Lecture 22

Micro Vibratory Gyroscope

- Coriolis Force
  - -Dynamics of a Particle in a Rotating Coordinate System
- •Principle of Vibratory Gyroscope
  - -Tuning Fork
- •Gyro Element
  - -Human-being Gyro
- •Technical Trends of Micro Gyroscope
  - -Applications of Gyroscope
  - -Design of Micro Vibratory Gyroscopes
  - -Tables of Micro Vibratory Gyroscopes

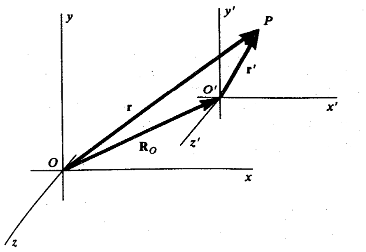
Accelerated Coordinate System

- $Oxyz$: 정지좌표계
- $O'x'y'z'$: 운동좌표계
- 병진운동만을 우선 고려.

위　치　$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}\,'$

속　도　$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}\,'$

가속도　$\vec{a} = \vec{A}_0 + \vec{a}\,'$



$\vec{R}_0, \vec{V}_0, \vec{A}_0$: 운동좌표계의 원점의 위치, 속도, 가속도 벡터.

$\vec{r}\,', \vec{v}\,', \vec{a}\,'$: 운동좌표계에서의 입자 P의 위치, 속도, 가속도 벡터.

만약 운동계가 가속이 안된다면 $\vec{A}_0 = 0$·

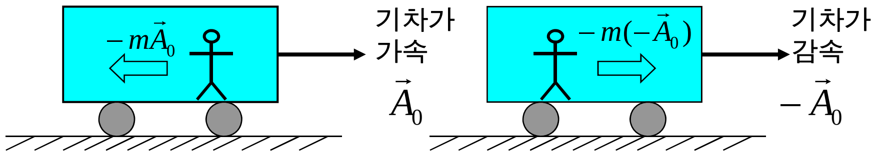
따라서, $\vec{a} = \vec{a}\,'$　　$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}\,'$

Inertial Forces

만약 운동계가 가속되고 있다면 $\vec{F} = m\vec{A}_0 + m\vec{a}'$

그리고, 운동계에서의 힘은 $\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{A}_0 = m\vec{a}'$ 이 된다.

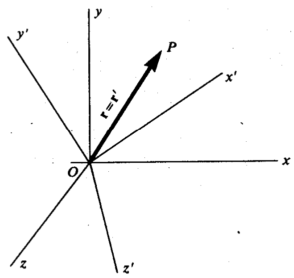
- $m\vec{A}_0$: *Inertial forces*



사람이 느끼는 힘 : $-m\vec{A}_0$

사람이 느끼는 힘 : $m\vec{A}_0$

Rotating Coordinate System



운동계가 회전하고 있다고 가정.

$$\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z = \vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z'$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: 고정 단위 벡터

$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$: 이동 단위 벡터

미분을 취하면

$$\vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt} = \vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

따라서

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

뒤의 세 항은 운동계의 회전에 의해 발생하는 항.

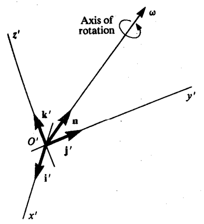
Differentiation Moving Vector

운동계가 $\vec{n}$ (단위 벡터) 방향으로 각속도 ω 로 회전하고 있다고 가정.

$$\vec{\omega} = \omega\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt},\ \frac{d\vec{j}'}{dt},\ \frac{d\vec{k}'}{dt}$$ 를 구하자.

시간 t에서 $t+\Delta t$ 로 변화하면 $\vec{i}'$은 $\vec{i}'+\Delta\vec{i}'$으로 변화.

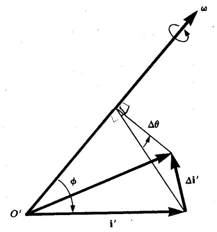


$$\left|\Delta\vec{i}'\right| = 2l\sin(\Delta\theta/2) \cong l\Delta\theta = 1\cdot\sin\varphi\cdot\Delta\theta$$

$$\left|\Delta\vec{i}'\right| \cong (\sin\varphi)\Delta\theta$$

여기서 φ는 $\vec{\omega}$와 $\vec{i}'$사이의 각.

따라서, $$\left|\frac{d\vec{i}'}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{i}'}{\Delta t}\right| = \sin\varphi\frac{d\theta}{dt} = \omega\sin\varphi$$



$\Delta\vec{i}'$ 의 방향 : $\vec{\omega}$와 $\vec{i}'$에 직각.

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}'$$ 이 되고, 같은 방법으로 $$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}',\ \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}'$$

Acceleration in Rotating Coord. Sys. (I)

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$ 에서 $$\vec{v} = \vec{v}' + x'(\vec{\omega}\times\vec{i}') + y'(\vec{\omega}\times\vec{j}') + z'(\vec{\omega}\times\vec{k}') = \vec{v}' + \vec{\omega}'\times\vec{r}'$$ 이 되고

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\right]\vec{r}$$ 으로도 쓸 수 있다. $(\vec{r}' = \vec{r})$

그리고, 이 **Operator**는 모든 벡터에 적용할 수 있다.

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{v}$$ 로 쓸 수 있고

즉, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$ 이므로

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{rot}(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}') + \vec{\omega}\times(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{rot}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Acceleration in Rotating Coord. Sys. (II)

각속도의 미분을 구하면

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{rot} = \dot{\vec{\omega}} \quad ,$$

또한 $\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{rot}$, $\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{rot}$ 이므로

$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

일반적인 경우를 생각해서 운동계가 $\vec{V}_0$의 속도로 병진운동을 겸하고 있다고 가정. 가속도는 $\vec{A}_0$

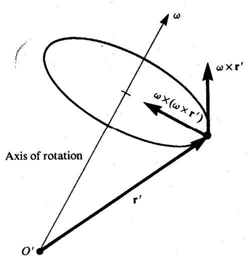
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{V}_0$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \vec{A}_0$$

$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$ ***: transverse acceleration***

$2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ ***: Coriolis acceleration***

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ ***: centripetal acceleration***



Dynamics of a Particle in a Rotating Coordinate System

- 운동계에서의 운동 방정식

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}_0 - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$\vec{F}: Physical \quad force$

- ***Inertial forces***

Coriolis force : $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

회전하는 계에서 입자가 받는 힘. 각속도와 운동계의 회전벡터에 수직.

북반구에서 고기압으로부터의 바람이 시계방향으로 부는 이유.

남반구는 반대방향.

Transverse force : $\vec{F}_{trans} = -m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$

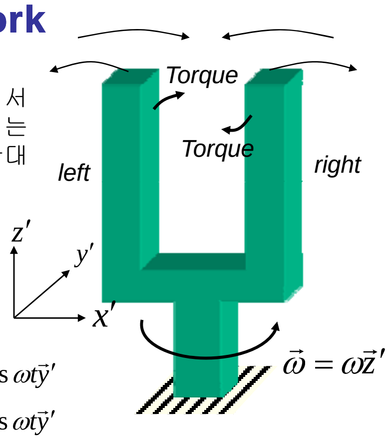
각 가속도에 의해 발생. 운동계의 위치벡터에 수직.

Centrifugal force : $\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

원심력

Tuning Fork

Tuning fork가 벌어졌다 오므려졌다 하면서 진동하고 있을 때 tuning fork축 방향으로 돌리는 각속도가 있으면 tuning fork의 tine이 서로 반대 방향으로 비틀어 진다.
Tuning fork가 벌어질 때



$$\vec{v}_\ell' = -V_0 \cos\omega t \quad \vec{x}', \quad \vec{v}_r' = V_0 \cos\omega t \quad \vec{x}'$$

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{F}_{Cor,\ell} = -2m\omega\vec{z}'\times(-V_0\cos\omega t\vec{x}') = 2m\omega V_0\cos\omega t\vec{y}'$$

$$\vec{F}_{Cor,r} = -2m\omega\vec{z}'\times(V_0\cos\omega t\vec{x}') = -2m\omega V_0\cos\omega t\vec{y}'$$

$$\vec{T}' = \vec{r}_\ell\times\vec{F}_{Cor,\ell} + \vec{r}_r\times\vec{F}_{Cor,r} = (-r\vec{x}')\times(2m\omega V_0\cos\omega t\vec{y}') + (r\vec{x}')\times(-2m\omega V_0\cos\omega t\vec{y}')$$

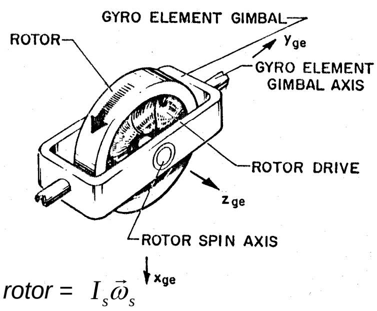
$$= -4m\omega V_0\cos\omega t\vec{z}'$$

*Tuning fork*가 오므러들 때에는 $+\vec{z}'$ 방향 *torque*가 작용.

Gyro Element (I)

Coriolis equation

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$



$\vec{A}$: 정지 좌표계의 임의의 벡터
정지 좌표계에서 본 *Gyro element*의 각 운동량 : $\vec{H}$

$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_{ns}$
$\vec{H}_s$ = *spin angular momentum vector of the rotor* = $I_s\vec{\omega}_s$
I_s = *spin axis moment of inertia of the rotor*
$\vec{\omega}_s$ = *angular velocity of the rotor relative to the gimbal*
$\vec{H}_{ns}$ = *nonspin angular momentum of the gyro element*
Gyro element의 torque

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{fixed} = I\ddot{\vec{\theta}} \qquad (I\ddot{\vec{\theta}} : gyro \;\; element \;\; \text{에 가해지는} \;\; torque)$$

Gyro Element (II)

Coriolis equation을 적용 $\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{H} = I\ddot{\vec{\theta}}$

$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_{ns}$ 이므로 $\left(\frac{d\vec{H}_s}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{d\vec{H}_{ns}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{H}_s + \vec{\omega}\times\vec{H}_{ns} = I\ddot{\vec{\theta}}$

(1) ω_s (gimbal에 대한 rotor의 회전각속도)가 일정하므로

$$\left(\frac{d\vec{H}_s}{dt}\right)_{rot} = 0. \quad (\because \ \vec{H}_s = I_s\vec{\omega}_s)$$

(2) $H_s \rangle\rangle H_{ns}$ 이므로

$\left(\frac{d\vec{H}_{ns}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{H}_s = \vec{T}$; Basic law of motion of a practical gyroscopic element.

제1항 : 무시. Source of the characteristic dynamics or transient response of the gyro element giving rise to nutation in a two-degree-of-freedom unit.

$\vec{\omega}\times\vec{H}_s = \vec{T}$: Practical gyro element performance equation

Gyro element가 받는 torque = $-\vec{\omega}\times\vec{H}_s$

인간 Gyro

자유로이 회전을 할 수 있는 발판에 올라서서 팔을 앞으로 나란히 자세로 자전거 바퀴의 축을 잡는다. 자전거 바퀴를 힘차게 돌린 후, 양팔을 위 아래로 비틀면 몸통이 비틀어지는 토오크가 발생한다. 예를 들어, 자전거 바퀴를 $\vec{x}'$로 돌리고, 오른팔을 내리고 왼팔을 올려서 $\omega\vec{z}'$ 의 입력 각속도를 주면

(practical gyro element performance equation)

$$-\omega\vec{z}'\times H\vec{x}' = -\omega H\vec{y}' = \vec{T}'$$

반시계 방향으로 몸이 회전