

Lecture 20

Electric Springs and Microphone Design

- Lumped Parameter Electromechanical Dynamics
- Linear Differential Equations
- Equilibrium
- Linearization
- Microphone Design
- Applications of Electric Springs

Lumped Parameter Electromechanical Dynamics

- 집중 정수 전기기계를 수학 모델로 표시하고, 이런 계의 동적인 거동을 연구하는 것이 목적.
- 실제의 전기기계를 기술하는 미분방정식은 거의 모든 경우에 비선형.
- 따라서, 선형회로이론의 경우처럼 정확하고 완전한 수학기론을 전개하기는 어렵지만, 많은 계에 대해서 평형점 근처에서의 미소 신호 (small signal)의 거동을 선형화하여 해석한다.

Linear Differential Equations

- n개의 상미분 방정식 $\frac{d^n x}{dt^n} + A_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + A_n(t)x = f(t)$

여기서, $A_i(t)$ 는 독립변수 t 의 함수이다. 만약, $A_i(t)$ 가 $x(t)$ 의 종속이면, 이 미분방정식은 비선형이다.

- 위 식은 선형방정식이기는 하지만 계수가 독립변수의 함수이어도 좋으므로 해의 꼴이 복잡해진다. 예를 들면, $f(t)$ 가 주어진 정현파라 하더라도 방정식의 해는 구동 주파수의 모든 고조파를 포함할 수도 있다.

- 우리가 다루는 선형계는 거의 정수계수의 미분방정식이므로 $A_i(t) = a_i = \text{const}$ 인 계에 대해서 생각해도 좋다.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_n x(t) = f(t)$$

이때 homogeneous solution 은 $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t}$ 로 쓸 수 있다.

이를 미분방정식에 대입하면 $\sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} (s_i^n + a_1 s_i^{n-1} + \dots + a_n) = 0$ 이 되어서

$$\text{다음과 같은 특성방정식을 얻는다.} \quad s_i^n + a_1 s_i^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

- 이 식을 만족시키는 해를 **Natural frequency** 라 한다.

Sinusoidal Solution

보통의 많은 장치는 정현파 파형의 구동함수로 구동된다.

$$f(t) = \text{Re}\{ \hat{F} e^{j\omega t} \}$$

이 구동함수에 대한 특해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$x_p = \text{Re}\{ \hat{X} e^{j\omega t} \}$$

이것을 미분방정식에 대입하면

$$\text{Re} \left\{ e^{j\omega t} \left[\hat{X} \left\{ (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right\} - \hat{F} \right] \right\} = 0$$

$$\hat{X} = \frac{\hat{F}}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$\text{따라서,} \quad x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} + \text{Re} \left\{ \frac{\hat{F} e^{j\omega t}}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \right\}$$

제1항: 과도항, 제2항: 정상상태항.
충분한 시간이 흐른 뒤 제1항 무시 가능.

Equilibrium

- 평형이란 역학계의 운동이 매우 간단한 형태를 가질 경우에 쓰이는 용어.

예를 들어, $M \frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$ 일 경우,

$f(X) = 0$ 일 때, X 에서 평형을 이룬다고 한다.

- 물리적으로는 외력이 존재하지 않아서 X 점에 정지시킬 수 있음을 의미.
- 평형이라는 말은 정지시 만을 의미하지 않고, 일반적인 운동방정식이 평형해로 만족될 때에도 쓰인다.
- 평형점에서의 작은 외란은 선형화된 운동방정식에 의해 예측된다.

$$x(t) = X + x'(t)$$

X : 평형점 위치, $x'(t)$: 외란

- $x(t)$ 를 이렇게 나타내면, 비선형 항을 평형점 X 주위에서 Taylor series로 전개할 수 있다.

Linearization

- 한 방향성 운동의 경우. $f(x) = f(X) + x' \frac{df(X)}{dx} + \frac{1}{2} x'^2 \frac{d^2f(X)}{dx^2} + \dots$

x' 이 아주 작다면 우변의 첫 두항이 미치는 영향이 크므로 나머지 항은 무시할 수 있다.

$f(x) = f(X) + x' \frac{df(X)}{dx}$ 이고, $f(X)=0$ 이다 (왜냐하면, X 에서 평형이므로).
 $M \frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$ 이라면 이 식은 선형화에 의해서 $M \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{df(X)}{dx} x' = 0$ 이 된다.
 $\frac{df(X)}{dx}$ 의 값에 따라 안정성이 결정된다.

- Generalized Linearization

- M 개의 변수 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_M$ 에 의해서 일반 함수가 $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_M)$ 으로 나타내어 질 때,

어떤 평형점 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_M)$ 주위에서 Taylor series로 전개해서 근사화하면

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_M) \approx f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_M) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial f}{\partial x_k} (X_1, X_2, \dots, X_M) x'_k$$

로 선형화할 수 있다.

Stability (I)

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{1}{M} \frac{df(X)}{dx} x' = 0 \quad \text{에서}$$

$$\omega_0^2 = -\frac{1}{M} \frac{df(X)}{dx} \quad \text{이라 하면}$$

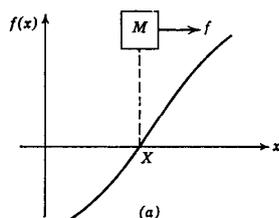
$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \omega_0^2 x' = 0 \quad \text{인 식이 된다. 이 식의 해는}$$

$$x' = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{-j\omega_0 t} \quad \text{가 되며}$$

ω_0^2 의 부호에 따라 안정, 불안정이 된다.

- (1) $\omega_0^2 < 0$ 이면 ω_0 는 허수가 되어 $j\omega_0 t = -\omega t$, $-j\omega_0 t = \omega t$ 가 된다.
따라서 $e^{\omega t}$ 항이 시간에 따라 지수함수적으로 발산하게 되어 불안정하다.
- (2) $\omega_0^2 > 0$ 이면 ω_0 는 실수가 되어서 x' 은 진동하는 해를 갖는다.
이 해는 에너지를 소모하는 항이 있으면 안정하게 된다.

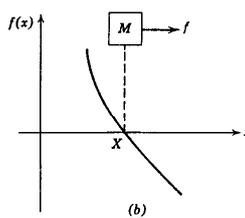
Stability (II)



$$\omega_0^2 < 0$$

$$-\frac{1}{M} \frac{df(X)}{dx} < 0$$

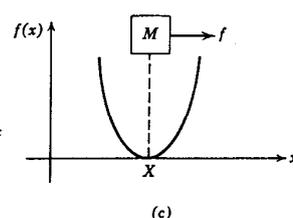
$$\frac{df(X)}{dx} > 0$$



$$\omega_0^2 > 0$$

$$-\frac{1}{M} \frac{df(X)}{dx} > 0$$

$$\frac{df(X)}{dx} < 0$$



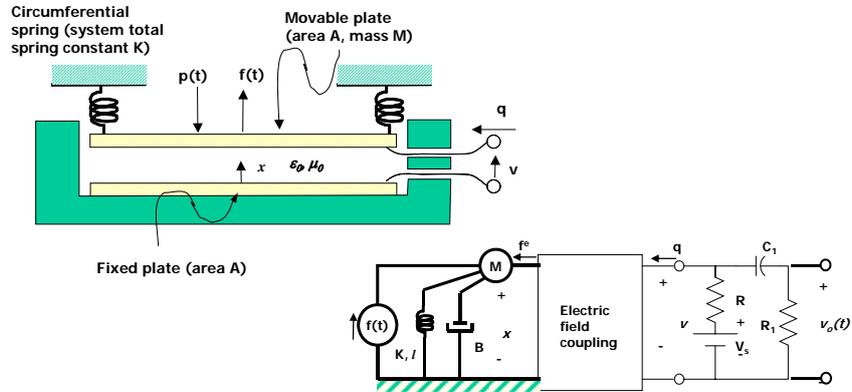
$$f(X) = 0, \quad \frac{df(X)}{dx} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f(X)}{dx^2} x'^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f(X)}{dx^2} (x - X)^2$$

- 위의 그래프를 이용해서 안정성에 대해 물리적으로 설명할 수 있다.

Microphone (I)



그림과 같은 마이크로 폰(또는 스피커)가 있다. 가동판에 압력이 가해지면 가동판이 상하로 움직여서 전기단자쌍에서 본 캐패시턴스가 변화한다. 전기단자에 일정전압이 걸려져 있으므로 운동에 의한 캐패시턴스 변화는 회로 내의 전류를 유기한다. 이 전류의 일부가 출력단의 저항에 흐르므로 출력단자에 전압이 생긴다.

- J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics, Part I*, p.59, 1968.

마이크로시스템 기술 개론

MEMS_Lect20_9

Microphone (II)

전기 결합계로부터 전기적으로 발생하는 힘.

$$f^e = -\frac{\epsilon_0 A v^2}{2x^2}$$

운동방정식

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = f^e + f(t) - K(x-l) - B \frac{dx}{dt}$$

가정

(1) R_1, C_1 회로의 역할 : bias 전압 V_s 를 걸름.

$$\frac{1}{\omega C_1} \ll R_1 \text{ 이고, } R_1 \gg R \text{ 이 되도록 } R_1, C_1 \text{ 을 결정.}$$

여기서, ω 는 관심을 갖는 주파수 영역을 의미.

(2) 따라서, 출력전압 $v_o(t)$ 는 v 의 시간 변화성분이며, R_1 에 흐르는 전류는 R 에 흐르는 전류에 비해서 무시할 만큼 작다.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon_0 A v}{x} \right) = \frac{V_s - v}{R}$$

$$v_o(t) = -R \frac{dq}{dt} = -R \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon_0 A v}{x} \right)$$

마이크로시스템 기술 개론

MEMS_Lect20_10

Microphone (III)

평형점 X, V 에서 $f(t) = 0, v_0(t) = 0$ 이다.

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K(x-l) - f^e = f(t)$$

$$v_0(t) = -R \frac{dq}{dt} = -(V_s - v)$$

$$K(X-l) + \frac{\epsilon_0 A V_s^2}{2X^2} = 0, \quad V_s - V = 0$$

평형점 V 와 X 가 결정된다.

$x = X + x', \quad v = V_s + v'$ 이라 하면

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + K(X + x' - l) + \frac{\epsilon_0 A (V_s + v')^2}{2(X + x')^2} = f(t)$$

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + Kx' + K(X-l) + \frac{\epsilon_0 A (V_s + v')^2}{2(X + x')^2} = f(t)$$

Microphone (IV)

$$\frac{\epsilon_0 A (V_s + v')^2}{2(X + x')^2} = \frac{\epsilon_0 A V_s^2 (1 + 2 \frac{v'}{V_s} + (\frac{v'}{V_s})^2)}{2X^2 (1 + 2 \frac{x'}{X} + (\frac{x'}{X})^2)}$$

$x' \ll X, \quad v' \ll V_s$ 이면 제곱항은 무시 가능.

$$\frac{\epsilon_0 A V_s^2}{2X^2} \frac{(1 + 2 \frac{v'}{V_s})}{(1 + 2 \frac{x'}{X})} = \frac{\epsilon_0 A V_s^2}{2X^2} (1 + 2 \frac{v'}{V_s}) (1 - 2 \frac{x'}{X})$$

Small signal의 곱셈항은 무시 가능.

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0 A V_s^2}{2X^2} (1 + 2 \frac{v'}{V_s} - 2 \frac{x'}{X}) &= \frac{\epsilon_0 A V_s^2}{2X^2} + \frac{\epsilon_0 A}{X} \cdot \frac{V_s}{X} v' - \frac{\epsilon_0 A}{X} \cdot \frac{V_s^2}{X^2} x' \\ &= \frac{\epsilon_0 A V_s^2}{2X^2} + C_0 E_0 v' - C_0 E_0^2 x' \end{aligned}$$

여기서, $E_0 = \frac{V_s}{X}, \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{X}$ 이다.

Microphone (V)

평형점의 식 $K(X-l) + \frac{\epsilon_0 AV_s^2}{2X^2} = 0$ 을 이용하면

운동방정식

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + Kx' + K(X-l) + \frac{\epsilon_0 AV_s^2}{2X^2} + C_0 E_0 v' - C_0 E_0^2 x' = f(t)$$

$$M \frac{d^2 x'}{dt^2} + B \frac{dx'}{dt} + K_0 x' + C_0 E_0 v' = f(t)$$

여기서, $K_0 = K - C_0 E_0^2$: Effective spring stiffness.

회로방정식 $\frac{V_s - v}{R} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon_0 A v}{x} \right)$ 이므로

$$\frac{V_s - (V_s + v')}{R} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\epsilon_0 A (V_s + v')}{X + x'} \right\} \cong \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\epsilon_0 A V_s}{X} \left(1 + \frac{v'}{V_s} - \frac{x'}{X} \right) \right\}$$

$$-\frac{v'}{R} = C_0 \frac{dv'}{dt} - C_0 E_0 \frac{dx'}{dt}$$

$$v_0(t) = v'(t) \quad \text{이므로} \quad v_0(t) = -RC_0 V_s \left(\frac{1}{V_s} \frac{dv'}{dt} - \frac{1}{X} \frac{dx'}{dt} \right)$$

Microphone (VI)

마이크로 폰의 가동판에 가해지는 압력이 구동력이 되며, 이를 정현파 함수 라고 가정한다.

$$f(t) = -Ap(t) = \text{Re} \{ F e^{j\omega t} \} = F \cos \omega t$$

결과적으로 x' 과 v' 도 ω 인 각속도를 갖는다.

$$x'(t) = \text{Re} \{ \hat{X} e^{j\omega t} \}, \quad v_0(t) = v'(t) = \text{Re} \{ \hat{V} e^{j\omega t} \}$$

운동방정식

$$\{ M(j\omega)^2 + B(j\omega) + K_0 \} \hat{X} + C_0 E_0 \hat{V} = F$$

회로방정식

$$\hat{V} = -RC_0 V_s \left\{ \frac{1}{V_s} \hat{V}(j\omega) - \frac{1}{X} \hat{X}(j\omega) \right\}$$

이 두 식에서 \hat{X} 를 소거해서 F 와 \hat{V} 의 전달함수를 구하면

$$\frac{\hat{V}}{F} = \frac{j\omega RC_0 E_0}{(K_0 - \omega^2 M + j\omega B)(j\omega RC_0 + 1) + j\omega R(C_0 E_0)^2}$$

Microphone (VII)

대역별로 주파수 응답을 구하자.

(1) 저주파 영역

$$\omega \rightarrow 0 \quad \left(\frac{\hat{V}}{F} \right)_{\text{lowfreq.}} = \frac{j\omega RC_0 E_0}{K_0}$$

이 저주파 영역은 $\omega RC_0 \ll 1$ 일때 성립
 $\omega RC_0 \approx 1$ 이 되면 근사가 성립하지 않음.
 마이크로 폰의 경우, 10 Hz가 이에 해당.

(2) 중주파 영역

회로방정식 $(j\omega C_0 + \frac{1}{R})\hat{V} = j\omega C_0 E_0 \hat{X}$ 에서

$$\omega \gg \frac{1}{RC_0}, \quad K_0 \gg \omega^2 M \quad \omega C_0 \gg \frac{1}{R} \quad \text{이므로} \quad j\omega C_0 \hat{V} = j\omega C_0 E_0 \hat{X}, \quad \text{즉} \quad \hat{X} = \frac{\hat{V}}{E_0}$$

운동방정식 $[(j\omega)^2 M + j\omega B + K_0]\hat{X} + C_0 E_0 \hat{V} = F$ 에서 $[(j\omega)^2 M + j\omega B + K_0]\frac{\hat{V}}{E_0} + C_0 E_0 \hat{V} = F$

$$\frac{\hat{V}}{F} = \frac{E_0}{(-\omega^2 M + K_0 + j\omega B) + C_0 E_0^2} = \frac{E_0}{-\omega^2 M + K + j\omega B}$$

$$\left(\frac{\hat{V}}{F} \right)_{\text{midfreq.}} \cong \frac{E_0}{K} \quad \omega^2 M \cong K \text{ 인 영역까지 근사식 유효.}$$

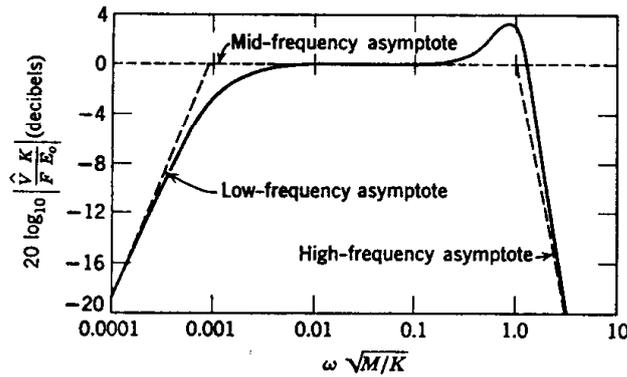
약 10 kHz까지 근사식 유효.

(3) 고주파 영역

$\omega^2 M \gg K$ 이고
 $\omega^2 M \gg \omega B$ 인 영역.

$$\left(\frac{\hat{V}}{F} \right)_{\text{highfreq.}} \cong \frac{j\omega RC_0 E_0}{(-\omega^2 M)(j\omega RC_0)} = -\frac{E_0}{\omega^2 M}$$

Microphone (VIII)



위 그림과 같은 정현파 응답을 얻을 수 있다.

여기서 $\frac{B}{\sqrt{MK}} = 0.7, \quad \frac{K_0}{K} = 0.9, \quad C_0 R \left(\frac{K}{M} \right)^{1/2} = 1000.$

effective spring stiffness는 mechanical spring stiffness의 90%이다.

Tunable Micromechanical Resonator

From the Cornell University

- 전기적인 스프링을 이용해서 공진주파수를 변화 시킴.
- 정전력을 이용.

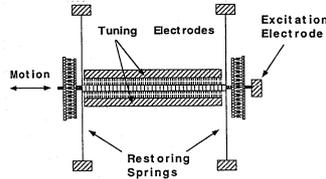


Figure 2 : Mechanical system schematic of the tunable resonator shown in Figure 1.

- 공진주파수를 올리기도하고 내리기도 함.
- 7.7% - 146% 까지 변화시킴.

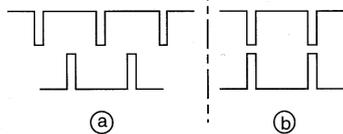


Figure 4 : a) Resonant frequency reduction actuator.
b) Resonant frequency increasing actuator.

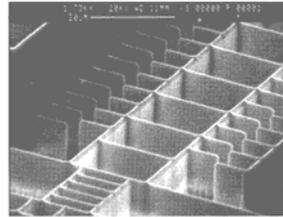


Figure 3 : Magnified view of resonant frequency reduction actuator.

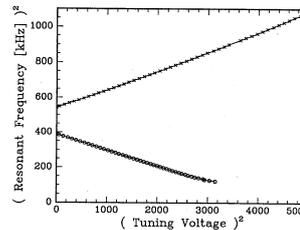


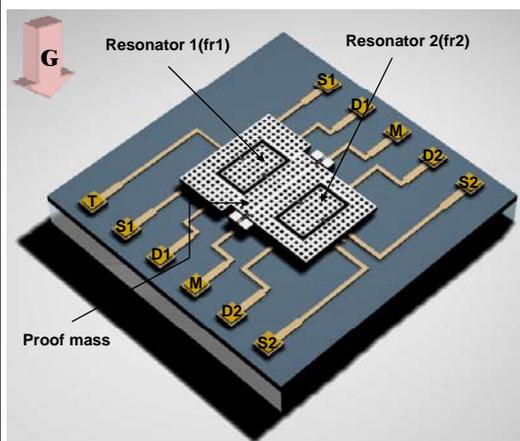
Figure 7 : Replot of Figure 6 highlighting the linearity of the frequency squared versus voltage squared relationship.

- Scott G. Adams et al., "Capacitance Based Tunable Micromechanical Resonators", Transducer'95, pp.438-441, 1995.

마이크로시스템 기술 개론

MEMS_Lect20_17

Micro Accelerometer using Electric Spring Stiffness Change



Schematic drawing of micro accelerometer using electric spring stiffness change

- 가속도계 구조
 - 하나의 외부 질량체
 - 두개의 내부 공진자
- 동작 모드
 - 초기 상태
 - 내부 공진자 : 고유 진동수로 진동
 - 가속도 입력시
 - 외부 질량체 : 가속도에 의한 힘에 의해 변위 발생
 - 변위에 의한 전기적 강성 변화
 - 내부 공진자의 공진 주파수 변화

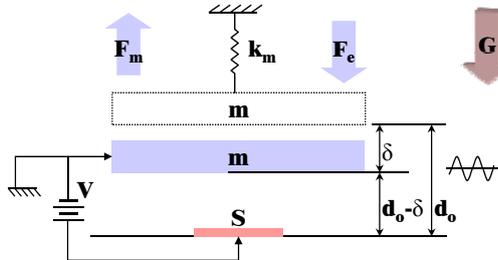
- K. Chun, SNU

마이크로시스템 기술 개론

MEMS_Lect20_18

Micro Accelerometer using Electric Spring Stiffness Change

- Gap sensitive Electrostatic stiffness changing effect



$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_m - k_e}{m}}$$

where $k_e = \frac{\epsilon \cdot S \cdot V^2}{(d_o - \delta)^3}$

- DC 전압이 걸린 전극의 변위에 의해 전기적 강성 발생
- 전기적 강성의 변화에 의해 공진자의 주파수 변화
- 높은 감도를 얻기 위한 중요 변수 : 초기 간극, 변위

- K. Chun, SNU

마이크로시스템 기술 개론

MEMS_Lect20_19

Microloading and Footing Effects

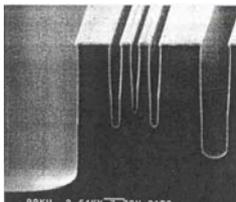


Fig. Microloading effect

- Microloading effects

- Interdependency between the etch rate and the aspect ratio
 - Wide trenches are etched more slowly than narrow trenches
 - Footing or bowing phenomenon occurs.
- Structure shape deformation occurs.

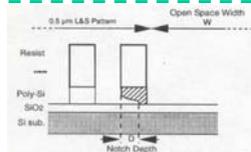


Fig. Footing effect

- Footing effects

- Rapid lateral etching at the silicon/oxide or polysilicon/oxide interface
- Evident in DRIE systems because of high-density plasma

- Footing in comb actuator

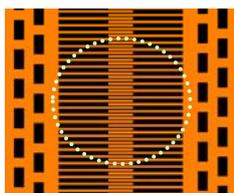


Fig. Comb actuator layout



Fig. Footing phenomena (bottom side of the structure)

- Footing occurs because of etch rate difference between trenches
- 'L' shape comb electrodes
- Electric spring exists in differential driving mode
- Nonlinear differential driving characteristics

마이크로시스템 기술 개론

MEMS_Lect20_20

Modeling of Comb Shape Fabricated by Footing Effect

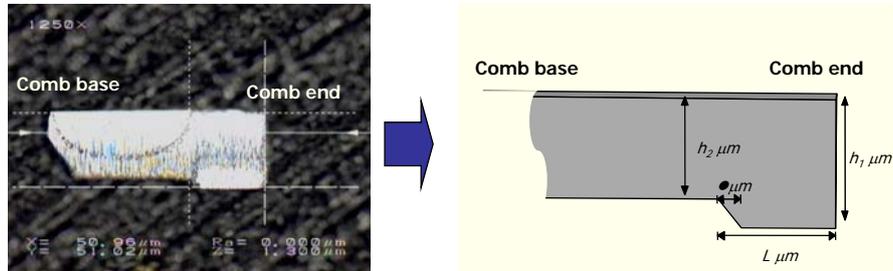


Fig. Shape modeling of the comb electrode

- h_1, h_2 ($h_1 > h_2$) are the maximum and minimum heights of the 'L' shaped electrode
- l is the length of the region where the height of the electrode increases from h_2 to h_1

Resonant Frequency Change by Electric Springs

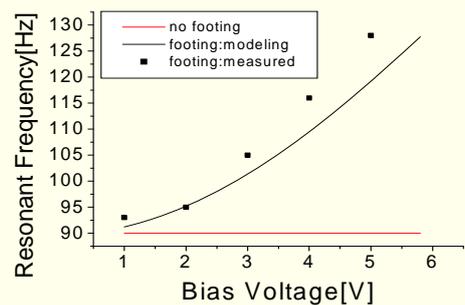
1. footing (modeling)

$$f_{\text{resonant}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \left(k_m + \frac{N \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot (h_1 - h_2)}{g \cdot l} \cdot V_B^2 \right)}$$

2. no footing (ideal case)

$$f_{\text{resonant}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_m}{m}}$$



Resonant frequency variation at various bias voltage

- Modeling shows electric spring.
- The measured resonant frequency increases as the bias voltage increases.
- Electric spring effect is observed in the differential driving.

- June-Young Lee et al., "Electric spring modeling for a comb actuator deformed by the footing effect in deep reactive ion etching", JMM, Vol.13, pp.72-79, 2003.