[2008][09-2]

Computer aided ship design

Part 3. Optimization Methods

November 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Ch3. 선형 계획법 (Linear Programming)

3.4 선형 계획 문제의 예와 Simplex 방법을 이용한 풀이

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 선형 계획법을 이용한 최적 화물 수송 문제

어느 선박은 항구 A에서 출발하여 항구 B, C, D를 거쳐 항구 E를 운항한다. 이 선박의 최대 화물 적재 능력은 50,000ton이며 각 항구에서는 다음과 같은 화물을 적재할 수 있다고 하면 화물 종류별로 얼마의 화물을 수송하면 최대의 운임을 얻을 수 있는지 계산하시오.

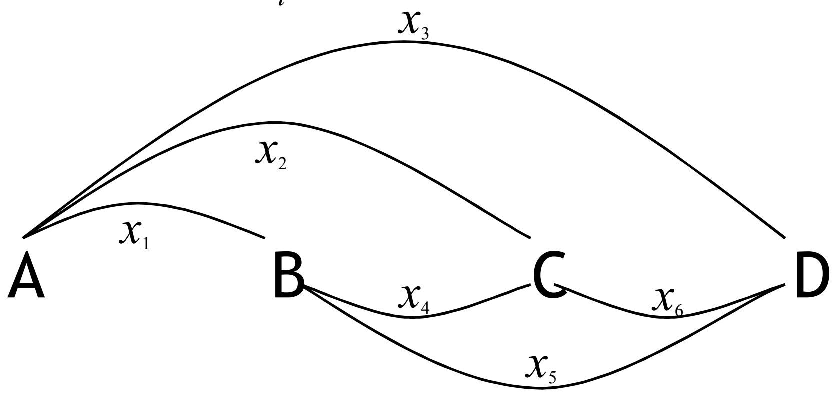
화물 종류	출발 항구	목적 항구	적재할 수 있는 화물량(1,000ton)	운임 요율($/ton)
1	A	B	100	5
2	A	C	40	10
3	A	D	25	20
4	B	C	50	8
5	B	D	100	12
6	C	D	50	6

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(1)

어느 선박은 항구 A에서 출발하여 항구 B, C를 거쳐 항구 D로 간다. 이 선박의 최대 화물 적재 능력은 50,000ton이며 각 항구에서는 다음과 같은 화물을 적재할 수 있다고 하면 화물 종류별로 얼마의 화물을 수송하면 최대의 운임을 얻을 수 있는지 계산하시오.

화물 종류	출발 항구	목적 항구	적재할 수 있는 화물량(1,000ton)	운임 요율 ($/ton)
1	A	B	100	5
2	A	C	40	10
3	A	D	25	20
4	B	C	50	8
5	B	D	100	12
6	C	D	50	6

화물 종류 i의 적재 톤수를 1,000ton 단위로 x_i로서 표현하면



설계 변수: $x_1, x_2 x_3, x_4, x_5, x_6$

목적 함수: 운임 최대화

$$Maximize\ Z = 5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 8x_4 + 12x_5 + 6x_6$$

➡ f = -Z라고 가정하면 최소화 문제로 변환시킬 수 있음

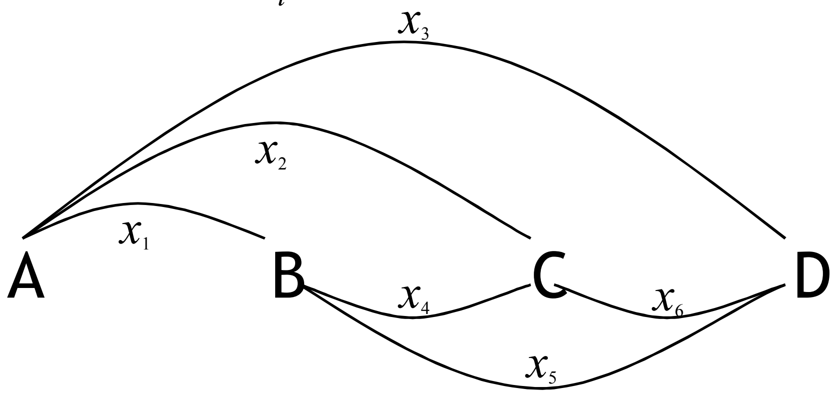
$$Minimize\ \ f = -5x_1 - 10x_2 - 20x_3 - 8x_4 - 12x_5 - 6x_6$$

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(2)

어느 선박은 항구 A에서 출발하여 항구 B, C를 거쳐 항구 D로 간다. 이 선박의 최대 화물 적재 능력은 50,000ton이며 각 항구에서는 다음과 같은 화물을 적재할 수 있다고 하면 화물 종류별로 얼마의 화물을 수송하면 최대의 운임을 얻을 수 있는지 계산하시오.

화물 종류	출발 항구	목적 항구	적재할 수 있는 화물량(1,000ton)	운임 요율 ($/ton)
1	A	B	100	5
2	A	C	40	10
3	A	D	25	20
4	B	C	50	8
5	B	D	100	12
6	C	D	50	6

화물 종류 i의 적재 톤수를 1,000ton 단위로 x_i로서 표현하면



제약 조건:

선박의 최대 화물 적재 능력:

$$A \Rightarrow B : x_1 + x_2 + x_3 \le 50 \quad B \Rightarrow C : x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 50$$

$$C \Rightarrow D : x_3 + x_5 + x_6 \le 50$$

화물 종류별 최대 적재 가능량:

$$0 \le x_2 \le 40,\ 0 \le x_3 \le 25,\ 0 \le x_4 \le 50,\ 0 \le x_6 \le 50$$

x_1, x_5의 최대 적재 가능량은 50,000톤보다 크므로 x_1, x_5에 대한 상한 제약 조건은 없어도 됨

x_4, x_6 역시 최대 적재 가능량은 50,000톤이므로 상한 제약 조건은 없어도 됨

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(3)

Find $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

Minimize $f = -5x_1 - 10x_2 - 20x_3 - 8x_4 - 12x_5 - 6x_6$

Subject to

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 50 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 50 \\ x_3 + x_5 + x_6 &\le 50 \end{aligned}\right\} \text{: 선박의 최대 화물 적재 능력에 관한 제약 조건}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x_2 \le 40,\ 0 \le x_3 \le 25, \\ 0 \le x_4 \le 50,\ 0 \le x_6 \le 50 \end{aligned}\right\} \text{: 화물 종류별 최대 적재 가능량에 관한 제약 조건}$$

➡ **미지수 6개, 부등호 제약 조건 7개인 최적화 문제**

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(4)

① 표준형으로의 변환 → ② Simplex 방법을 이용한 해결 →

제약 조건

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 50$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 50$$
$$x_3 + x_5 + x_6 \le 50$$
$$0 \le x_2 \le 40,\ 0 \le x_3 \le 25,$$
$$0 \le x_4 \le 50,\ 0 \le x_6 \le 50$$

목적 함수

$$f = -5x_1 - 10x_2 - 20x_3 - 8x_4 - 12x_5 - 6x_6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 50$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_8 = 50$$
$$x_3 + x_5 + x_6 + x_9 = 50$$
$$x_2 + x_{10} = 40,\ x_3 + x_{11} = 25,$$
$$x_4 + x_{12} = 50,\ x_6 + x_{13} = 50$$

Where, $x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} x_{13}$: 완화 변수[1]

$$f = -5x_1 - 10x_2 - 20x_3 - 8x_4 - 12x_5 - 6x_6$$

→ ③

Simplex 방법 수행

초기 기저 가능해로부터 해의 개선을 통해 최적해를 구함

1: 완화 변수(slack variable) - "≤" 형태의 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위해 도입한 변수

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(5)

비율 = (각 행의 우변의 값) / (각 행의 선택된 열에서의 해당 변수의 계수)

1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	bi	bi/ai
x7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	50	50
x8	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	50	50
x9	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	50	50
x10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	40	-
x11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	**25**
x12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50	-
x13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	50	-
Obj.	-5	-10	**-20**	-8	-12	-6	0	0	0	0	0	0	0	f+0	-

(2) 선택된 열의 계수가 양수이며 최소의 비율을 갖는 행을 선택

(1) 목적 함수 계수가 최소인 열을 선택

(3) 선택된 행과 열의 변수를 중심으로 Pivot을 실시

2

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	bi	bi/ai
x7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	25	-
x8	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	25	**25**
x9	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	-1	0	0	25	25
x10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	40	-
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	-
x12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50	-
x13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	50	-
Obj.	-5	-10	0	-8	**-12**	-6	0	0	0	0	20	0	0	f+500	-

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(6)

3

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	bi	bi/ai
x7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	25	-
x5	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	25	-
x9	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
x10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	40	-
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	-
x12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50	-
x13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	50	50
Obj.	-5	2	0	4	0	-6	0	12	0	0	8	0	0	f+800	-

4

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	bi	bi/ai
x7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	25	25
x5	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	25	-
x6	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	-
x10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	40	-
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	-
x12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50	-
x13	0	1	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	50	-
Obj.	-5	-4	0	-2	0	0	0	6	6	0	8	0	0	800	-

3.4 선형 계획 문제의 예 1
- 풀이 과정(7)

5

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	bi	bi/ai
x1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	25	
x5	0	1	0	**1**	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	25	**25**
x6	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	
x10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	40	
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	
x12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50	50
x13	0	1	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	50	50
Obj.	0	1	0	**-2**	0	0	5	6	6	0	3	0	0	f+925	

선택된 열의 계수가
음수(-1)여서 선택 안됨

6

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	bi	bi/ai
x1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	25	
x4	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	25	
x6	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	-1	0	0	25	
x10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	40	
x3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	25	
x12	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	1	0	25	
x13	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	1	25	
Obj.	0	3	0	0	2	0	5	8	6	0	1	0	0	f+975	

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로
현재의 해가 최적해임($x_2=x_5=0, x_1=x_3=x_4=x_6=25, f=-975$)

따라서 화물 1, 3, 4, 6을 25,000ton씩 적재하였을 때 최대의 운임 975,000$를 얻을 수 있음

3.4 선형 계획 문제의 예 2

- 다음과 같이 등호 제약 조건만으로 이루어진 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하는 문제(선형 계획 문제)를 Simplex 방법을 이용하여 푸시오.

$$2x_1 + y - z - \zeta_1 = 3$$
$$2x_2 + y - z - \zeta_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$where, x_1, x_2 y, z, \zeta_1, \zeta_2 \geq 0$$

초기 기저 가능해: $x_1 = x_2 = 1, y = 1, z = 0, \zeta_1 = \zeta_2 = 0$

3.4 선형 계획 문제의 예 2 - 풀이 과정(1)

1. 주어진 문제는 등호 제약 조건만으로 이루어진 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하는 문제(선형 계획 문제)임
2. 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하기 위하여 Simplex 방법에서 인위 변수 및 인위 목적 함수를 도입하여 초기 기저 가능해를 구하는 방법임

$$\mathbf{B}_{(3\times6)}\mathbf{X}_{(6\times1)} + \underbrace{\mathbf{Y}_{(3\times1)}}_{\text{인위 변수}} = \mathbf{D}_{(3\times1)}$$

3. 인위 목적 함수는 다음과 같이 정의함

$$w = \sum_{i=1}^{3} Y_i = \sum_{i=1}^{3} D_i - \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{3} B_{ij}X_j = w_0 + \sum_{j=1}^{6} C_j X_j$$

여기서, $C_j = -\sum_{i=1}^{3} B_{ij}$: 행렬 B의 j번째 열의 요소를 모두 더해 부호를 바꾼 것(상대 비용 계수)

$$w_0 = \sum_{i=1}^{3} D_i = 3+3+2 = 8$$

: 인위 목적 함수의 초기값으로 행렬 D의 모든 요소를 더한 것

3.4 선형 계획 문제의 예 2 - 풀이 과정(2)

$$2x_1 + y - z - \zeta_1 = 3$$
$$2x_2 + y - z - \zeta_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$where, x_1, x_2 y, z, \zeta_1, \zeta_2 \geq 0$$

$$\mathbf{B}_{(3\times6)}\mathbf{X}_{(6\times1)} + \underbrace{\mathbf{Y}_{(3\times1)}}_{\text{인위 변수}} = \mathbf{D}_{(3\times1)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(=X_1) \\ x_2(=X_2) \\ y(=X_3) \\ z(=X_4) \\ \zeta_1(=X_5) \\ \zeta_2(=X_6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
Y1	**2**	0	1	-1	-1	0	1	0	0	3	**3/2**
Y2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0	3	-
Y3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	2	2
A. Obj.	**-3**	-3	-2	2	1	1	0	0	0	w-8	-

인위 목적 함수 식 각 열의 요소를 모두 더해 부호를 바꾼 것(예, 1열: -(2+0+1)=-3)

3.4 선형 계획 문제의 예 2
- 풀이 과정(3)

2

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
X1	1	0	1/2	-1/2	-1/2	0	1/2	0	0	3/2	-
Y2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0	3	3/2
Y3	0	1	-1/2	1/2	1/2	0	-1/2	0	1	1/2	**1/2**
A. Obj.	0	**-3**	-1/2	1/2	-1/2	1	3/2	0	0	w-7/2	-

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
X1	1	0	1/2	-1/2	-1/2	0	1/2	0	0	3/2	3
Y2	0	0	**2**	-2	-1	-1	1	1	-2	2	**1**
X2	0	1	-1/2	1/2	1/2	0	-1/2	0	1	1/2	-
A. Obj.	0	0	**-2**	2	1	1	0	0	3	w-2	-

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
X1	1	0	0	0	-1/4	1/4	1/4	-1/4	1/2	1	
X3	0	0	1	-1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1	1	
X2	0	1	0	0	1/4	-1/4	-1/4	1/4	1/2	1	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T{}_{(1\times 5)} = [x_1 \quad x_2 \quad y \quad z \quad \zeta_1 \quad \zeta_2]$$

이로부터 $X_1{=}1, X_2{=}1, X_3{=}1, X_4{=}X_5{=}X_6{=}0$

따라서 주어진 문제의 초기 기저 가능해 중의 하나는 $x_1 = x_2 = 1, v = y - z = 1, \zeta_1 = \zeta_2 = 0$ **임**

Term Project #7
Simplex Programming Guide
(Linear Programming)

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Simplex Programming 과제

- 다음의 선형 계획 문제 예시 1~3에 대해 Simplex 방법으로 최적해를 구하는 프로그램을 작성한다.
  - 선형 계획 문제 예시 #1: page 3 참고
  - 선형 계획 문제 예시 #2: page 4 참고
  - 선형 계획 문제 예시 #3: page 5 참고

- 주요 사항
  - 인위 목적 함수와 목적 함수를 최소화 하는 과정을 나누어 작성한다. (Phase를 2개로 분리할 것)
  - Simplex Table을 이용한 풀이 과정을 Console 혹은 File로 출력한다.
  - 부정 방정식의 해를 구할 때 Pivot이 여러 개 존재하는 경우 Roll-Back 과정을 거쳐 최소 2개 이상의 해를 구한다.

선형 계획 문제 예시 #1

$$\text{Maximize} \quad z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{Subject to} \quad -x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

최적해: $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=x_4=0$, $f=-29$

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	x3	-1	1	1	0	4	4
2행:	x4	1	1	0	1	6	6
3행:	Obj.	-4	**-5**	0	0	f-0	-

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	X2	-1	1	1	0	4	-4
2행:	x4	**2**	0	-1	1	2	**1**
3행:	Obj.	**-9**	0	5	0	f+20	-

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	x2	0	1	0.5	0.5	**5**	-
2행:	x1	1	0	-0.5	0.5	**1**	-
3행:	Obj.	**0**	**0**	**0.5**	**4.5**	**f+29**	-

선형 계획 문제 예시 #2

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

1) Phase 1: 인위 목적 함수를 기준으로 Pivot을 수행함(w = 0이 될 때까지 수행)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	-
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	-
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	6
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	2
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	-
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

2) Phase 2: 목적 함수 f를 기준으로 Pivot을 수행함(목적 함수의 모든 계수가 음이 아닐 때까지 수행)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	12
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-6
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x5	5/2	0	0	3/2	1	-1	12	-
x2	3/2	1	-1	1/2	0	0	6	-
Obj.	2	0	0	1	0	0	f+12	-

선형 계획 문제 예시 #3

부정 선형 연립 방정식의 해를 구하는 문제

$$2x_1 + y - z - \zeta_1 = 3$$
$$2x_2 + y - z - \zeta_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$where, x_1, x_2 y, z, \zeta_1, \zeta_2 \geq 0$$

$$x_1 = x_2 = 1, v = y - z = 1, \zeta_1 = \zeta_2 = 0$$

1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
Y1	2	0	1	-1	-1	0	1	0	0	3	3/2
Y2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0	3	-
Y3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	2	2
A. Obj.	-3	-3	-2	2	1	1	0	0	0	w-8	-

2

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
X1	1	0	1/2	-1/2	-1/2	0	1/2	0	0	3/2	-
Y2	0	2	1	-1	0	-1	0	1	0	3	3/2
Y3	0	1	-1/2	1/2	1/2	0	-1/2	0	1	1/2	1/2
A. Obj.	0	-3	-1/2	1/2	-1/2	1	3/2	0	0	w-7/2	-

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
X1	1	0	1/2	-1/2	-1/2	0	1/2	0	0	3/2	3
Y2	0	0	2	-2	-1	-1	1	1	-2	2	1
X2	0	1	-1/2	1/2	1/2	0	-1/2	0	1	1/2	-
A. Obj.	0	0	-2	2	1	1	0	0	3	w-2	-

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Y1	Y2	Y3	bi	bi/ai
X1	1	0	0	0	-1/4	1/4	1/4	-1/4	1/2	1	
X3	0	0	1	-1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1	1	
X2	0	1	0	0	1/4	-1/4	-1/4	1/4	1/2	1	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	1	1	1	w-0	-

선형 계획 문제 예시 #1에 Simplex 프로그램 출력 결과

$$\text{Maximize} \quad z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{Subject to} \quad -x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

최적해: $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=x_4=0$, $f=-29$

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	x3	-1	1	1	0	4	4
2행:	x4	1	1	0	1	6	6
3행:	Obj.	-4	-5	0	0	f-0	-

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	X2	-1	1	1	0	4	-4
2행:	x4	2	0	-1	1	2	1
3행:	Obj.	-9	0	5	0	f+20	-

		x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행:	x2	0	1	0.5	0.5	5	-
2행:	x1	1	0	-0.5	0.5	1	-
3행:	Obj.	0	0	0.5	4.5	f+29	-

```
 -1.0000  1.0000  1.0000  0.0000  |   4.0000
  1.0000  1.0000  0.0000  1.0000  |   6.0000
----------------------------------|---------
 -4.0000 -5.0000  0.0000  0.0000  |   0.0000

Row = 1
Col = 2


 -1.0000  1.0000  1.0000  0.0000  |   4.0000
  2.0000  0.0000 -1.0000  1.0000  |   2.0000
----------------------------------|---------
 -9.0000  0.0000  5.0000  0.0000  |  20.0000

Row = 2
Col = 1


  0.0000  1.0000  0.5000  0.5000  |   5.0000
  1.0000  0.0000 -0.5000  0.5000  |   1.0000
----------------------------------|---------
  0.0000  0.0000  0.5000  4.5000  |  29.0000
```

Simplex Class 설명

```
class Simplex
{
public:
		Simplex();
		Simplex(const Simplex& rhs);
		virtual ~Simplex();

		//member variables
		Matrix m_VariableTable;
		Matrix m_SimplexTable;
		Matrix m_biaiTable;
		int m_NumOfRow,m_NumOfColumn;
		int m_pivotRow,m_pivotColumn;
		int m_nPhase;
		static std::vector<Simplex*> m_SimplexChild;

		//member function
		void InitializeSimplexTable(Matrix VarT,Matrix SimT, Matrix biaiT);
		void FindPivotColumn();
		void FindPivotRow();
		void Pivot();
		bool CheckEndCondition();
		void Solve();
};
```

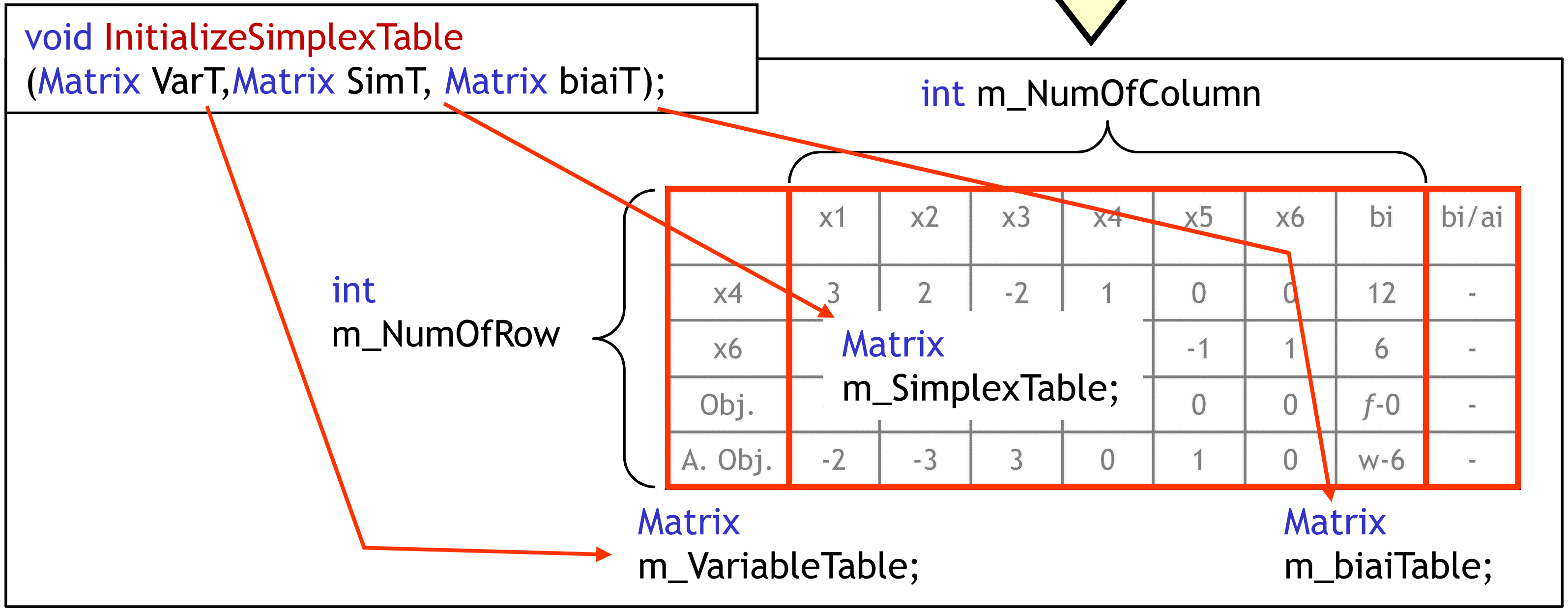
Simplex 방법 Programming Guide

1) 주어진 목적 함수식과 제약 조건식으로부터 Simplex Table 구성

기저 변수 / 비기저 변수 (0으로 두는 변수) / 기저 변수

$$
\begin{array}{lll}
\text{1행:} & x_4 & \underbrace{3x_1 + 2x_2 - 2x_3}_{\text{비기저 변수}} + x_4 \qquad\qquad = 12 \\
\text{2행:} & x_6 & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \qquad \underbrace{- x_5 + x_6}_{\text{기저 변수}} = 6 \\
\text{3행:} & & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad\quad = f \\
\text{4행:} & & -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \quad + x_5 \qquad = w - 6
\end{array}
$$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	-
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	-
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	*f*-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-



Simplex 방법 Programming Guide

1) 주어진 목적 함수식과 제약 조건식으로부터 Simplex Table 구성

- Simplex Table 구성 시 유의 사항

1. Simplex Table의 bi에 있는 항을 모두 양수로 고쳐야 함.
   따라서, Simplex Table을 만든 후 bi의 부호를 검사하여 음수가 있을 시, 해당하는 Row에 모두 (-)를 곱함

2. 목적 함수가 없을 경우 목적 함수에 해당하는 Row를 모두 0으로 입력

3. 등호 및 부등호 제약 조건에 따른 완화 변수, 잉여 변수, 인위 변수는 자동으로 생성하거나 입력

Simplex 방법 Programming Guide

2) Pivot 수행: Phase 1. 인위 목적 함수

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	-
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	-
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	*f*-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

1) 최소인 음의 값을 가지는 열 선택

```
void FindPivotColumn();
```

2) 최소의 bi/ai 값을 가지는 행 선택

```
void FindPivotRow();
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	6
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	2
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	*f*-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

※ Pivot 수행 시 주의 사항

- 행 선택 시 bi/ai 값이 0인 경우도 선택함
- Round off Error에 대비해야 함

  (ex) 실수 x = 0인지 판단하고 싶을 때,

  잘못된 예시: `if (x==0)`
  올바른 예시: `if (fabs(x) < 10e-6)`

- 열 선택 시 최소인 음의 값을 가지는 열이 여러 개인 경우, 현재 매트릭스를 저장하고 있어야 함. (Roll Back 기능)
- 행 선택 시 최소의 bi/ai 값을 가지는 행이 여러 개인 경우, 현재 매트릭스를 저장하고 있어야 함. (Roll Back 기능)
- 인위 목적 함수의 모든 계수가 0보다 크지만, 인위 목적 함수값이 0이 아닐 때, Roll Back으로 저장된 Simplex로 돌아감

Simplex 방법 Programming Guide

2) Pivot 수행: Phase 1(인위 목적 함수)

※ Roll Back 기능의 구현

1. pivotColumn 함수 내부에서 최소의 열을 판단
2. 최소값과 같은 값이 존재하는지 판단
3. m_SimplexChild라는 변수에 새로운 Simplex를 만들어 저장하도록 함

```
std::vector<Simplex*> m_SimplexChild;

……

for(int i=0;i<NumOfColumn;i++)
{
    if(fabs(minValue-열의값) < 10e-6)
    {
        //복사 생성자를 통해 같은 Simplex 생성
        Simplex* temp=new Simplex(*this);
        m_SimplexChild.push_back(temp);
    }
}
```

Simplex 방법 Programming Guide

3) Pivot 수행: Phase 1(인위 목적 함수) 종료 및 Phase 2(목적 함수) 수행

3)-① 종료할 것인지 판단 (Phase 1)

1. 인위목적함수 값이 0인지 판단

   if (x==0) (X)
   if (fabs(x) < 10e-6) (0)

2. 0이면 만족하므로 다음 단계로 진행 → Phase 2 시작

3. 0이 아니면, 다시 pivot을 수행함

3)-② Pivot을 수행 (Phase 2)

✓ 인위 목적 함수가 더 이상 필요하지 않으므로, 계산시 마지막 행은 고려하지 않음

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	-
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

✓ Phase 1과 마찬가지로 Pivot 수행

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	**2/3**	-2/3	8	**12**
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-6
Obj.	1/3	0	0	0	**-2/3**	2/3	f+4	-

@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

Simplex 방법 Programming Guide
4) Pivot 수행: Phase 2(목적 함수) 종료

Phase 2를 종료할 것인지 판단

목적 함수의 모든 계수가 음수가 아니면 (0 이상이면) 종료하고,
이때의 기저변수와 함수값을 출력한다.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x5	5/2	0	0	3/2	1	-1	12	-
x2	3/2	1	-1	1/2	0	0	6	-
Obj.	2	0	0	1	0	0	f+12	-

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로
현재의 해가 최적해임
$(x_1=x_3=x_4=0, x_2=6, x_5=12, f=-12)$

Simplex 방법 Programming Guide - 프로그램 작성 예시

※ Solve 함수 내부 구현

```
bool Simplex::Solve()
{
    while(1)
    {
        if (m_pivotColumn == -1)
            FindPivotColumn();
        if (m_pivotColumn == -1)
        {
            Simplex temp = m_SimplexChild[m_SimplexChild.size()-1]
            m_SimplexChild.pop_back();
            return temp.Solve();
        }
        if (m_pivotRow == -1)
            FindPivotRow();
        if (m_pivotRow == -1)
        {
            //상동
        }
        Pivot();
        if(CheckEndCondition())
            return true;
        if (m_NumOfInteration >= 100 && m_SimplexChild.size() > 0)
        {
            //상동
        }
    }
    return true;
}
```

최소값이 음수가 아님(모든 계수가 양수)

Roll back 기능을 통해 이전 단계에 저장했던 Simplex로 돌아감

bi/ai 비율이 최소인 양수가 없음

무한 루프를 막기 위한 조치

Simplex 방법 Programming Guide

- Roll Back 기능 구현을 위한 'vector' library의 사용 방법

※ vector의 사용

1. **정의 :**

```
#include <vector>
using namespace std;
...
std::vector<int> a;
std::vector<Simplex*> m_SimplexChild;
```

2. **함수 :**

push_back(...) : **변수를 저장함, 마지막에 저장하는 변수가 가장 마지막에 들어감**

pop_back() : **마지막에 저장된 변수를 빼냄**

size() : **배열의 크기**

3. **사용 예 :**

```
std::vector<int> a;
a.push_back(1);      //a[0]에 1 저장
a.push_back(2);      //a[1]에 2 저장
int b = a.size();    //b에 배열의 크기 2가 저장됨
a.pop_back();        //a[1]이 삭제
b = a.size();        //b에  배열의 크기1이 저장됨
```

참 고 자 료

공학수학 Review

- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

공학수학 Review

- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

row2 + row1x(−3)

$$\begin{array}{rr} & 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ +) & -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -3 \\ \hline & -7x_2 - 4x_3 = -1 \end{array}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

row2 + row1x(−3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1} \\ 0 \quad -7 \quad -4 \\ \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ \boxed{-3} \end{bmatrix}$$

row3 + row1x(−2)

row3 + row1x(−2)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ +)\; -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= -2 \\ \hline -x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \\ 0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$
$$0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 = -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

row 2 ↔ row 3

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 = -5$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

row 2x(−1)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - \;\; x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

row 3+ row 2x7

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 17x_3 &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

The last equations and matrix are equal to given equations.

Linear Independence

Definition 3.1 **Linear Dependence / Independence**

A set of functions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ is said to be **'linearly dependent'** on an interval I if there exist constant $c_1, c_2, \ldots c_n$, not all zero such that $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n f_n(x) = 0$ for every x in the interval.

If the set of functions is not linearly dependent on the interval, it is said to be **'linearly independent'**

In other words, a set of functions is 'linearly independent' if the only constants for

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

are $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

"two functions are linearly independent when neither is a constant multiple of the other"

$$\begin{cases} f_1(x) = \sin 2x \\ f_2(x) = \sin x \cos x \end{cases} \quad on(-\infty, \infty)$$

$$f_2(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\therefore f_2(x) = \frac{1}{2} f_1(x)$$

Linearly Dependent

$$\begin{cases} f_1(t) = e^t \\ f_2(t) = e^{2t} \end{cases} \quad on(-\infty, \infty)$$

$$c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0$$

Satisfied only when $c_1 = c_2 = 0$ on the interval

Linearly Independent

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$

$f_2 : 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$

$f_3 : 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 - 34 = 0$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 - +0 \cdot x_2 + 17x_3 = 34$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_3(f_3) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 - 5) + c_3(0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 - 34) = 0$$

$$\underline{(\boxed{c_1} + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3)}x_1 + \underline{(2\boxed{c_1} + \boxed{c_2} + 0 \cdot c_3)}x_2 + \underline{(\boxed{c_1} + 3\boxed{c_2} + 17c_3)}x_3 + (-c_1 - 5c_2 - 34c_3) = 0$$

$c_1 = 0$ $\qquad c_2 = 0$ $\qquad c_3 = 0$

$\therefore f_1, f_2, f_3$: **linearly independent.** $\longrightarrow$ **rank : 3**

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 17x_3 = 34$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent : 3

rank : 3

Unknown variables x_1, x_2, x_3 n=3

No. of equations which are linearly independent : 3 = **rank : 3** = **Unknown variables n=3** ⇨ **Unique Solution**

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

Linear Systems Vs Matrices

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

0.5*row 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

$$f_2 : 0\cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$f_3 : 0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) + c_3(f_3) = 0$$

$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 - 5) + c_3(0\cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 10) = 0$$

$$(\boxed{c_1} + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3)x_1 + (2\boxed{c_1} + c_2 + 2c_3)x_2 + (\boxed{c_1} + 3c_2 + 6c_3)x_3 + (-\boxed{c_1} - 5c_2 + 10c_3) = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -2c_3 \qquad c_3 = arbitrary\ number$$

$\therefore f_1, f_2, f_3$ **: linearly *dependent.***

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

0.5*row 3

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

rank : 2

$$f_1 : x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$
$$f_2 : 0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$
$$f_3 : 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 10 = 0$$

No. of equations which are linearly independent ?

$$c_1(f_1) + c_2(f_2) = 0$$
$$c_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + c_2(0 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 - 5) = 0$$
$$(\boxed{c_1} + 0 \cdot c_2)x_1 + (2\boxed{c_1} + c_2)x_2 + (\boxed{c_1} + 3c_2)x_3 + (-c_1 - 5c_2) = 0$$

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0$$

$\therefore f_1, f_2$ **: linearly *independent.***

Linear Systems Vs Matrices

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$0 \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No. of equations which are linearly independent : 2 = rank : 2 < Unknown variables n=3 ⇨ Infinite many solutions

Solution ?

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$ Trivial Solution

Linear Systems Vs Matrices

Solution ?

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$ Trivial Solution

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

x: Infinite many solutions

to have a solution x except x=0

$$rank(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) < n \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Zero row

λ: eigenvalues, x: eigenvectors

x: Infinite many solutions

Optimization Problem

Objective function → Solution determined

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank : 3

Trivial x

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(\lambda+3)^2 = \mathbf{0}$$

$$when\ \lambda = 5$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{A} - 5\mathbf{I}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Row reduction

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -24/7 & -48/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank : 2

infinite no. of x

공학수학 Review

- Inverse of a matrix.

Gauss-Jordan Elimination

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Notation of inverse matrix

In this inverse section, only *square matrices* are considered exclusively.

Notation of inverse of an n x n matrix A=[a_{jk}] : A^{-1}

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$ **, where I is the n x n unit matrix.**

Nonsingular matrix : A matrix that has an inverse.

(If a matrix has an inverse, the inverse is unique)

Singular matrix : A matrix that has no inverse.

Proof of uniqueness of inverse matrix

If B and C are inverses of A $(\mathbf{AB} = \mathbf{I} \ \& \ \mathbf{CA} = \mathbf{I})$,

We obtain $$\mathbf{B} = \mathbf{IB} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI} = \mathbf{C}$$

(the uniqueness of inverse)

Inverse by the Gauss-Jordan Method

For Practical determination of the inverse $\mathbf{A}^{-1}$ of a nonsingular $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$, Gauss elimination can be used.
: This method is called Gauss-Jordan elimination

Step 1. Make augmented matrix. $$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$$

Step 2. Make Multiplication of $\mathbf{AX=I}$ by $\mathbf{A}^{-1}$
(by applying Gauss elimination to $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}]$)

$\longrightarrow$ **This gives a matrix of the form $[\mathbf{U} \;\; \mathbf{H}]$**

Step 3. Reduce $\mathbf{U}$ by further elementary row operations to diagonal form.
(Eliminate the entries of $\mathbf{U}$ above the main diagonal and making the diagonal entries all 1 by multiplication. See the example next page.)

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination.

Determine the inverse $\mathbf{A}^{-1}$ of

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Step 1. Make augmented matrix.

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Step 2. Make Multiplication of $\mathbf{AX=I}$ by $\mathbf{A}^{-1}$ by applying Gauss elimination to

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Row2 + 3Row1

Row3 − 3Row1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Row3 − Row2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -0.6 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 2 & 0 & -2.6 & -0.4 & 1.4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Row1 +0.4Row3

Row2 +1.4Row3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0.7 & -0.2 & -0.3 \\ 0 & 2 & 0 & -2.6 & -0.4 & 1.4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Row1 -0.5Row2

diagonal matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

-Row1

0.5Row2

-0.2Row3

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

Check the result.

Let
$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{B}$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = (-1)\times(-0.7) + 1\times(-1.3) + 2\times 0.8 = 1$$

$$b_{12} = (-1)\times(0.2) + 1\times(-0.2) + 2\times 0.2 = 0$$

$$b_{13} = (-1)\times(0.3) + 1\times(0.7) + 2\times(-0.2) = 0$$

$$b_{21} = (3)\times(-0.7) + (-1)\times(-1.3) + 1\times(0.8) = 0$$

$$b_{22} = (3)\times(0.2) + (-1)\times(-0.2) + 1\times(0.2) = 1$$

$$b_{23} = (3)\times(0.3) + (-1)\times(0.7) + 1\times(-0.2) = 0$$

$$b_{31} = (-1)\times(-0.7) + (3)\times(-1.3) + 4\times(0.8) = 0$$

$$b_{32} = (-1)\times(0.2) + (3)\times(-0.2) + 4\times(0.2) = 0$$

$$b_{33} = (-1)\times(0.3) + (3)\times(0.7) + 4\times(-0.2) = 1$$

$$\therefore \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination.

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

Row2 + 3Row1

Row3 − Row1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 25 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row3 − Row2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row1 + 0.4Row3

Row2 + 1.4Row3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Row1 - 0.5Row2

diagonal matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

-Row1

0.5Row2

-0.2Row3

모든 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거 하였음
→ 바로 해를 구할 수 있음