

## (Lecture 4) Quantum States of Atoms

Sources of **Light** : excited matter

Views on the nature of light : two different views on light in the 17c.

Newton “a stream of fast-moving elastic particles of very small mass”

→ accounted for the law of reflection (입사각 = 반사각)

→ accounted for the law of refraction by attraction of the medium which increases the normal velocity component hence travels in the medium faster than in free space

Christian Huygens “light consisted of waves” → two light beams cross through each other without colliding, and he explained reflection and refraction

### 1. Electrodynamics and Light

- Thomas Young (1801) : Wave theory of light ← Young’s interference experiments
- Further experimental work on the wave nature of light :  
Fresnel, Arago, Malus, Cornu, Fizeau, Foucault
- Mathematical theory of light : James Clerk Maxwell (1864)  
Maxwell’s equation on electricity and magnetism  
→ derivation of wave equation for **electromagnetic(EM) wave** with propagation velocity equal to that of **light, and prediction of EM wave**
- Demonstration of radiating electromagnetic wave : Hertz (1888)  
→ Oscillating currents in LC circuit radiates energy into space and the energy was picked up in another similar receiving circuit (loop of wire) with a spark gap fired. Spark induction was easier when the receiving gap terminals were illuminated by light produced at the similar spark terminals in the transmitter (discovery of **photoelectric effect** by Hallwachs)
- Propagating electromagnetic wave : explanation by Maxwell’s equations  
E-field and B-field are perpendicular each other and also both perpendicular to the direction of propagation **S** (= direction of energy-momentum flow)  
→ Light radiation is **the propagating stream of energy and momentum.**
- Plane-polarized electromagnetic wave : x-axis as the direction of propagation **S**

$$E = E_m \sin(kx - \omega t) \quad \text{and} \quad B = B_m \sin(kx - \omega t) \quad (\text{Fig.3-1 참조})$$

그림에서는 plane-polarization 의 방향이 y-방향인 경우로서 E-vector 는

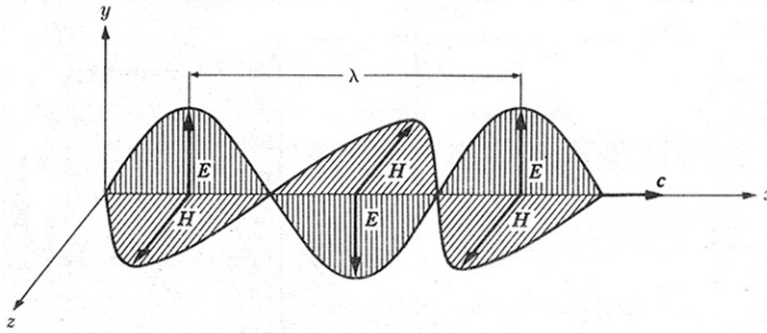


Fig. 3-1 A plane-polarized electromagnetic wave of wavelength  $\lambda$  showing the relation of the vectors  $E$ ,  $H$ , and  $c$ .

xy-평면에 평행, B-vector 는 xz-평면에 평행. (cf. 그림에서는 편의상 x-축 상에서만 E, B vector 를 표시했으나 실제로는 파가 존재하는 공간 전체에서 동일한 구조의 E, B vector 가 존재함을 의미함).

위상  $(kx - \omega t)$ 가 일정한 부분의 진행 = 파의 진행속도 =  $c$  이므로  
 $\rightarrow kx - \omega t = \text{const} \rightarrow kdx - \omega dt = 0 \rightarrow dx/dt = \omega/k = c$   
 여기서  $k = 2\pi/\lambda$  (wave number),  $\omega = 2\pi\nu$  (angular frequency)

E-field와 B-field는 Maxwell 법칙에 따라 상호 유도하며 자체적으로 진행하고 그 진행속도는  $\omega/k = c = 1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$ ,

$$\epsilon_0 = 8.85415 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \quad \text{vacuum permittivity}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \quad \text{vacuum permeability}$$

전자기파(빛)가 전달하는 에너지 flux = 수직 통과 단위 면적 당의 에너지 수송률  $[\text{Wm}^{-2}] = \text{“Radiation Intensity”} = \text{Energy density} \times (\text{광속 } c)$   
 $\rightarrow$  Vector 량으로의 표시 “Poynting vector  $\mathbf{S}$ ”,

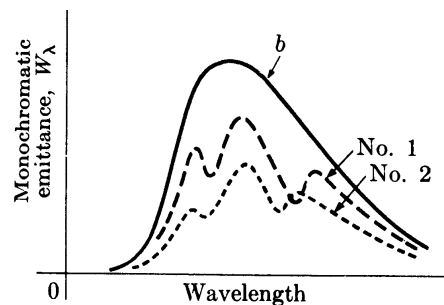
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad [\text{Wm}^{-2}]$$

## 2. Classical Radiations

- Thermal Radiation (열 복사선)  
 visible radiation from hot body  
 emission spectrum changes with temperature of the body

(monochromatic) emittance  $w_\lambda$  :

파장  $\lambda$ 와  $\lambda+d\lambda$  영역 내로, 발광체의 표면 단위 면적 당, 단위 시간 당 방



출되는 에너지량 ( $\text{erg s}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{\AA}^{-1}$ ),  $w_\lambda = w_\lambda(\lambda, T, \text{원자})$   
 발광체의 물질(원자) 조성, 표면 상태 등에 따라 발광 spectrum 형태 변화

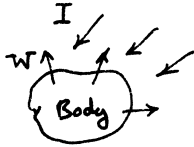
- Emission and Absorption of Radiation (열복사선의 방출과 흡수)  
 논의를 간단히 하기 위해 단일 wavelength band 의 radiation 만 고려.  
 A body in thermal equilibrium(열평형) in radiation "bath"

Opaque body(불투명체): 흡수(absorption) 및 반사(reflection) 투과(transmission)는 없음.

Absorptance(흡수 비율)  $a$ , reflectance(반사 비율)  $r$ :  
 $a + r = 1$

열평형 卽 에너지의 평형 : 방출량 = 흡수량

$$w_1 \Delta A_1 \Delta t_1 = a_1 I \Delta A_1 \Delta t_1$$



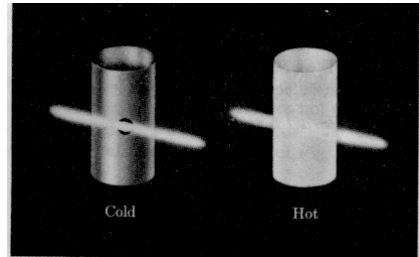
$I$  : 복사선 강도(radiation intensity) = 물체 표면의 단위 면적, 단위 시간 당 입사되는, 주어진 파장 구간 내의 복사선 에너지. Radiation bath 의 특성.

또 하나의 물질이 동일하게 radiation bath 내에서 열평형이라면

$$w_2 \Delta A_2 \Delta t_2 = a_2 I \Delta A_2 \Delta t_2$$

따라서 두 물체의 emittance 와 absorptance 간의 관계 :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{or} \quad \frac{w_1}{a_1} = \frac{w_2}{a_2}$$



**Black body (흑체 黑體): 반사없는 완전 흡수체 ( $r=0, a=1$ )**

열평형인 여러 물체, 흑체에 대해

$$\frac{w_1}{a_1} = \frac{w_2}{a_2} = \frac{w_b}{1} = w_b :$$

‘Kirchhoff 의 복사 법칙’이 성립.

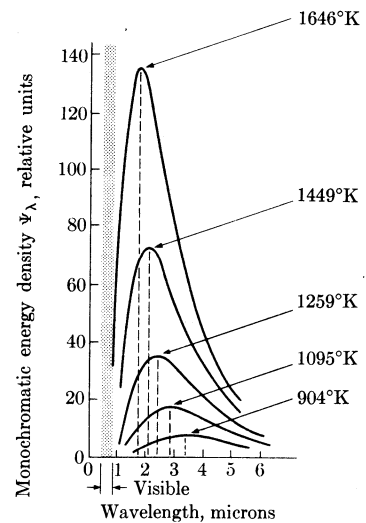
현실적으로 가장 가까운 흑체 : Hollow cavity with a small hole (compared with the size of the cavity)

흑체의 emittance  $w_b = w_b(\lambda, T)$

Total emitted radiation energy from black body :

$$W_b = \int_0^\infty w_b(\lambda, T) d\lambda = W_b(T) = \sigma T^4 \quad (\text{erg s}^{-1}\text{cm}^{-2})$$

여기서 마지막 등식은 Stefan 의 경험식(empirical formula)으로서 Boltzmann 에 의해 유도된



Stefan-Boltzmann 법칙.

$$\sigma : \text{Stefan-Boltzmann 상수} = 5.67051(19) \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

### 3. Wien Law and Rayleigh-Jeans' Law

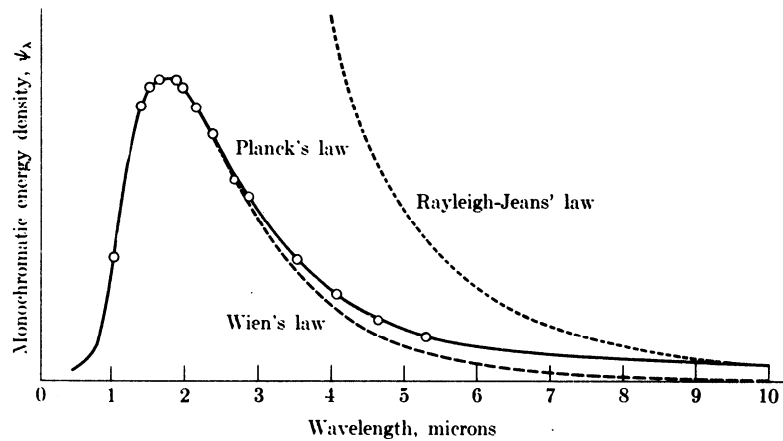
Wien : 실험적 Black body radiation curve 와 Maxwell 속력 분포에 유사성이 있음에 착안하여 실험적 관계식 제시.

$$\Psi_{\lambda} d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{c_2/\lambda T}}$$

→ 온도 T의 black body radiation spectrum에서 파장  $\lambda$ 와  $\lambda+d\lambda$  사이의 radiation energy density  $\Psi_{\lambda}$  [energy/(volume)(wavelength),  $\text{erg cm}^{-3} \text{ \AA}^{-1}$ ]

→ Cavity volume 당의 radiation energy : cavity 내의 radiation energy 논의

$c_1, c_2$  : the first and second radiation constant



→ 장파장 영역에서 실험 결과와 맞지 않음.

Rayleigh-Jeans 의 접근 : 가능한 radiation modes 를 정교히 계산.

**Equipartition of energy** →

$$\text{이상기체의 평균 분자운동 에너지 } \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

운동의 세 방향(x,y,z)이 독립적이며 동등한 특성

$$\rightarrow \overline{v^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$$

$$\text{즉 1 차원 운동에 대한 평균 운동 에너지 } \frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} kT$$

→ 운동 에너지는 각 운동 자유도(x,y,z)에 대해 균등하게 배분됨.

복사선(radiation) field 가 흑체 벽면과 동일 온도에서 평형을 이루었을 때 (열적 평형) 벽면의 원자를 1 차원 운동을 하는 단진자(HO: Harmonic Oscillator)로 간주하며, 온도 T의 기체 분자와 유사하게 평균 운동 에너지를 갖는다고 하면 (시간) 평균 운동 에너지 =  $\frac{1}{2}kT$

이때의 (시간) 평균 위치 에너지 = 평균 운동 에너지 =  $\frac{1}{2}kT$  (Clausius virial theorem 참조) → 복사선의 mode 당 평균 에너지 =  $kT$

벽면과 평형인 상태에서 복사선 mode수의 계산 (참고문헌 1):

$$\text{파장 } (\lambda, \lambda+d\lambda) \text{ 구간에는 } dN = \frac{8\pi V}{\lambda^4} d\lambda$$

$$\text{따라서 energy density } \Psi_\lambda d\lambda = kT \frac{dN}{V} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda \quad \text{Rayleigh-Jeans' law}$$

→ 장파장 영역에서 잘 맞으나, 짧은 파장 영역에서 에너지 밀도가 증가함으로써 총에너지의 발산 문제 (ultraviolet catastrophe)가 존재.

#### 4. Planck's Law : Quantized Radiation

Planck's empirical formula

$$\Psi_\lambda d\lambda = \frac{1}{\lambda^5} \frac{c_1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} d\lambda$$

Hint) For large  $\lambda$ ,  $c_2/\lambda T \rightarrow$  small,  $\exp(c_2/\lambda T) \cong 1 + (c_2/\lambda T)$

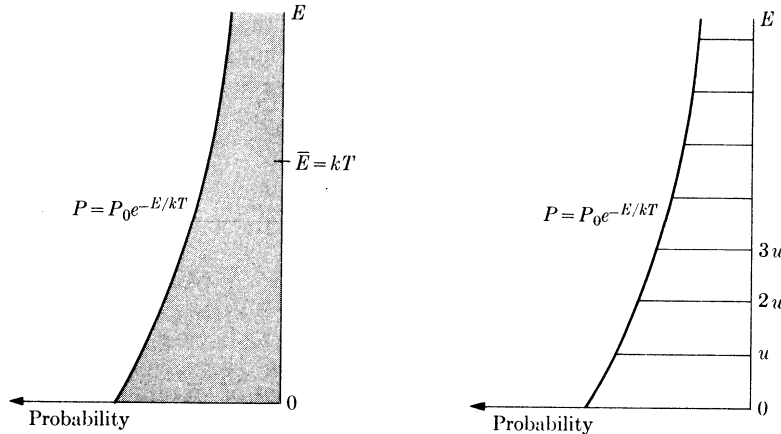
따라서  $\Psi_\lambda d\lambda \rightarrow c'\lambda^{-4} d\lambda$  (Rayleigh-Jeans law), 또한  $c_1/c_2 = 8\pi k$ .

For small  $\lambda$ ,  $\exp(c_2/\lambda T) - 1 \cong \exp(c_2/\lambda T)$ ,  $\Psi_\lambda d\lambda \rightarrow$  Wien's law

Rayleigh의 유도에서는  $\lambda$ 가 줄어들면  $n_{\max}$ 는 무한히 증가. 각 모드들이 동일한 평균 에너지  $kT$ 를 가지므로 radiation의 전체 에너지도 무한 증가. 이때 각각의 진동 mode에 대해 radiation energy는 고전적으로는 Poynting vector = Energy flow vector (단위 면적 당, 단위 시간 당의 통과 에너지) =  $(\frac{c}{4\pi})(\vec{E} \times \vec{H})$ 로 주어지며 따라서 (E-amplitude)<sup>2</sup>에 비례함 (가령 진공 중에서는  $\vec{E} = \frac{ic}{\omega} \nabla \times \vec{H}$ 의 관계). 따라서 연속적인 amplitude가 가능하듯이 radiation energy도 연속적으로 흡수, 방출이 가

능함. 온도  $T$ 에서 평형인 Energy  $E$ 인 단진동 mode (또는 radiation mode)의 존재 확률은 Boltzmann factor  $\exp(-E/kT)$ 로 주어지므로 평균 에너지  $\bar{E}$ 는

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} = kT \quad \text{로 나타난다.}$$



그러나, Planck 는 HO(벽면 원자)와 radiation 간에 불연속적인 에너지 교환(교환단위  $u$ ) 만이 가능하다고 전체적으로 가정. 이때 각 radiation mode 는  $0, u, 2u, 3u, \dots$  등의 에너지 상태 만이 가능하며 (quantized energy packet),  $E=mu$ ( $m$ :정수)인 mode 의 수는  $n(m) = n_0 e^{-mu/kT}$  로서  $m$ -mode 의 전체 에너지는  $En(m)$  이므로 평균 에너지는

$$\bar{E} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} mu n_0 e^{-mu/kT}}{\sum_{m=0}^{\infty} n_0 e^{-mu/kT}} = \frac{ux}{1-x} \quad (x \equiv e^{-u/kT}) = \frac{u}{e^{u/kT} - 1} .$$

Cavity 의 단위 부피 당 radiation mode 수  $\frac{dN}{V} = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$  와 결합하여,

$$\Psi_{\lambda} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{u}{e^{u/kT} - 1} d\lambda \quad [\text{energy}/(\text{volume}) \text{ or } \text{erg cm}^{-3}]$$

앞의 empirical formula 와 비교,  $\frac{u}{kT} = \frac{c_2}{\lambda T}$  or

$$u = \frac{c_2 k}{\lambda} = \frac{c_2 k}{c} v \equiv hv \quad (c_2 : \text{empirical const. } k : \text{Boltzmann const})$$

$h$  : Planck 상수 =  $6.626 \times 10^{-34}$  joule·sec

$$E = hv = hc/\lambda \text{ (single photon), } nhv \text{ (n-photon)}$$

**Blackbody radiation** 과 **Planck Law** 의 응용 :

- 1) High temperature measurement : Optical pyrometer  
 $T > 1068 \text{ K}$  인 대상에서 나오는 특정 파장대의 radiation intensity 를 금 (gold)의 melting point (1068 K)에서의 흑체복사 intensity 에 대해 calibration 하여 온도를 측정함.
- 2) Cosmic Background Radiation(CBR) : A.A. Penzias, R.W. Wilson (1965)  
 Radio telescope ( $\lambda = \text{mm} - \text{cm}$ ) measurement cosmic background radiation  
 → blackbody radiation of  $T = 2.7 \text{ K}$   
 → cosmological interpretation : Big-Bang remnants  
 Dicke et al. (1965, 1970)
- 3) Greenhouse effect & Global warming 이해 : Wien's displacement law  
 $\lambda_{\text{max}}T = \text{const} = 2.8970 \times 10^6 \text{ [nm K]}$   
 sun radiation  $\sim 6000 \text{ K}$ , earth radiation  $\sim 280 \text{ K}$

**5. Photoelectric Effect (광전효과)**

1887 년 Heinrich Hertz 발견

청결한 금속 표면에 UV light 파장 영역의 전자기파가 입사될 때 표면으로부터 전자가 방출되는 현상.

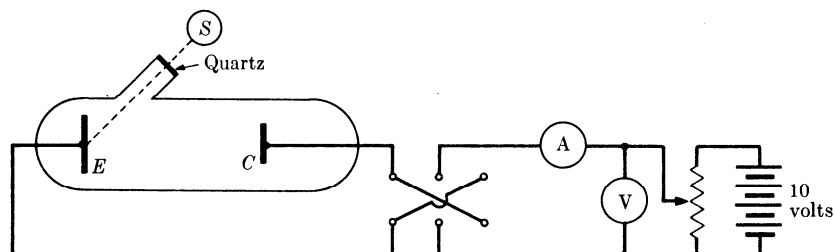
금속 표면에서의 전자 방출 현상의 분류 (에너지 공급원에 따라)

- 1) thermionic emission (열적 방출) : filament heating
- 2) secondary emission (이차 방출) : energy transfer from primary particle
- 3) field emission (전자장 방출) : strong external E-field
- 4) photoelectric emission (광전 방출) : energy transfer from incident photons

Experimental Arrangement

E : emitter made of the metal material under study

C : collecting electrode



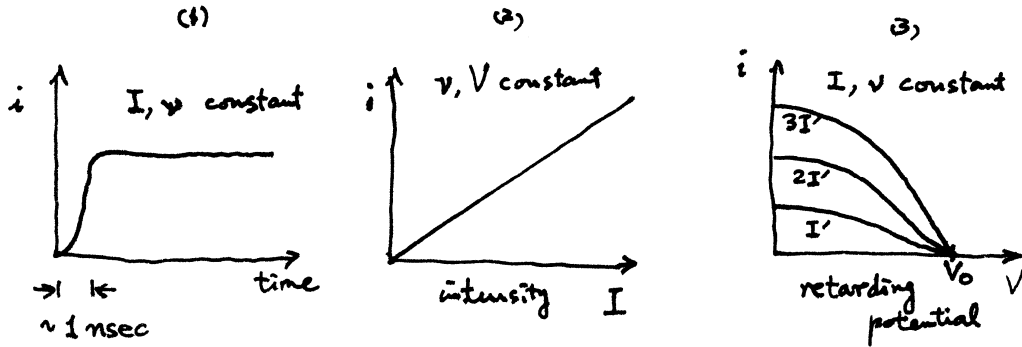
실험에 관련된 변수 : light frequency  $\nu$

light intensity  $I$  photoelectric current  $i$

electron's kinetic energy  $(1/2)mv^2$

emitter material

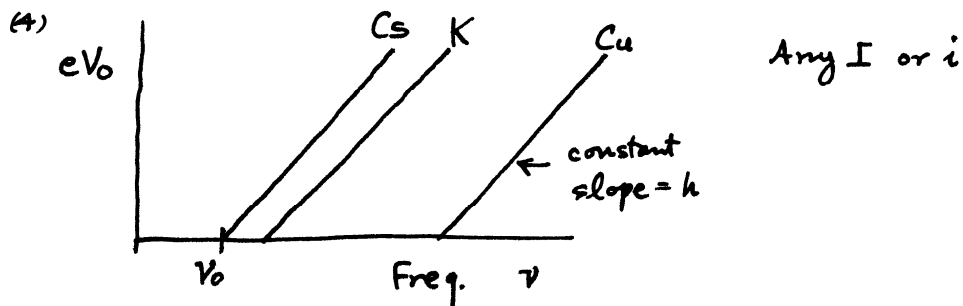
(결과) 1. 거의 동시적(~1 nsec) 방출. 빛의 intensity가  $10^{-10} \text{ W/m}^2$  수준으로 낮을 때에도 동일.



- current  $i$  는 빛의 intensity 에 비례.
- current  $i$  는 감속 전압  $V$  에 따라 감속하여  $V_0$  에서 소멸.

$V_0$ : stopping potential

$$eV_0 = (1/2)mv_{\text{max}}^2$$



- stopping potential  $V_0$  는 주어진 물질에 대해서는 빛의 frequency  $\nu$  에만 관계되고, intensity 에는 무관. 따라서 photocurrent  $i$  에 대해서도 무관. 각 물질에 대해 잘 정의되는 threshold frequency  $\nu_0$  존재.

$$eV_0 = h\nu - h\nu_0$$

기울기  $h$  는 모든 물질에 대해 동일한 상수.

(고전적 설명)

- 단위면적 당 금속표면의 에너지 흡수율  $\propto (\text{absorptance}) \times (\text{intensity})$   
electron 의 표면 구속 에너지  $\sim$  수 eV  
 $I = 10^{-10} \text{ W/m}^2$  수준이면 방출에 걸리는 시간  $\sim$  수백 hour



2. I가 증가하면 에너지 흡수율이 증가. 따라서 광전자 수효 증가.  
→ photocurrent 증가.
3. 방출되는 photoelectron의 속도 분포 즉 에너지 분포가 존재함.  
이는 전자가 금속 표면에 구속된 정도가 다른 것으로 해석하거나,  
빛으로부터 흡수하는 에너지량이 다른 것으로 해석 가능. 그러나  $V_0$ 의 존재는 금속 표면에 흡수되는 총에너지에 무관하게 일정한 것으로 나타남. 설명 불가능.
4.  $\nu_0$  (threshold frequency)의 존재는 고전 전자기학으로 설명이 전적 불가. 고전적으로는 표면 방출의可否는 에너지 흡수율(즉, light intensity)에 관계.

(양자론적 설명) A. Einstein (1905)

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{single photon energy} \propto \text{photon frequency}$$

light interaction with the electrons inside the metal  
= single photon interaction with the single electron

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + h\nu_0$$

$h\nu$  : incident photon energy

$(1/2)mv_{\max}^2$  : 가장 약하게 구속된 전자가 얻는 에너지(최대)

$h\nu_0$  : 금속 표면에 가장 약하게 구속된 전자의 결합 에너지  
(work function  $\phi$ )

즉, 윗식은 energy conservation 법칙의 표현.

## Bibliography :

(Basic)

1. H.A. Enge, M.R. Wehr, and J.A. Richards, Introduction to Atomic Physics, Reading, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972
2. K.S. Krane, Modern Physics, New York, John Wiley & Sons Inc., 1996 (Korean Translation : 이공학도를 위한 현대물리학, 이철의, 강원, 여인환, 주진수 공역, 서울, 범한서적주식회사, 1998)

(Intermediate)

3. F.K. Richtmyer, E.H. Kennard and J.N. Cooper, Introduction to Modern Physics, New York, McGraw-Hill Inc., 1969
4. R. Eisberg and R. Resnick, Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids,

- Nuclei and Particles, 2<sup>nd</sup> Ed., New York, John Wiley & Sons Inc., 1974, 1985
5. A.P. French, Principles of Modern Physics, New York, John Wiley & Sons Inc., 1958