\mathbf{A} = [a_{jk}]$에 대하여
  - **Symmetric**: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - **Skew-Symmetric**: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$
  - **Orthogonal**: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

❖ 실수 정방행렬 **A**는 대칭행렬 **R**과 반대칭행렬 **S**의 합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

■ Ex. 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 9.0 & 3.5 & 3.5 \\ 3.5 & 3.0 & -2.0 \\ 3.5 & -2.0 & 3.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0 & -6.0 \\ 1.5 & 6.0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

- **Eigenvalues of Symmetric and Skew-Symmetric Matrices (8.5)**
  - 대칭행렬의 고유값은 실수이다. (8.2 Ex. 1)
  - 반대칭행렬의 고유값은 순 허수이거나 영이다. $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0, -25i, 25i$
- **Orthogonal Transformation (직교변환):** $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ $(\mathbf{A}$는 직교행렬$)$

■ Ex. 각도 θ 만큼 평면회전은 직교변환이다.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- **내적값** $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = [a_1 a_2 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ $(R^n$의 임의의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b})$

- **길이** 또는 **노름**(Norm) : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$

8.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

- **Invariance of Inner Product**

  직교변환은 벡터의 내적값을 보존한다.

  또한 벡터의 길이 또는 노름(norm)도 보존한다.

$$u \bullet v = u^T v = (Aa)^T Ab = a^T A^T Ab = a^T I b = a^T b = a \bullet b, \quad b = a$$

- **Orthonormality of Column and Row Vectors**

  실수 정방행렬이 직교일 필요충분조건은 열벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ (또한 행벡터들)이 **정규직교계(Orthonormal System)**를 형성하는 것이다.

$$\mathbf{a}_j \bullet \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

$$I = A^{-1}A = A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \left[a_1 a_2 \cdots a_n\right] = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots & a_1^T a_n \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \cdots & a_n^T a_n \end{bmatrix}$$

8.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

- **Determinant of an Orthogonal Matrix**

  직교행렬의 행렬식의 값은 +1 또는 -1이다.

$$1 = \det \mathrm{I} = \det(\mathrm{AA}^{-1}) = \det(\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\det \mathrm{A})^2$$

- **Eigenvalues of an Orthogonal Matrix**

  직교행렬의 고유값은 실수 또는 공액복소수이고 절대값은 1이다.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad -1,\ (5+i\sqrt{11})/6,\ (5-i\sqrt{11})/6$$

8.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

PROBLEM SET 8.3

HW: 3, 18

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

- **Basis of Eigenvectors**

만일 $n \times n$행렬 $\mathbf{A}$가 n개의 서로 다른 고유값을 가지면 ,
이 행렬 $\mathbf{A}$의 고유벡터 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$은 R^n의 기저가 된다 .

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n$$

$$\begin{aligned} \mathrm{y} = \mathrm{Ax} &= \mathrm{A}(c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n) \\ &= c_1\mathrm{Ax}_1 + c_2\mathrm{Ax}_2 + \cdots + c_n\mathrm{Ax}_n \\ &= c_1\lambda_1\mathrm{x}_1 + c_2\lambda_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathrm{x}_n \end{aligned}$$

- **Symmetric Matrices**

대칭행렬은 고유벡터로 구성된 정규직교 기저를 갖는다.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

- **Similarity Transformation (상사변환)**

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \qquad (n \times n \text{ 정칙행렬 } \mathbf{P})$$

- **Eigenvalues and Eigenvectors of Similar Matrices**

$\hat{\mathbf{A}}$가 $\mathbf{A}$에 상사이면 $\hat{\mathbf{A}}$는 $\mathbf{A}$와 같은 고유값을 갖는다.

$\mathbf{x}$가 $\mathbf{A}$의 고유벡터이면 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$는 같은 고유값에 대응되는 $\hat{\mathbf{A}}$의 고유벡터가 된다.

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Ax} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AIx} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APP}^{-1}\mathrm{x} = \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{P}^{-1}\mathrm{x}$$

- **Diagonalization of a Matrix (행렬의 대각화)**

만일 $n \times n$행렬 $\mathbf{A}$가 고유벡터의 기저를 가지면

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}$$

는 대각행렬이 되고, $\mathbf{A}$의 고유값들이 주대각선의 원소가 된다.

여기서 $\mathbf{X}$는 이들 고유벡터들을 열벡터로 하는 행렬이다.

또한 $\mathbf{D}^m = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^m\mathbf{X}$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

- **Ex. 4 Diagonalize**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}$$

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

- **Ex. 4 Diagonalize**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}$$

특성방정식 : $-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 고유값 : $\lambda = 3,\ \lambda = -4,\ \lambda = 0$

$\Rightarrow \quad$ 고유벡터 : $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

- **Quadratic Forms (2차 형식). Transformation to Principal Axes (주축으로의 변환)**

벡터 $\mathbf{x}$의 성분 $x_1, \cdots, x_n$ 으로 구성된 2차형식 : $Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A} = \mathrm{XDX}^{-1} = \mathrm{XDX}^{\mathrm{T}} \\
&\mathrm{Q} = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax} = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{XDX}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} = \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Dy} \\
&(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} = \mathrm{y},\ \mathrm{x} = \mathrm{Xy})
\end{aligned}
$$

- **Principal Axes Theorem (주축정리)**

치환 $\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$ 에 의하여 2차 형식은 주축형식 또는 표준형으로 변환될 수 있다.

표준형 : $Q = \mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$: 행렬 $\mathbf{A}$(대칭행렬)의 고유값

$\mathbf{X}$: 고유값에 대응하는고유벡터 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 열벡터로 하는 직교행렬

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

■ **Ex. 5 Quadratic Form. Symmetric Coefficient Matrix**

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1{}^2 + 10x_1x_2 + 2x_2{}^2$$

$4+6=10=5+5$이므로 $c_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$로 하는 행렬 $\mathbf{A}$에 대응하는 대칭행렬

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1{}^2 + 10x_1x_2 + 2x_2{}^2$$

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

■ Ex. 6 **Transformation to Principal Axes. Conic Sections (원뿔곡선)**

Find out what type of conic section the following quadratic form represents and transform it to principal axes:

$$Q = 17{x_1}^2 - 30x_1x_2 + 17{x_2}^2 = 128$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

특성방정식 : $(17-\lambda)^2 - 15^2 = 0$

$\Rightarrow$ 고유값 : $\lambda = 2,\ 32$

$\Rightarrow$ $Q = 2{y_1}^2 + 32{y_2}^2$

$$\therefore\ \frac{{y_1}^2}{8^2} + \frac{{y_2}^2}{2^2} = 1$$

8.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms (고유벡터의 기저. 대각화. 2차 형식)

PROBLEM SET 8.4

HW: 8, 17

8.5 Complex Matrices and Forms (복소행렬과 그 형태)

- **Notations**

$\overline{\mathbf{A}} = \left[\overline{a}_{jk}\right]$: $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$의 각 원소 $a_{jk} = \alpha + i\beta$(여기서 α, β는 실수)에 대응되는 공액복소수 $\overline{a}_{jk} = \alpha - i\beta$로 대치하여 얻는 행렬

$\overline{\mathbf{A}}^T = \left[\overline{a}_{kj}\right]$: $\overline{\mathbf{A}}$에 대한 전치행렬이며, $\mathbf{A}$에 대한 공액전치행렬

Ex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+4i & 1-i \\ 6 & 2-5i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3-4i & 1+i \\ 6 & 2+5i \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 3-4i & 6 \\ 1+i & 2+5i \end{bmatrix}$

- 정방행렬 $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$ 에 대하여
  - **Hermitian Matrix (에르미트 행렬):** $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$
  - **Skew-Hermitian Matrix (반에르미트 행렬):** $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$
  - **Unitary Matrix (유니타리 행렬):** $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^{-1}$

8.5 Complex Matrices and Forms (복소행렬과 그 형태)

- **Eigenvalues**
  - 에르미트 행렬(대칭행렬)의 고유값은 실수이다.
  - 반에르미트 행렬(반대칭행렬)의 고유값은 순허수이거나 0이다.
  - 유니타리 행렬(직교행렬)의 고유값은 절대값 1을 가진다.

- **Inner Product:** $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \overline{\mathbf{a}}^T \mathbf{b}$
- **Invariance of Inner Product**

유니타리 변환 즉,유니타리 행렬 $\mathbf{A}$를 갖는 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$에 대하여는 변환 전과 변환 후의 내적 및 노름이 변하지 않는다.

- **Unitary System:** 다음을 만족하는 복소벡터들의 집합. 실수벡터의 정규직교계에 해당

$$\mathbf{a}_j \bullet \mathbf{a}_k = \overline{\mathbf{a}}_j^{\,T} \mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

8.5 Complex Matrices and Forms (복소행렬과 그 형태)

- **Unitary Systems of Column and Row Vectors**

  복소 정방행렬이 유리타리 행렬일 필요충분조건은 열벡터(또는 행벡터)가 유니타리 계를 형성하는 것이다.

- **Determinant of a Unitary System**

  유니타리 행렬의 행렬식은 절대값 1을 가진다. 즉, $|\det \mathbf{A}| = 1$

- **Basis of Eigenvectors**

  에르미트, 반에르미트 또는 유니타리 행렬의 고유벡터들은 C^n 상에서 유니타리 계의 기저가 된다.

8.5 Complex Matrices and Forms
(복소행렬과 그 형태)

- **Hermitian and Skew-Hermitian Forms**

벡터 $\mathbf{x}$의 성분 $x_1, \ \cdots, \ x_n$ 에 대한형식

$$: \ \overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \overline{x}_j x_k$$

$$= \quad a_{11}\overline{x}_1 x_1 + \cdots + a_{1n}\overline{x}_1 x_n + a_{21}\hat{x}_2 x_1 + \cdots + a_{2n}\overline{x}_2 x_n + \cdots + a_{n1}\overline{x}_n x_1 + \cdots + a_{nn}\overline{x}_n x_n$$

A가 에르미트, 또는 반에르미트일 경우, 각각 에르미트, 반에르미트 형식이라 부름.

에르미트 형식의 값은 실수이며, 반에르미트 형식의 값은 순허수 또는 0이 됨.

8.5 Complex Matrices and Forms
(복소행렬과 그 형태)

PROBLEM SET 8.5

HW: 16