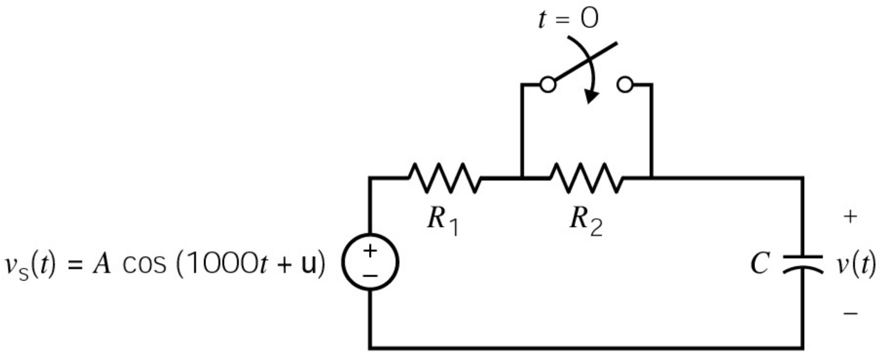
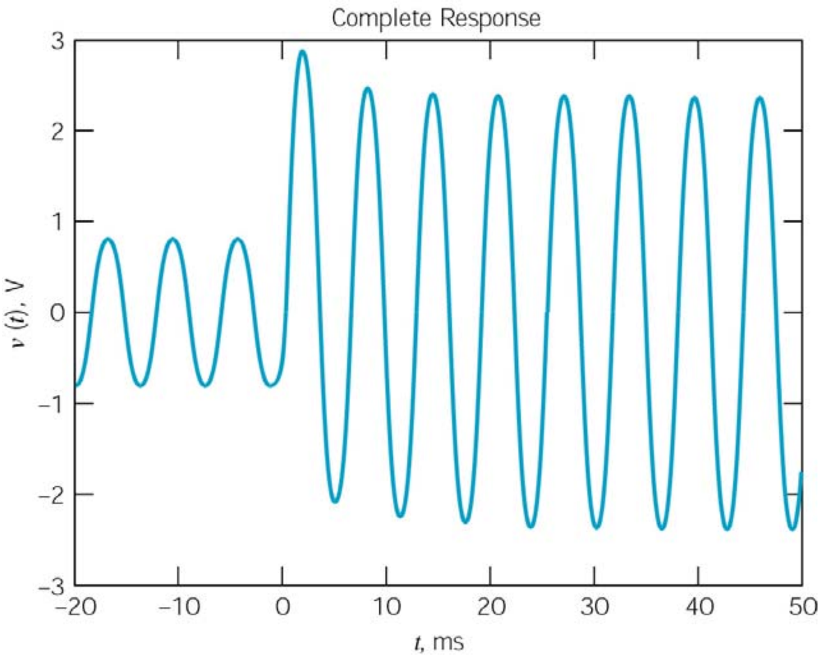
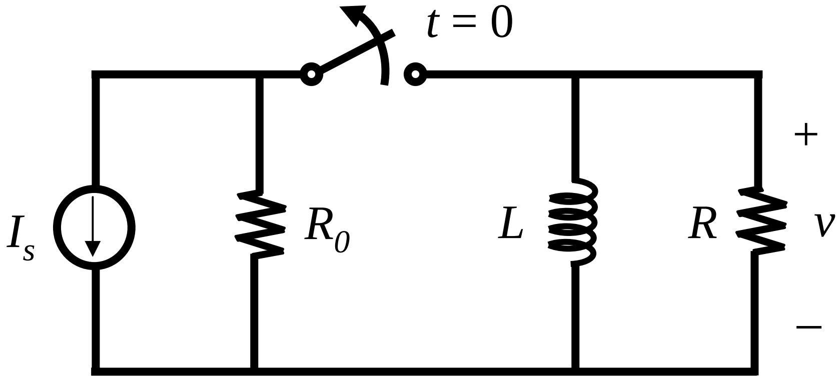
Response of First-Order RL and RC Circuits

- *RL* 또는 *RC* 회로만을 다룸.
- 우선, 외부 전원이 없는 회로, 즉 초기조건에 의해서 전류, 전압이 결정되는 회로의 응답 : **natural response**.
- 다음, 직류 전압이나 전류가 갑자기 가해질 때의 응답 : **step response.**
- 마지막으로, **natural response**, **step response**를 구하는 일반적인 방법을 배운다.

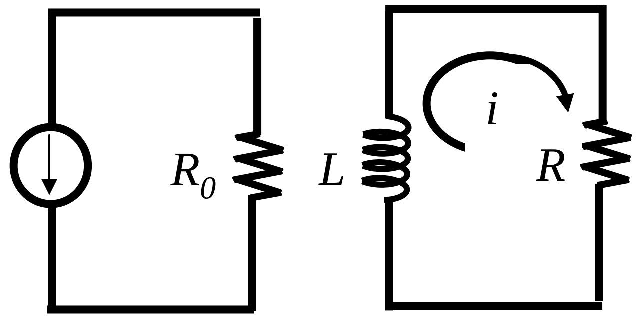




RL Circuit-Natural Response



$t = 0$ 에서 switch open



$t < 0$ 일 때에는 $L\dfrac{di}{dt} = 0$ 이므로

inductor L에 I_s가 흐름.

$t > 0$ 일 때에는 $\boldsymbol{i\,(0^+) = I_s}$

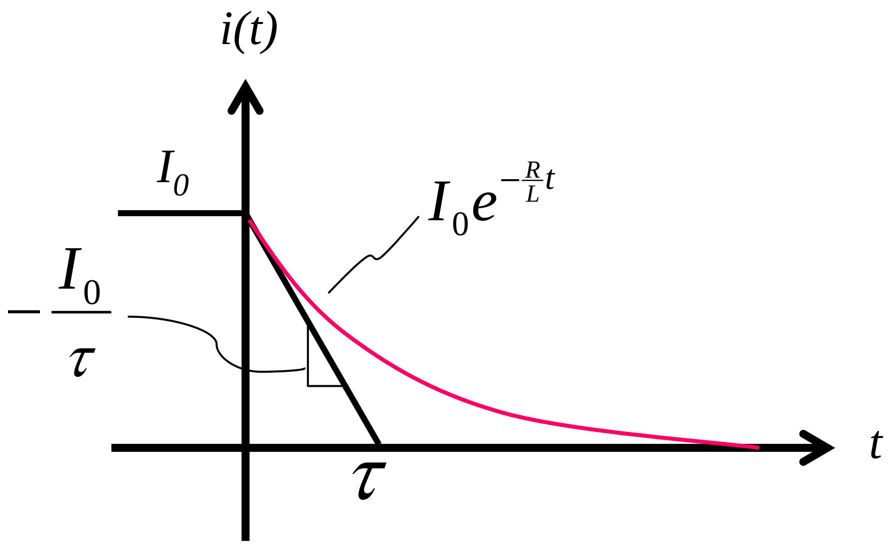
전류는 연속이므로 $\boldsymbol{i(0^-) = i(0^+)}$

$t > 0$ 일 때에는 **KVL**에 의해서

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0\ ,\quad \text{초기조건}\ \ i(0^+) = I_s$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0\,,\quad (e^{\frac{R}{L}t}i)' = 0\,,\quad i = K\,e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow i(t) = I_s e^{-\frac{R}{L}t} = I_0\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

Time Constant



$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

τ = L/R **(time constant, 시정수) :**

특성을 나타내는 시간.

만약 $t = \tau$ 이면 e^{-1}배 **(37 %)**

$t = 5\tau$ 이면 e^{-5}배 **(1 % 이하).**

$1/\tau$ 은 $t = 0$ 에서의 변화율을 의미.

τ가 작다 : 전류가 빨리 변화.

τ가 크다 : 전류가 천천히 변화.

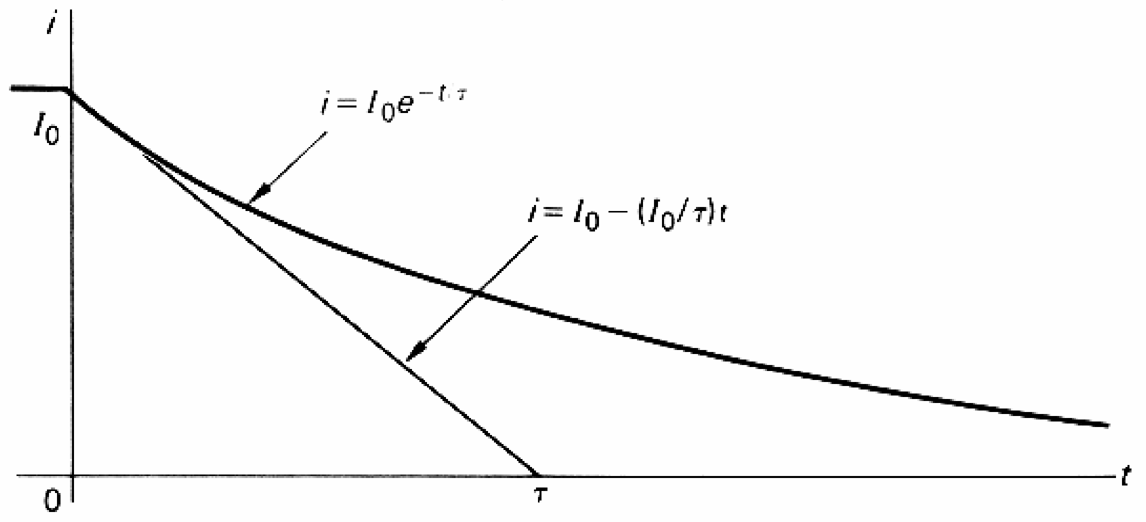
Resistor에서 소모되는 Power

$$p = vi = Ri^2 = RI_0^2 e^{-2t/\tau} \quad for \quad t \geq 0^+$$

Energy $$W = \int_0^t p\,dx = RI_0^2 \int_0^t e^{-2x/\tau} dx = RI_0^2 \frac{\tau}{2}\left[1 - e^{-2t/\tau}\right]$$

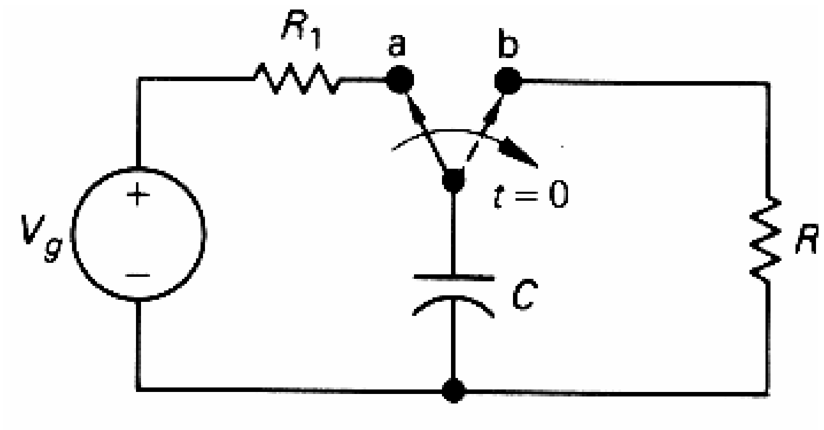
$$= \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}) \qquad \because \tau = \frac{L}{R}$$

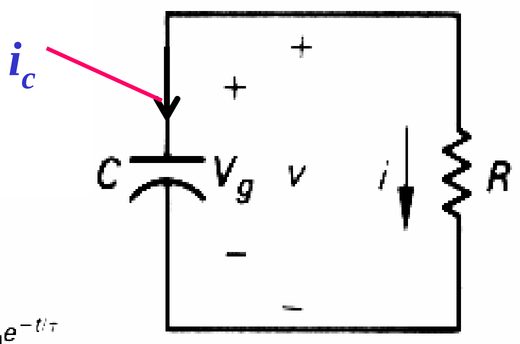
$t \to \infty$ 이면 $W = 1/2\, LI_0^2$ 이 되어서
저항에서 소모하는 에너지는 인덕터에 축적한 양과 같아진다.
전류는 처음에는 I_0이었지만 5τ 후에는 거의 영이 된다.

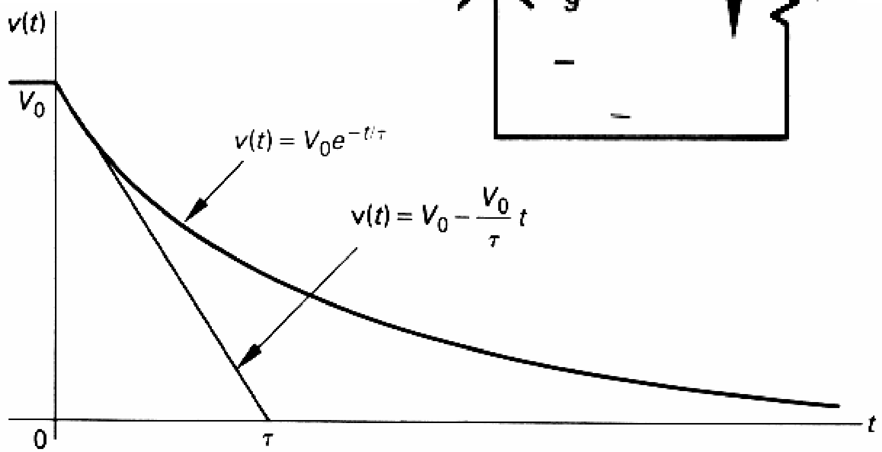


- 따라서, 과도응답은 switching후 짧은 시간에 존재하고, 정상응답은 switching후 충분히 긴 시간이 지난 후 존재한다.

RC Circuit-Natural Response







Capacitor에는 v_g가 걸린다 (∵ 전류 = 0).

$$v(0^+) = V_0, \quad i_c = -i = C\frac{dv}{dt}$$

$$KVL: -v + Ri = 0 \Rightarrow \; -v - RC\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0, \quad (e^{\frac{t}{RC}}v)' = 0$$

$$v = Ke^{-\frac{t}{RC}}, \; v(0^+) = V_0 = K$$

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad for \;\; t \geq 0$$

$$= V_0 e^{-t/\tau} \quad \text{여기서} \quad \tau = RC$$

$$p = vi = v(-C\frac{dv}{dt}) = (V_0 e^{-t/RC})(C \cdot \frac{V_0}{RC} e^{-t/RC})$$

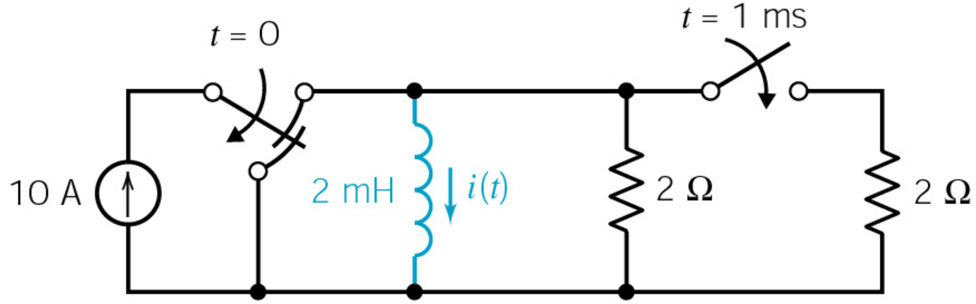
$$= \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

$$W = \int_0^t p\,dt' = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/RC})$$

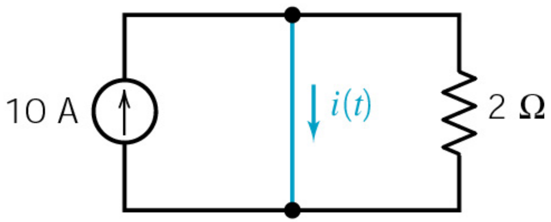
Sequential Switching (I)

회로에서 **switching**을 두 번 이상 하는 경우 **- sequential switching**
Inductor 전류와 **capacitor** 전압이 연속이므로 이 조건을 이용한다**.**

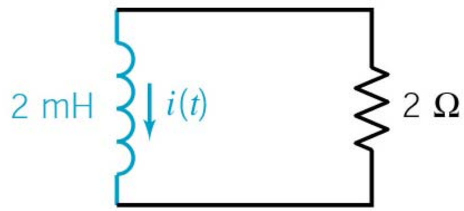
Example



(a) A circuit with sequential switching



(b) $t < 0$



(c) $0 \le t < 1$ **ms**

$t < 0$ 일 때 회로는 **(b)**와 같다**.**

따라서**,** $i(0^-) = 10$ **A** $= i(0^+)$

$0 \le t < 1$ ms 일 때 회로는 **(c)**와 같다**.**

$$2\times10^{-3}\frac{di}{dt} + 2i = 0, \quad i(0^+) = 10$$

$$\frac{di}{dt} + 1000\,i = 0$$

$$i(t) = K\ e^{-1000\,t}$$

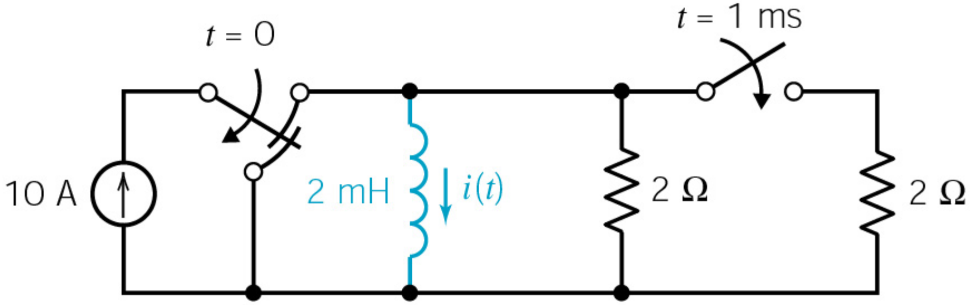
초기값에 의해 $K = 10$

$0 \le t < 1$ ms 에 대해서

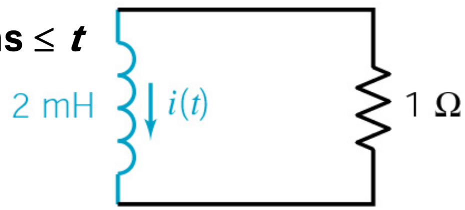
$$i(t) = 10\ e^{-1000t}$$

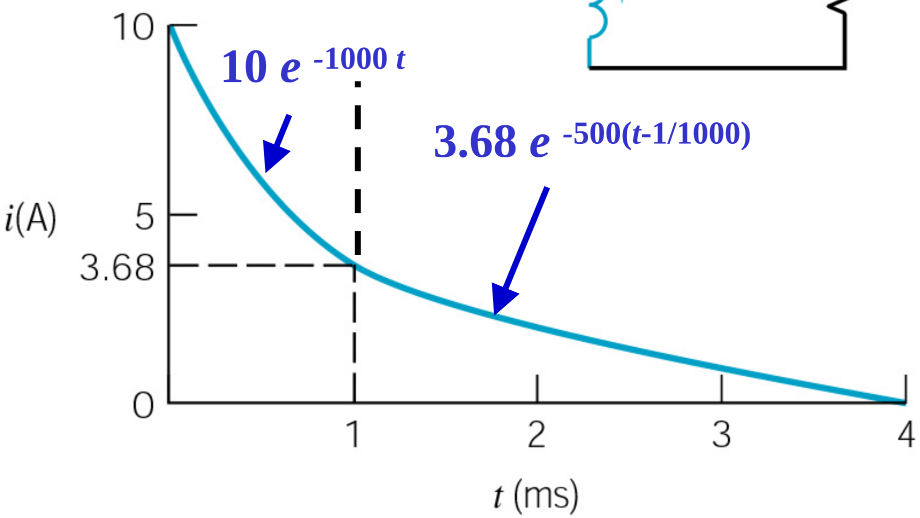
$$i(1\,\text{ms}) = 10\ e^{-1} = 3.68\ \text{A}$$

Sequential Switching (II)



(d) 1 ms ≤ *t*





Current waveform for $t \geq 0$.
The exponential has a different time constant for $0 \leq t < t_1$ and for $t \geq t_1$ where t_1 =1 ms.

1 ms < *t* 일 때 회로는 (d)와 같다.

***t* = 1 ms 일 때 전류는 연속이므로**

$$2\times 10^{-3}\frac{di}{dt}+1i=0,\quad i(1\,\mathrm{ms})=3.68$$

$$\frac{di}{dt}+500\,i=0$$

$$i(t)=K\ e^{-500\,t}$$

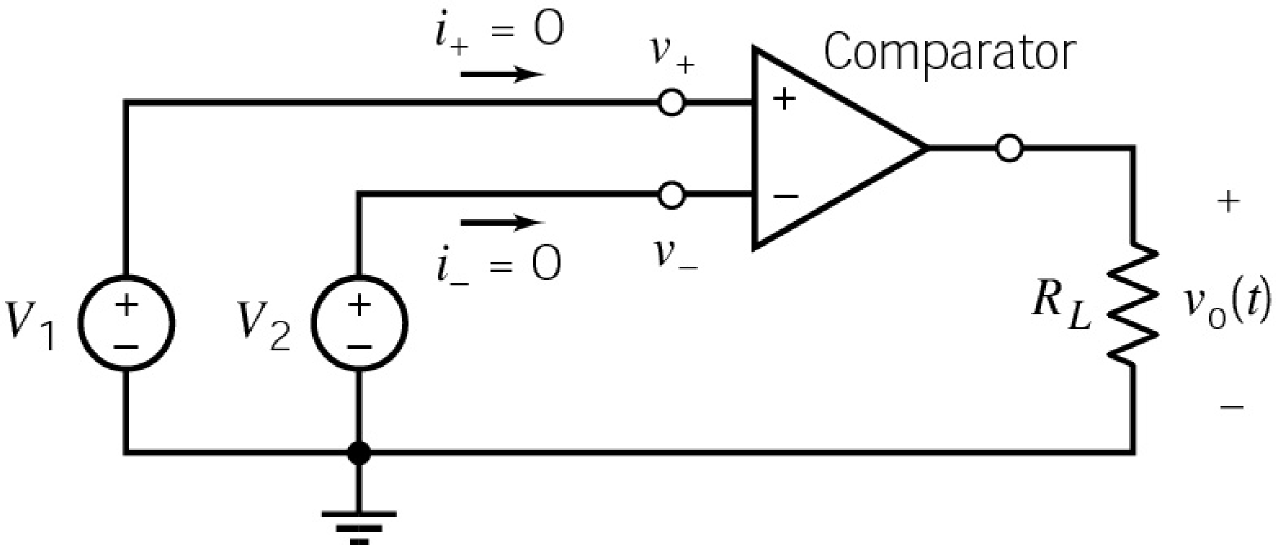
초기값 $\quad i(1\,\mathrm{ms})=3.68=K\ e^{-0.5}$

$$K\ =3.68\ e^{0.5}$$

$$i(t)=3.68\ e^{-500\,t+0.5}$$

$$=3.68\ e^{-500\,(t-1/1000\,)}$$

Comparator

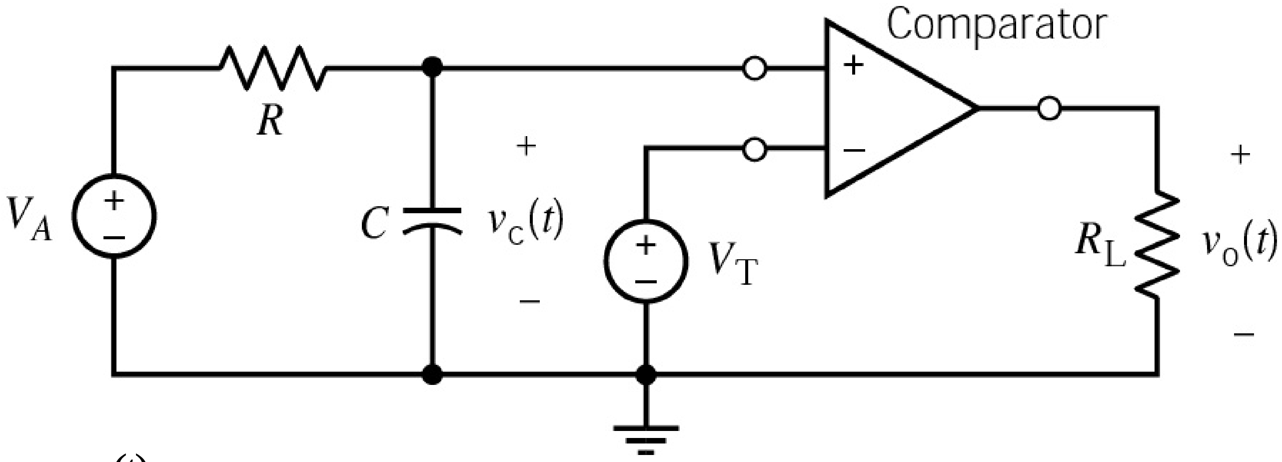


- 입력을 비교하여 두 출력 중 하나를 출력으로 함.

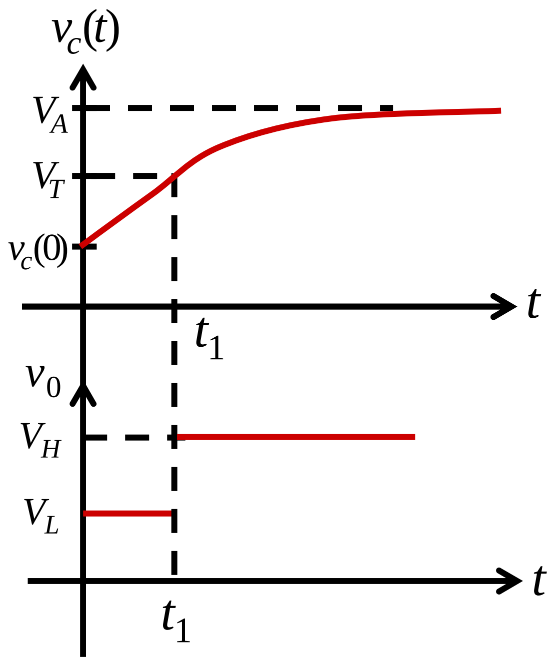
$$v_0(t) = \begin{cases} V_H & if \quad v_+ > v_- \\ V_L & if \quad v_+ < v_- \end{cases}$$

- 입력 전류는 영.
- 기호 : **Op amp**에 **comparator**라고 씀.

Comparator of Capacitor Voltage (I)



A comparator is used to compare the capacitor voltage, $v_c(t)$, to a threshold voltage, V_T.



$V_A > V_T > V_C(0)$ 라고 가정.

$v_c(t)$가 $v_c(0)$로부터 V_A로 커지면서 V_T에서 스위칭이 일어나고 $v_0 = V_L$로부터 V_H로 바뀐다.

이 때 걸리는 시간을 구해 보자.

$$v_0(t) = \begin{cases} V_H & if \quad v_c(t) > V_T \\ V_L & if \quad v_c(t) < V_T \end{cases}$$

Comparator of Capacitor Voltage (II)

- **Noninverting 단자에서 KCL.**

$$\frac{v_c - V_A}{R} + C\frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = V_A$$

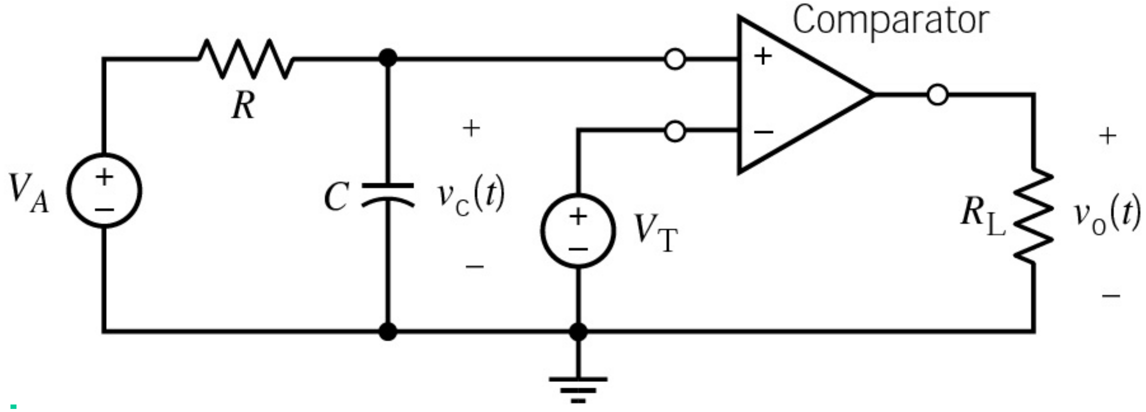
$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{V_A}{RC}$$

$$v_c = V_A + K\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

초기값 $v_c(0) = V_A + K$

$$K = v_c(0) - V_A$$

$$v_c(t) = V_A + (v_c(0) - V_A)e^{-\frac{t}{RC}}$$

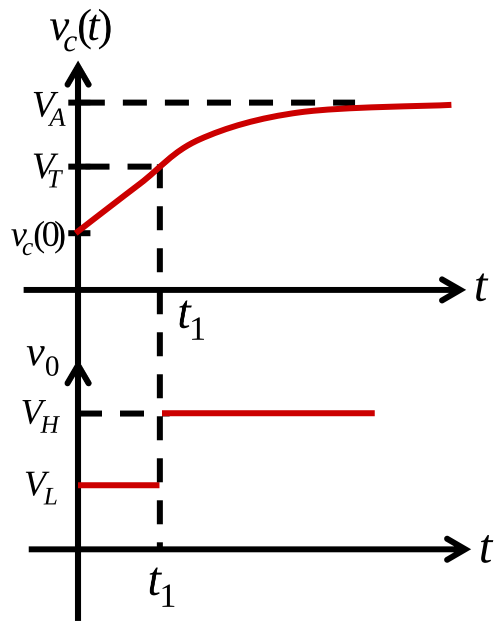


$t = t_1$ 에서 $v_c(t) = V_T$ 라면

$$V_T = V_A + (v_c(0) - V_A)e^{-\frac{t_1}{RC}}$$

$$-\frac{t_1}{RC} = \ln\left(\frac{V_A - V_T}{V_A - v_c(0)}\right)$$

$$\therefore t_1 = RC\ln\left(\frac{V_A - v_c(0)}{V_A - V_T}\right)$$



Stability of First-Order Circuits

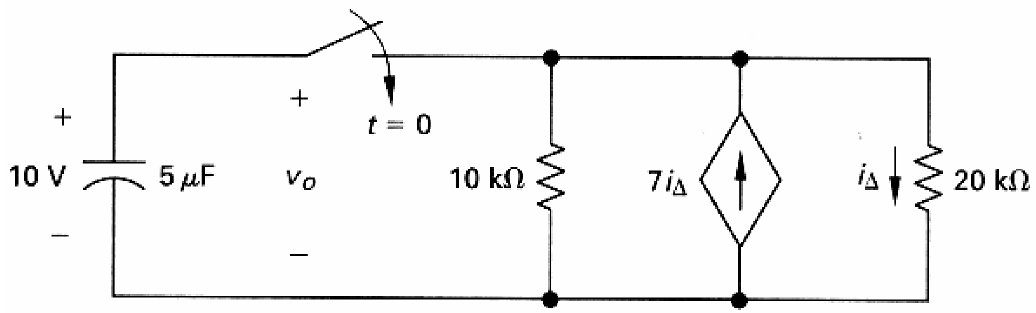
- **Inductor, capacitor, resistor, independent source** 만을 가진 회로는 **stable**하다.
- 그러나, 회로 응답이 시간적으로 감쇠하지 않고 지수 함수적으로 증가할 수도 있다. **Dependent source**를 갖는 경우 가능하다.
- **Inductor**나 **capacitor**에서 본 R_{Th}가 음이면 **unbounded response**가 나타나서 **unstable**하다.
- **RC**회로의 경우

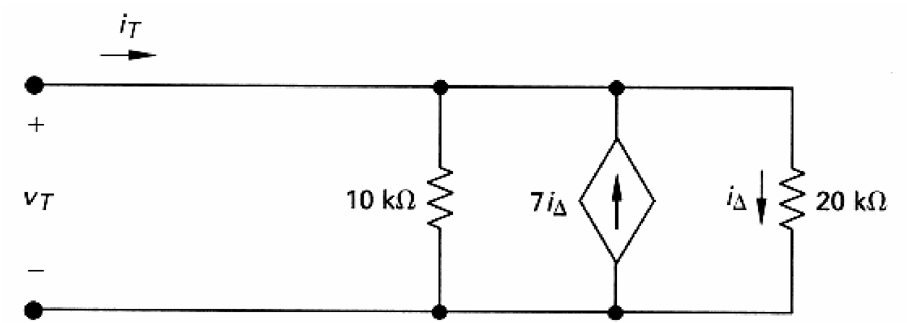
$$\frac{dv_c}{dt} - \frac{1}{R_{Th}C} v_c = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = V_0 e^{\frac{t}{R_{Th}C}}$$

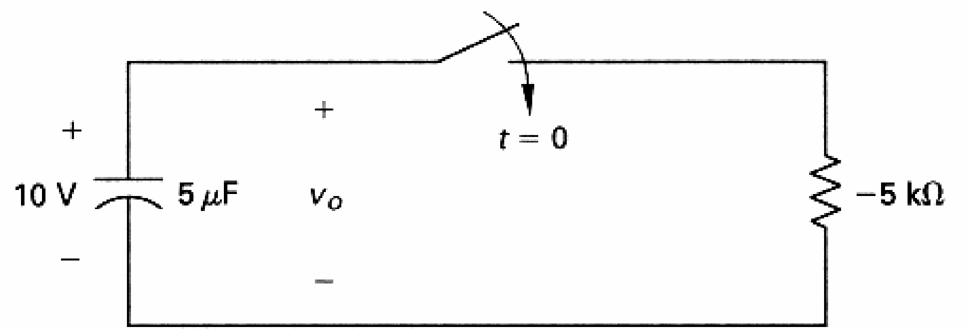
- 최종 값은 소자의 특성에 따라 제한된다.

Example of Stability of First Order Circuits

$t = 0$ 에서 스위치가 닫힌다. 이 때 $V_c(0) = 10$ V 이다. $\quad v_o(t) = ?$







KCL에서

$$5\times10^{-6}\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{10000} - 7i_\Delta + \frac{v_o}{20000} = 0$$

여기서 $i_\Delta = \dfrac{v_o}{20000}$ 이므로

$$5\times10^{-6}\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{10000}\left(1 - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$5\times10^{-6}\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{-5\times10^{3}} = 0$$

$$R_{Th} = -5\times10^{3}\,\Omega$$

$$\frac{dv_o}{dt} - 40v_o = 0$$

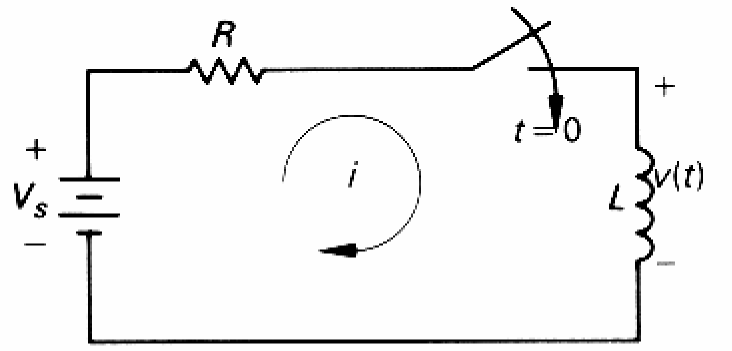
$$v_o = v_c = 10e^{40t} \quad (\because v_c(0) = 10\text{ V})$$

$v_c = 150$ V 일 때 절연파괴.

$$150 = 10e^{40t} \Rightarrow \quad t = (\ln 15)/40 \ \text{sec}$$

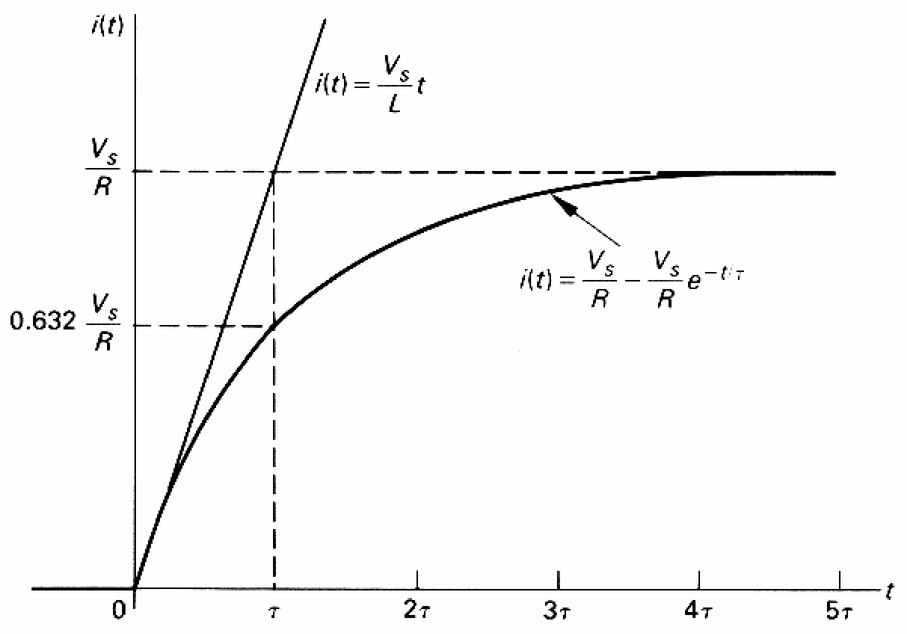
Step Response of RL Circuit (I)

회로에 갑자기 일정 전압이나 전류를 가했을 때의 응답 : **step response.**



$$t > 0 \text{ 일 때 } V_s = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$i = i_h + i_p$$



$$For\ i_h \quad Ri + L\frac{di}{dt} = 0, \ i_h = Ke^{-t/\tau}$$

$$For\ i_p \quad Ri + L\frac{di}{dt} = V_s, \ i_p = \frac{V_s}{R}$$

$$i(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$$

$$i(0) = I_0 \quad \text{라하면} \quad I_0 = K + \frac{V_s}{R}$$

Step Response of RL Circuit (II)

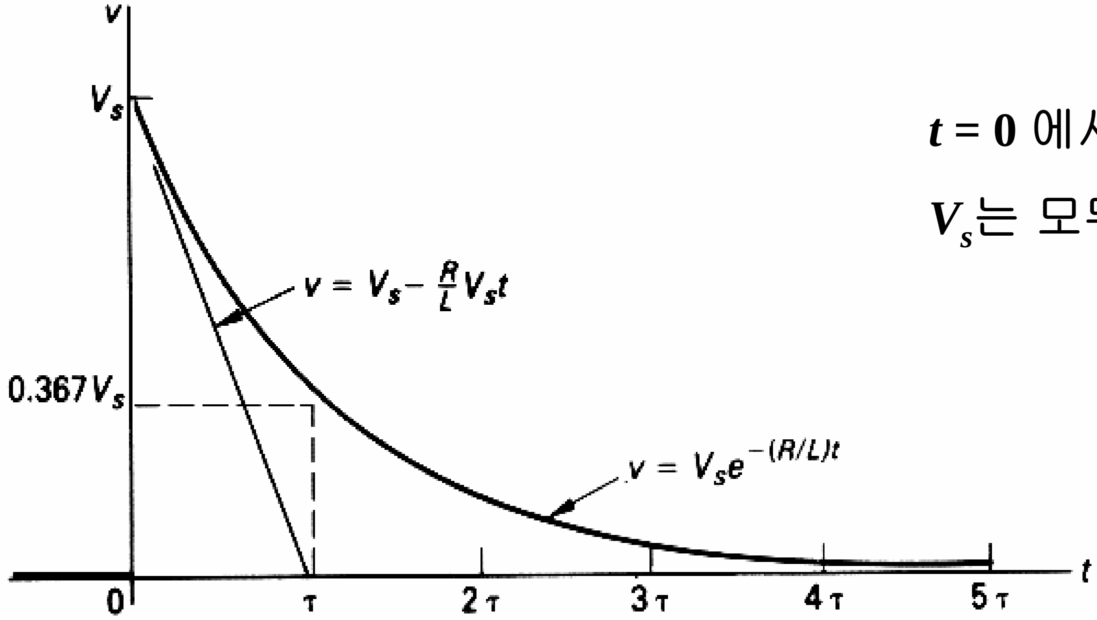
$$i(t) = (I_0 - \frac{V_s}{R})e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$$

만약 $\quad I_0 = 0,\ i(t) = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-t/\tau})$

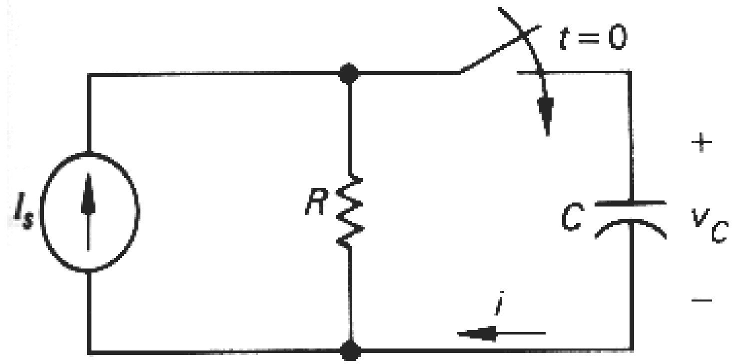
$t = 0$ 에서의증가율 : $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{V_s}{R}\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{V_s}{L}$

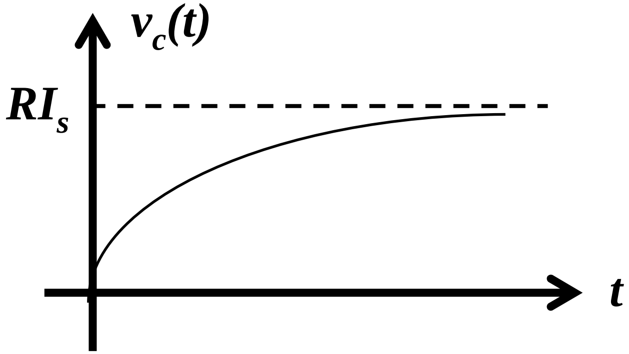
t* = 0** 에서 ***R 에서의 전압강하는 영이므로

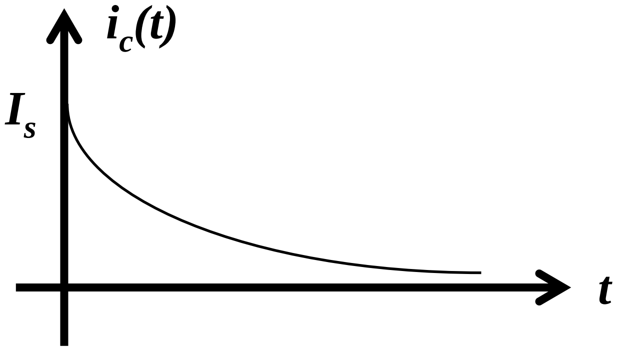
V_s는 모두 **inductor**에 걸림**.**



Step Response of RC Circuit







$\boldsymbol{t<0}$ 에서 $v_c(0^-)=v_c(0^+)=V_0$

$\boldsymbol{t>0}$ 에서

$$\textbf{KCL :}\quad -I_s+\frac{v_c}{R}+C\frac{dv_c}{dt}=0$$

$$\frac{dv_c}{dt}+\frac{1}{RC}v_c=\frac{I_s}{C}$$

$$v_c(t)=v_{ch}+v_{cp} \qquad v_{ch}(t)=Ke^{-t/\tau}$$

$$v_{cp}(t)=RI_s$$

$$\begin{aligned} v_c(t)&=Ke^{-t/\tau}+RI_s \\ &=(v_0-RI_s)e^{-t/\tau}+RI_s \quad for\ t\geq 0 \end{aligned}$$

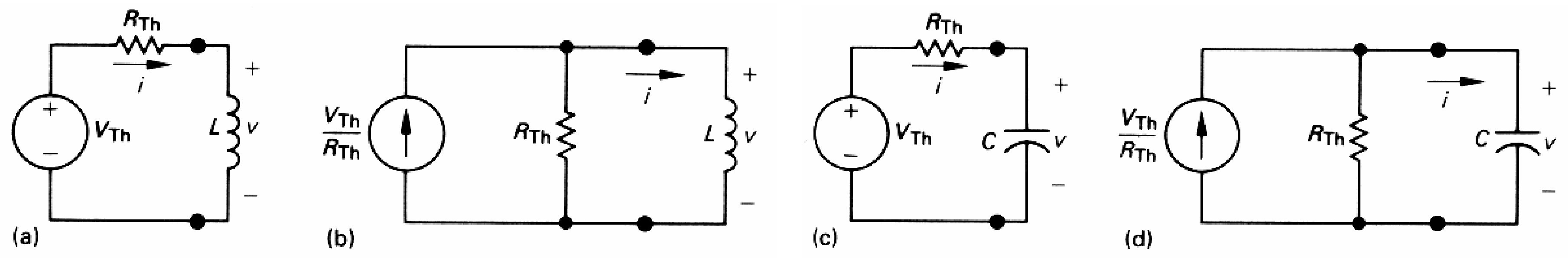
$If\ \ V_0=0,$

$$v_c(t)=RI_s(1-e^{-t/\tau})$$

$$i_c(t)=C\frac{dv_c}{dt}=I_se^{-t/\tau}$$

General Solution of Constant Source

– *RL, RC* 회로는 다음의 네 회로로 정리.



식을 정리하면

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=K, \quad K: \text{상수}$$

$$x = x_h + x_p$$

$$x_h = Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \quad x_p = \tau \cdot K$$

$$x(t) = Ce^{-t/\tau} + \tau K$$

$t = t_0$ 일 때 초기값 $x(t_0)$

$$x(t_0) = Ce^{-t/\tau} + \tau K \Rightarrow C = \{x(t_0) - \tau K\}e^{t_0/\tau}$$

$$x(t) = \{x(t_0) - \tau K\}e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \tau K$$

- **Inductor**에서 전류, **capacitor**에서 전압이 연속.

$$x(t_0^+) = x(t_0^-)$$

즉, $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-), v_c(t_0^+) = v_c(t_0^-)$

General Solution of Nonconstant Source

Steady-State Response to a Forcing Function

Forcing Function $y(t)$	Steady-State Response $x_f(t)$
1. Constant $y(t) = M$	$x_f = N$, a constant
2. Exponential $y(t) = M e^{-bt}$	$x_f = N e^{-bt}$
3. Sinusoid $y(t) = M \sin(\omega t + \theta)$	$x_f = A \sin\omega t + B \cos \omega t$

Application – Flash Lamp Circuits (I)

- 일회용 플래시가 달린 카메라.
- **1.5 V** 의 건전지로 수천 **V** 를 발생시켜 플래시를 동작.
- 캐패시터가 에너지($W=Pt=(VI)\ t$)를 저장했다가 짧은 시간에 작은 전류를 흘려서 큰 전압을 얻는다.

- 주요 부품 :

(1) 160 μF, 330 V 극성화된 전해 캐패시터 : 플래시 램프에 필요한 전하를 축적.

(2) 플래시 램프

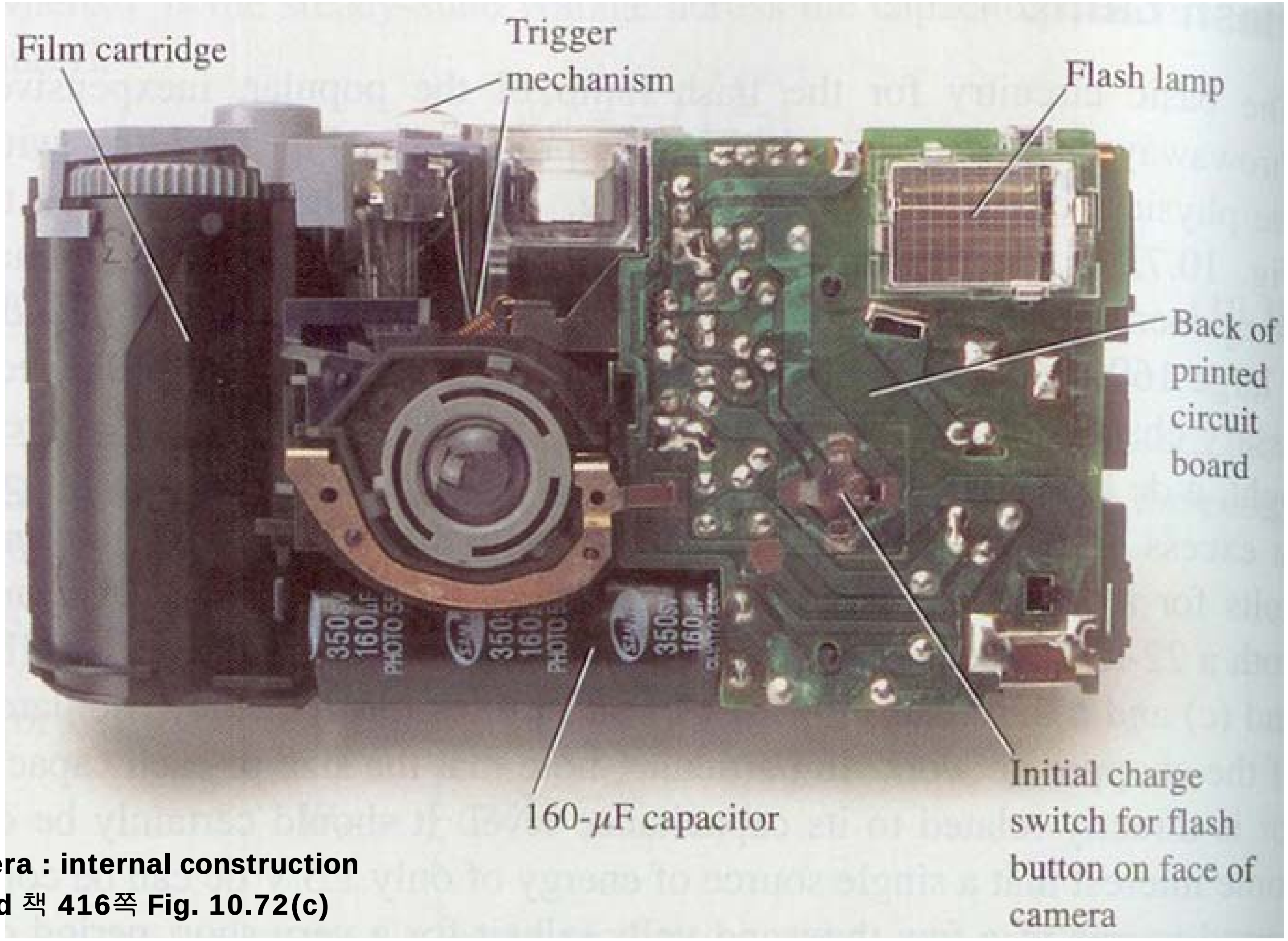
(3) 1.5 V 건전지

(4) chopper 회로 : **300 V** 를 넘는 직류 전압을 발생시킴.

(5) trigger 회로 : 짧은 시간이지만 수천 **V** 를 발생시킴.

Flash camera : general appearance
Boylestad 책 415쪽 Fig. 10.72(a)

Application – Flash Lamp Circuits (II)



Flash camera : internal construction
Boylestad 책 416쪽 Fig. 10.72(c)

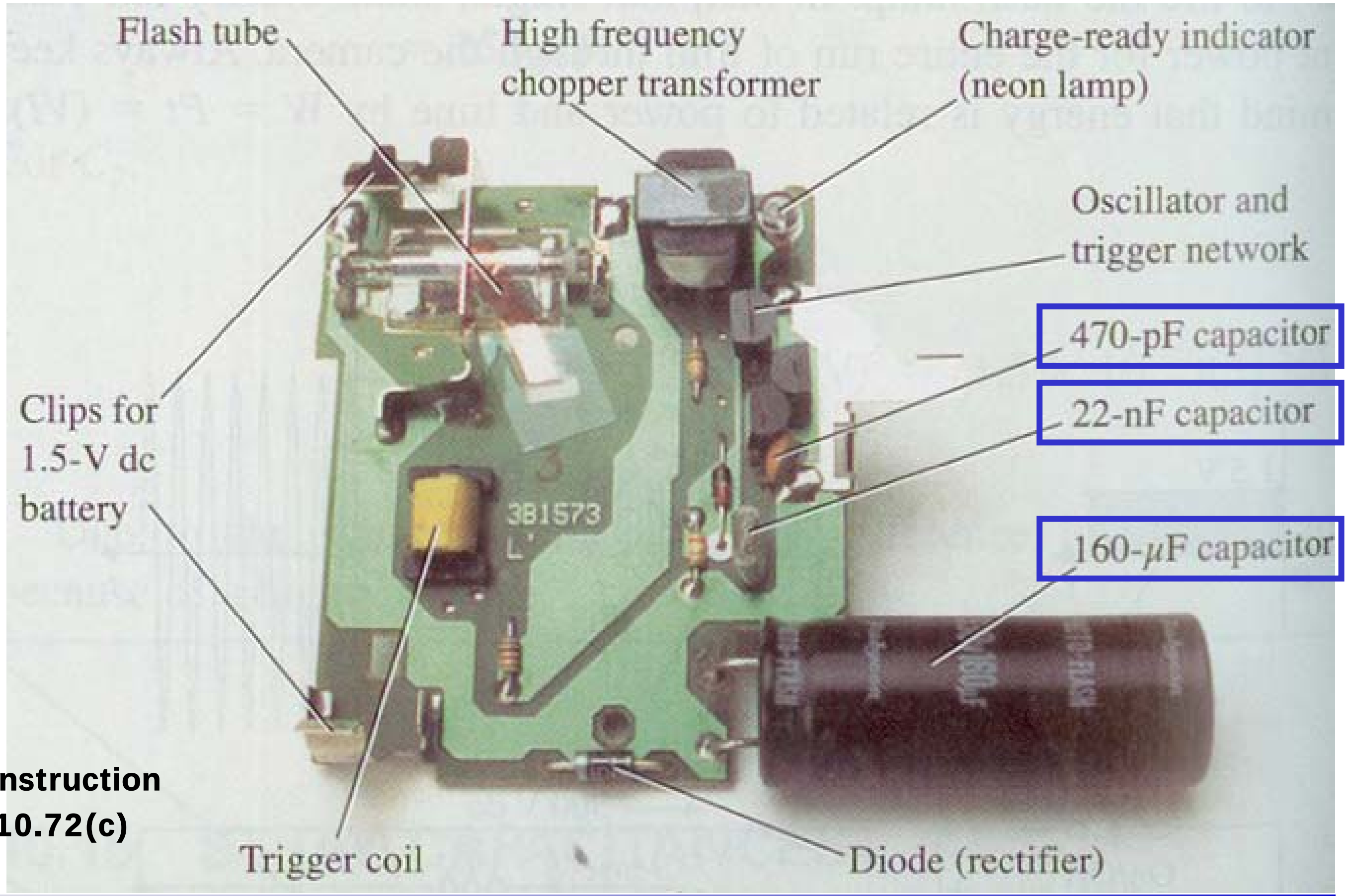
Application – Flash Lamp Circuits (III)

- 세 종류의 캐패시터가 사용됨

(1) 160 μF, 330 V 극성화된 전해 캐패시터 **:** 플래시 램프에 필요한 전하를 축적**.**

(2) 22 nF 캐패시터 **: trigger** 회로에 사용**.**

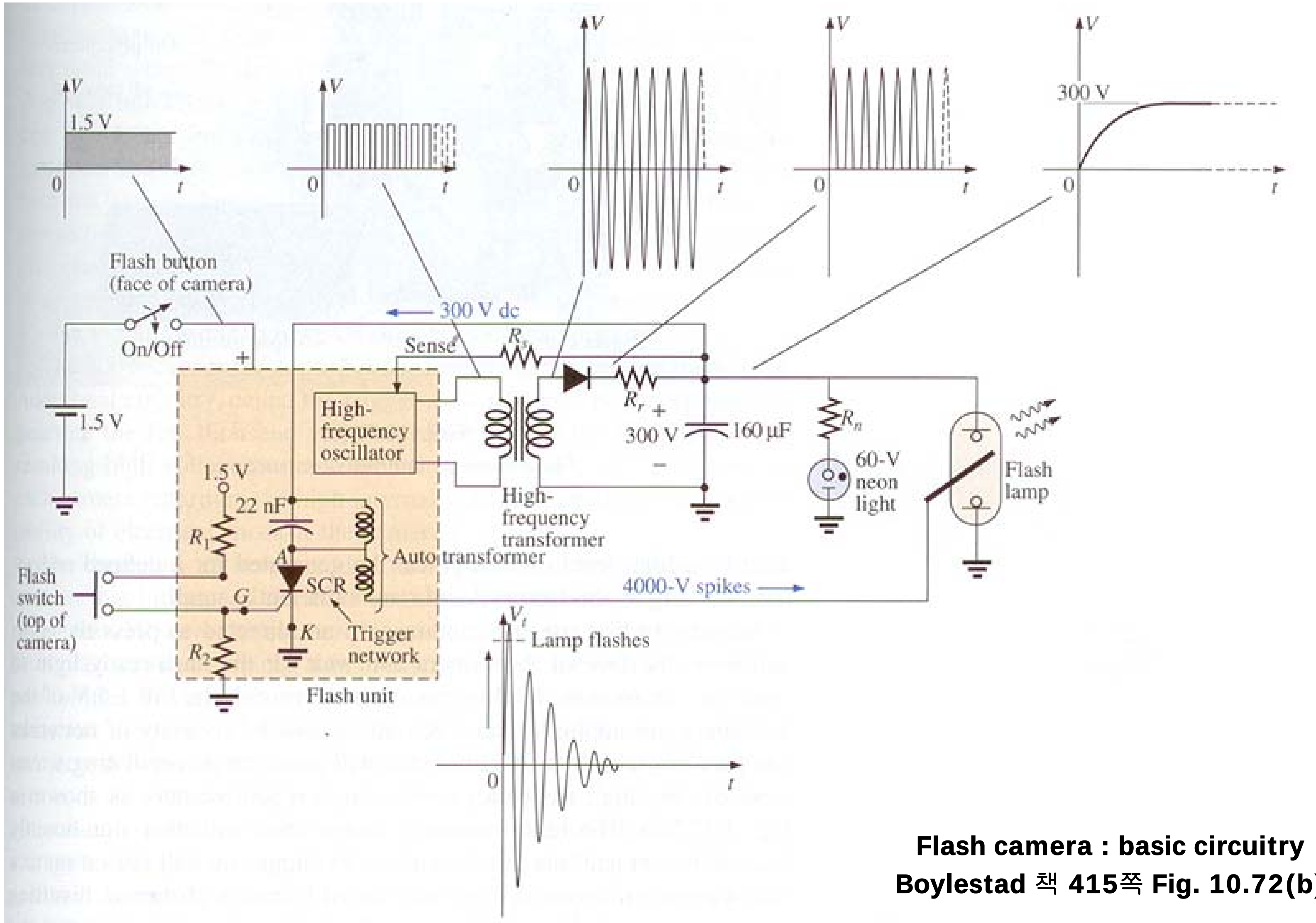
(3) 470 pF 캐패시터 **: chopper** 회로에서 고주파 발진에 사용**.**



Flash camera : internal construction

Boylestad 책 **416**쪽 **Fig. 10.72(c)**

Application – Flash Lamp Circuits (IV)



Flash camera : basic circuitry
Boylestad 책 415쪽 Fig. 10.72(b)

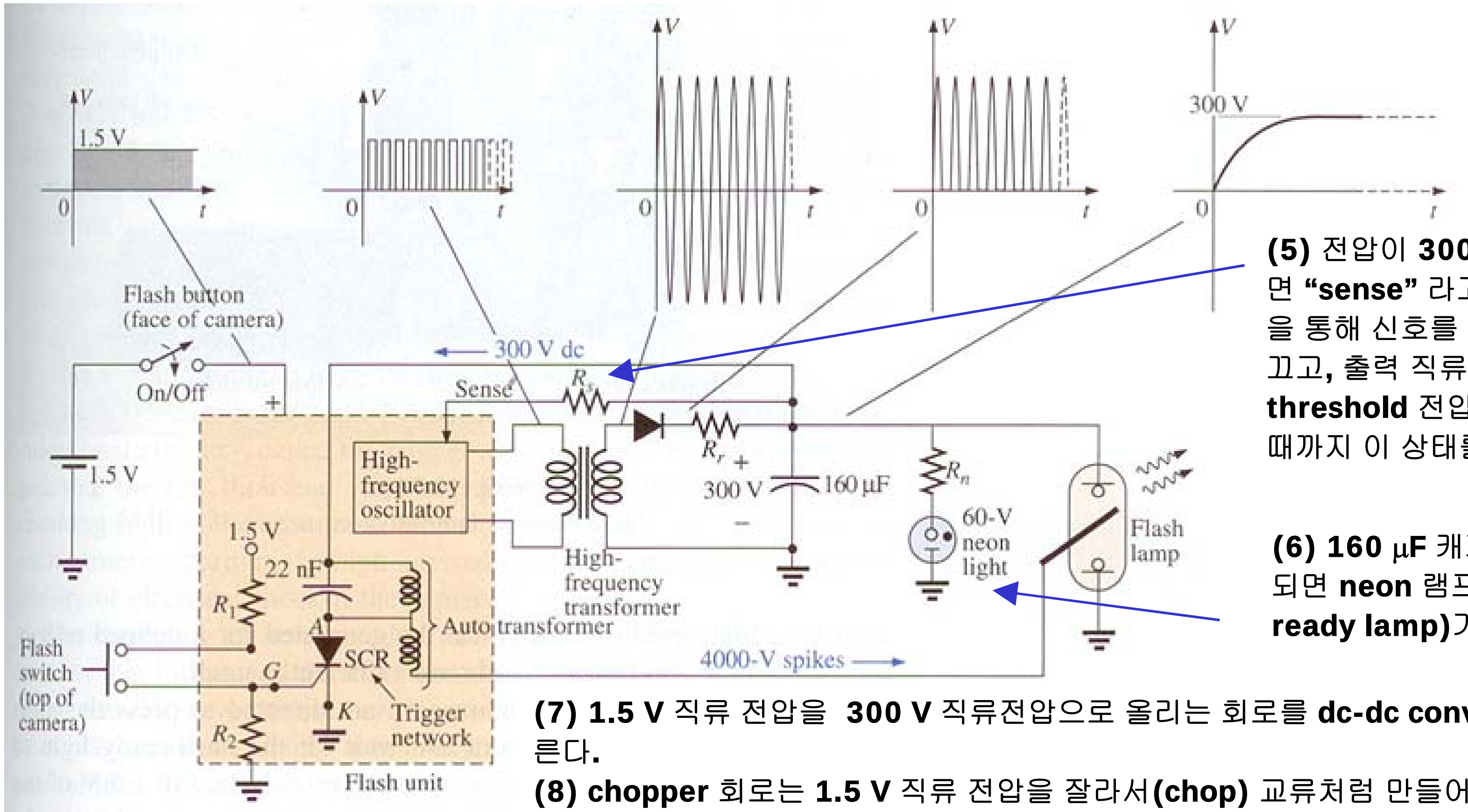
Application – Flash Lamp Circuits (V)

(1) 플래시 버튼을 누르면 **1.5 V**가 전자회로에 가해진다.

(2) 이 회로는 고주파 발진 파형을 만든다.

(3) 고주파 변압기가 발생한 전압의 크기를 크게 해서 반파(半波) 정류기에 전압이 걸린다.

(4) 이 전압은 **160 μF** 캐패시터를 충전해서 **300 V** 까지 전압이 올라간다.



(5) 전압이 **300 V** 까지 올라가면 **"sense"** 라고 표기된 도선을 통해 신호를 보내 발진기를 끄고, 출력 직류전압이 낮은 **threshold** 전압 아래로 떨어질 때까지 이 상태를 유지한다.

(6) 160 μF 캐패시터가 충전되면 **neon** 램프**(flash ready lamp)**가 커진다.

(7) 1.5 V 직류 전압을 **300 V** 직류전압으로 올리는 회로를 **dc-dc converter** 라고 부른다.

(8) chopper 회로는 **1.5 V** 직류 전압을 잘라서**(chop)** 교류처럼 만들어서 변압기에 사용할 수 있도록 한다.

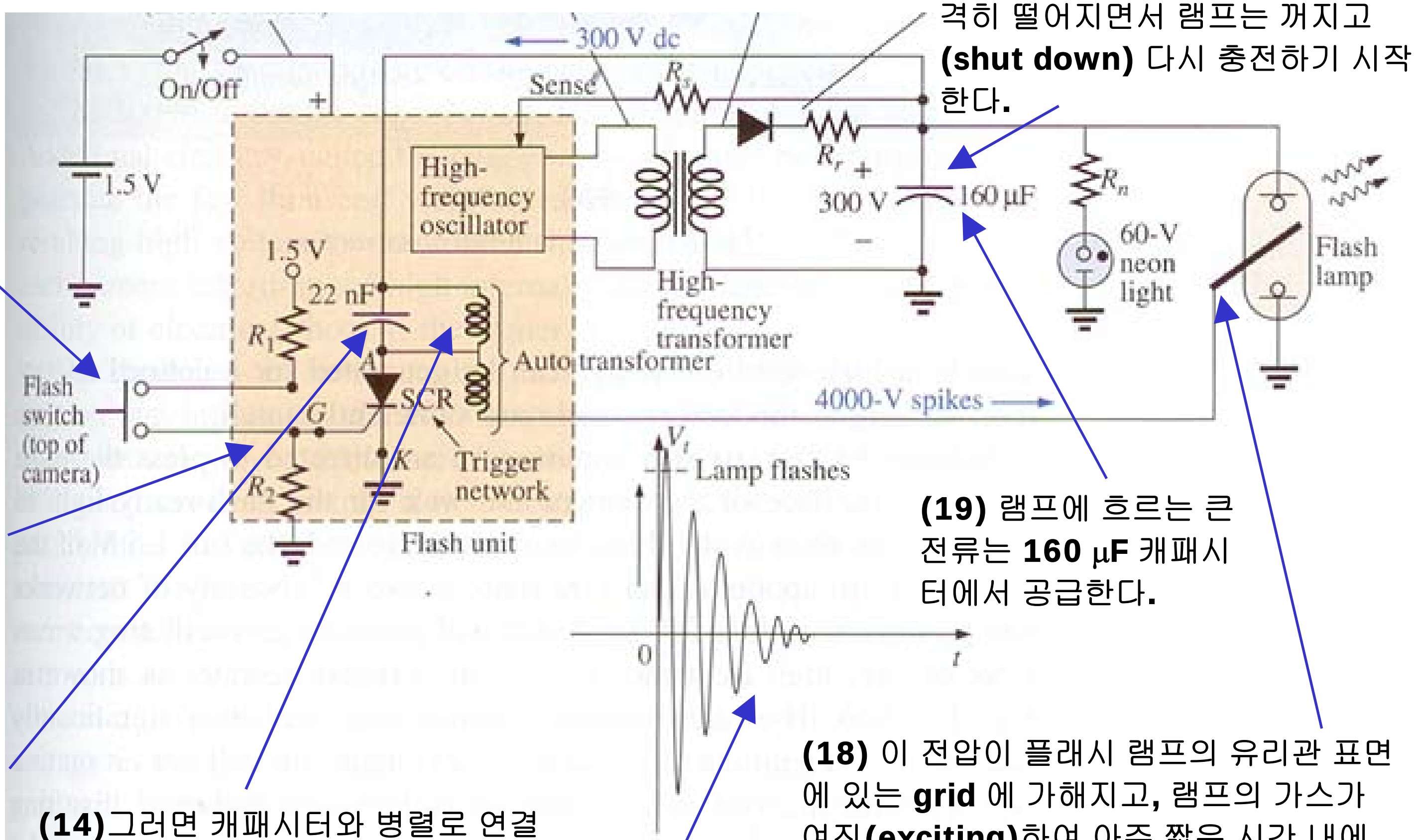
Application – Flash Lamp Circuits (VI)

(9) **trigger** 회로는 **300 V** 를 수천 **V** 로 높여서 플래시 램프를 점화 **(“firing”)**시킨다.
(10) flash switch 가 닫히면 저항 R_1과 R_2 가 분압 회로를 구성하게 된다.

(11) R_2 에 걸리는 전압은 **SCR(silicon-controlled rectifier)**의 **gate G** 에 인가하여 **SCR**을 동작시켜 **SCR** 의 **A(anode)** 단자와 **K(cathode)** 단자 사이를 **short** 으로 만든다.

(12) 22 nF 의 캐패시터는 **300 V** 로 충전되고**, 300 V** 에 다다르면 전류가 흐르지 않게 된다.
(13) SCR 에 흐르는 전류가 영이 되므로 소자 특성에 의해서 **SCR** 은 다시 **open** 이 된다.

(20) 160 μF 캐패시터 전압은 급격히 떨어지면서 램프는 꺼지고 **(shut down)** 다시 충전하기 시작한다.



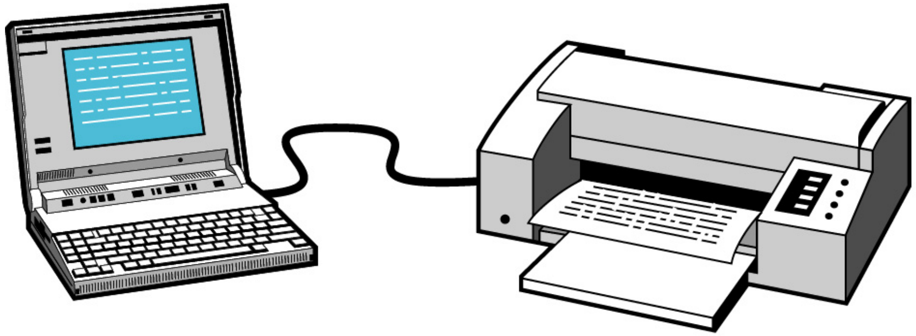
(19) 램프에 흐르는 큰 전류는 **160 μF** 캐패시터에서 공급한다.

(18) 이 전압이 플래시 램프의 유리관 표면에 있는 **grid** 에 가해지고**,** 램프의 가스가 여진**(exciting)**하여 아주 짧은 시간 내에 큰 전류가 흐르면서 발광한다.

(14)그러면 캐패시터와 병렬로 연결된 **coil** 을 통해서 방전하기 시작한다.
(15) 병렬 **coil** 은 인덕터와 저항으로 모델링 된다. 이 때 에너지는 캐패시터와 인덕터 사이를 오가게 되고, 이를 **“flyback effect”** 라고 한다.

(16) coil 전압은 진동**(“ringing”)**하면서 감쇄하게 된다.
(17) 이 전압은 변압기를 통해서 크기가 커져서 플래시를 점화 **(“firing”)** 할 수 있는 **4,000 V**에 이르게 된다.

Delay between Computer and Printer (I)

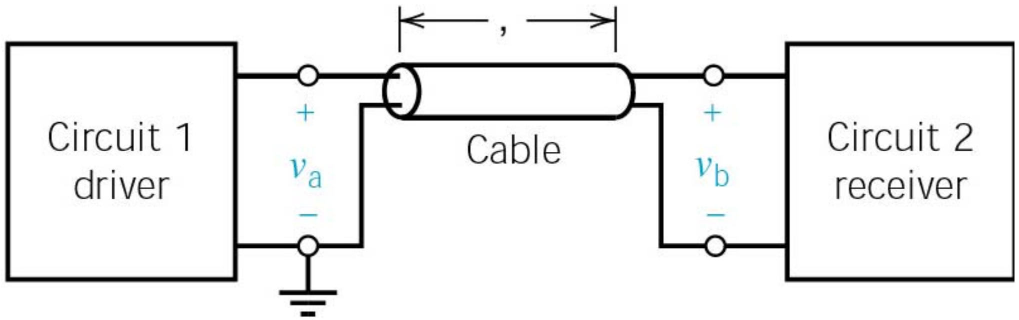


(a) A printer Connected to a laptop computer

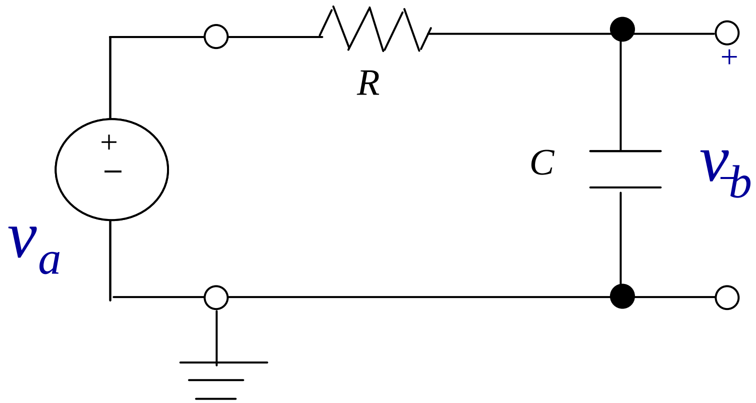
- **Computer**와 **printer**사이의 신호 전달 회로는 그림**(b)**와 같이 볼 수 있다.
- 신호는 **RG58** 동축 케이블과 같은 신호선으로 전달되며 이는 ***RC***회로로 볼 수 있다.

- 예를 들면 $R = r \cdot L$, r = **0.54 Ω/m**

  $C = c \cdot L$, c = **88 pF/m**



(b) Two circuits connected by a cable

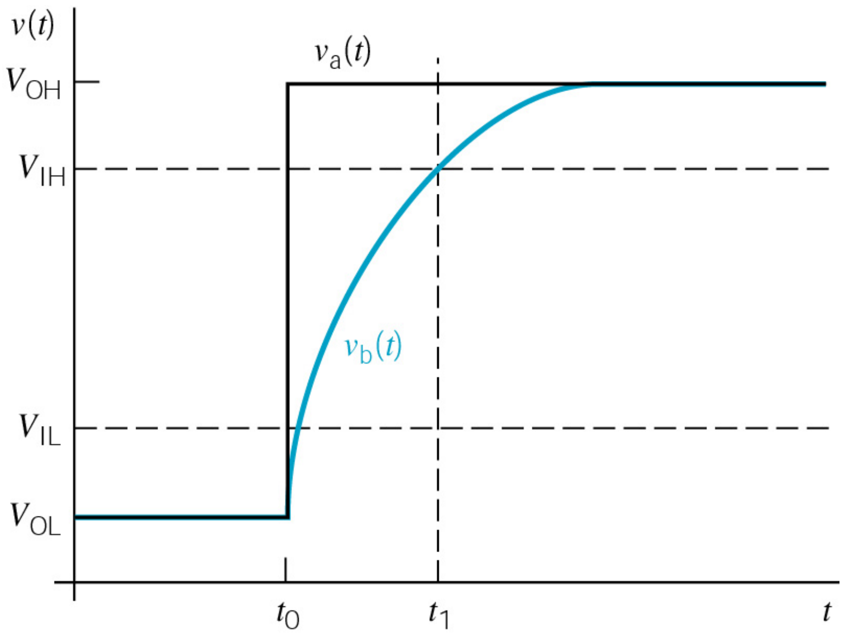


(c) An equivalent circuits

Delay between Computer and Printer (II)

- 이 회로를 디지털 회로라고 하면 v_a는 **TTL (transistor-transistor logic)**회로에서는 **2.4 V(V_{OH}, '1')**와 **0.4 V(V_{OL}, '0')**로 전압이 바뀐다.

- 이에 따라 v_b는 그림과 같이 지수 함수적으로 바뀌는데 v_b 는 **2.0 V(V_{IH})** 이상이면 **'1'**로, **0.8 V(V_{IL})** 이하이면 **'0'**으로 본다. v_b 가 **0.8 V**에서 **2.0 V**일 때에는 **'0'**일 수도, **'1'**일 수도 있다.



Voltage that occur during a transition from a logic 0 to a logic 1.

- 그림에서 v_b는 t_1 이후에 **'1'**이 되므로 v_a 가 스위칭한 시간 t_0 로부터 t_1 까지는 디지털 회로의 지연시간에 해당한다.

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

- 그러면, **RG58** 동축케이블을 사용해서 지연시간을 **2 ns** 이하로 하려면 케이블의 길이를 얼마로 해야 하는가?

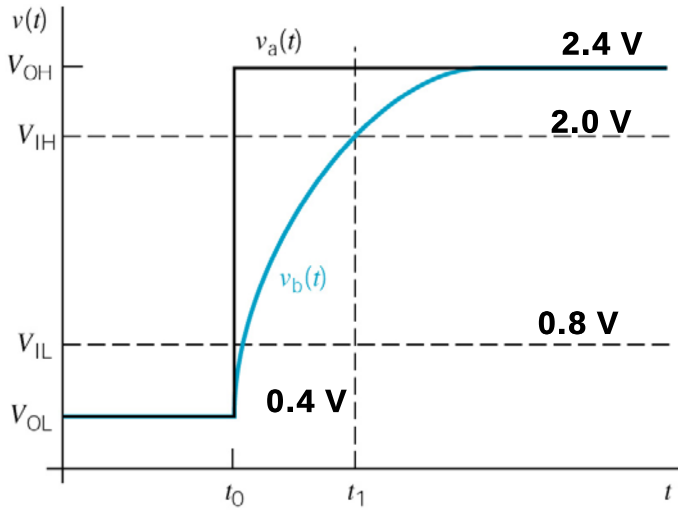
Delay between Computer and Printer (III)

- 시정수 $\tau = RC = 0.54 \cdot \ell \times 88 \times 10^{-12} \cdot \ell = 47.52\ell^2 \times 10^{-12}$

- 전압 $v_b(t) = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-(t-t_0)/\tau}$

- Δt 시간 이후의 전압은 V_{IH}

$$V_{IH} = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-\Delta t/\tau}$$



Voltage that occur during a transition from a logic 0 to a logic 1.

$$(V_{IH} - V_{OH})/(V_{OL} - V_{OH}) = e^{-\Delta t/\tau}$$

$$\ln[(V_{IH} - V_{OH})/(V_{OL} - V_{OH})] = -\Delta t/\tau$$

$$\tau = \frac{-\Delta t}{\ln[(V_{IH} - V_{OH})/(V_{OL} - V_{OH})]}$$

$$47.52\ell^2 \times 10^{-12} = \frac{-2 \times 10^{-9}}{\ln[(2.0 - 2.4)/(0.4 - 2.4)]}$$

$$\ell = 5.11\,\mathrm{m}$$