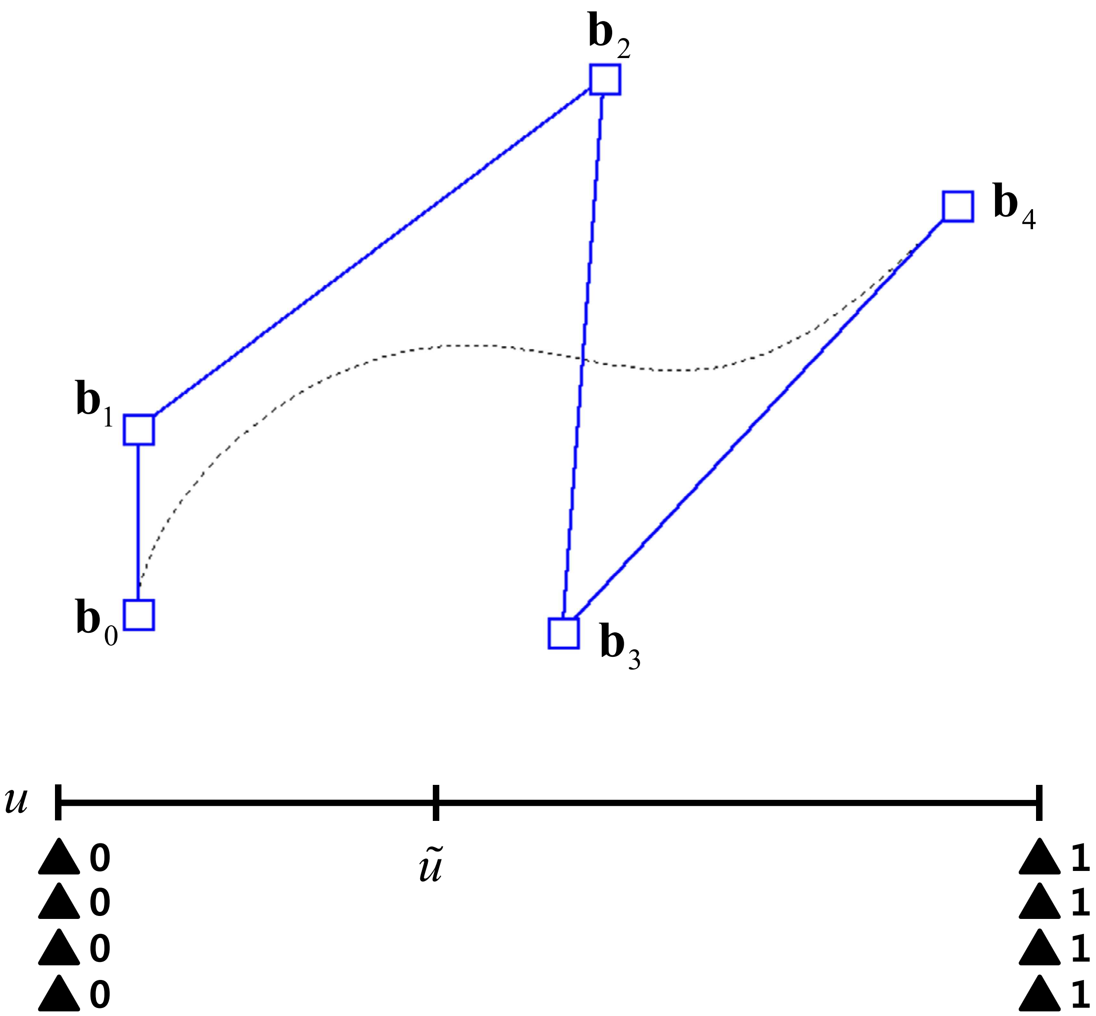
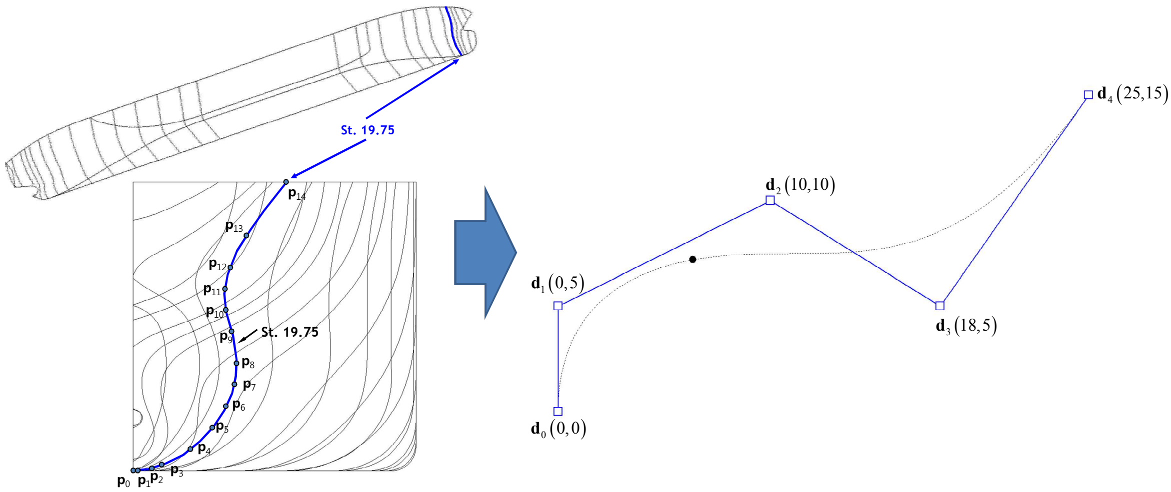
1. (de Casteljau Algorithm) 다음 그림은 어느 선박의 선수부 Section Line을 나타낸 것이다. 5개의 조정점(Control Point) $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ 이 주어졌을 때, 조정점을 잇는 각각의 선분을 $\hat{u}:(1-\hat{u})$로 4번 연속적으로 내분하는 점은 4차 곡선 상에 있게 된다.



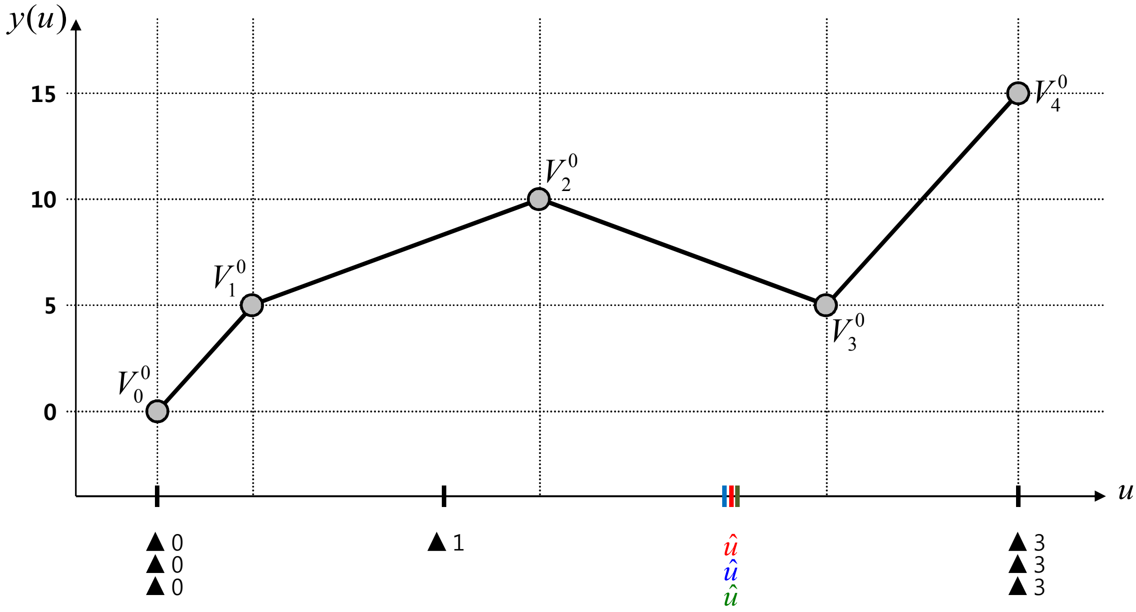
1) [5점] de Casteljau Algorithm을 이용하여 $\hat{u}$ 에서의 곡선 상의 점을 구하고 그 점이 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ 으로 정의되는 4차 Bezier 곡선 상의 점임을 보여라. (식 유도 과정을 적으시오.)

2) [5점] 위 4차 Bezier 곡선은 $\hat{u}$ 에서의 곡선 상의 점을 기준으로 2개의 4차 Bezier 곡선으로 나눌 수 있다. 이 때 생성되는 2개의 4차 Bezier 곡선의 조정점을 구하시오.

2. 다음 그림은 어느 선박의 선수부 Section Line을 나타낸 것이다.



5개의 조정점 $\mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$, $\mathbf{d}_4$ 이 위의 그림과 같이 주어졌을 때, 3차 B-Spline function y-control ordinate(V_0^0, V_1^0, V_2^0, V_3^0, V_4^0)를 표현하면 다음 그림과 같다. Knot는 그림과 같이 주어져 있다.



1) [10점] 그림의 3차 B-Spline function은 2개의 3차 Bezier function으로 구성되어 있다. Knot 간의 간격을 이용하여 2개의 3차 Bezier function의 y-control ordinate를 도시하시오.

2) [15점] (de Boor Algorithm) $1 < u < 3$ 인 곳에 Knot $\hat{u}$ 를 3번 삽입한 후 계산할 수 있는 3차 B-Spline function y-ordinate $y(\hat{u})$을 구하시오.

3) [15점] (Cox-de Boor Algorithm) $u = \hat{u}$ 에서의 3차 B-Spline function y-ordinate는 Cox-de Boor Algorithm을 이용하여 구할 수 있다. 이 결과가 위의 문제에서 구한 결과가 동일함을 보이시오.

- de Boor Algorithm: $V_i^k(u) = \dfrac{u_{i+n-k} - u}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} V_{i-1}^{k\text{-}1}(u) + \dfrac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} V_i^{k\text{-}1}(u)$
- Cox-de Boor Algorithm: $N_i^n(u) = \dfrac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \dfrac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u)$

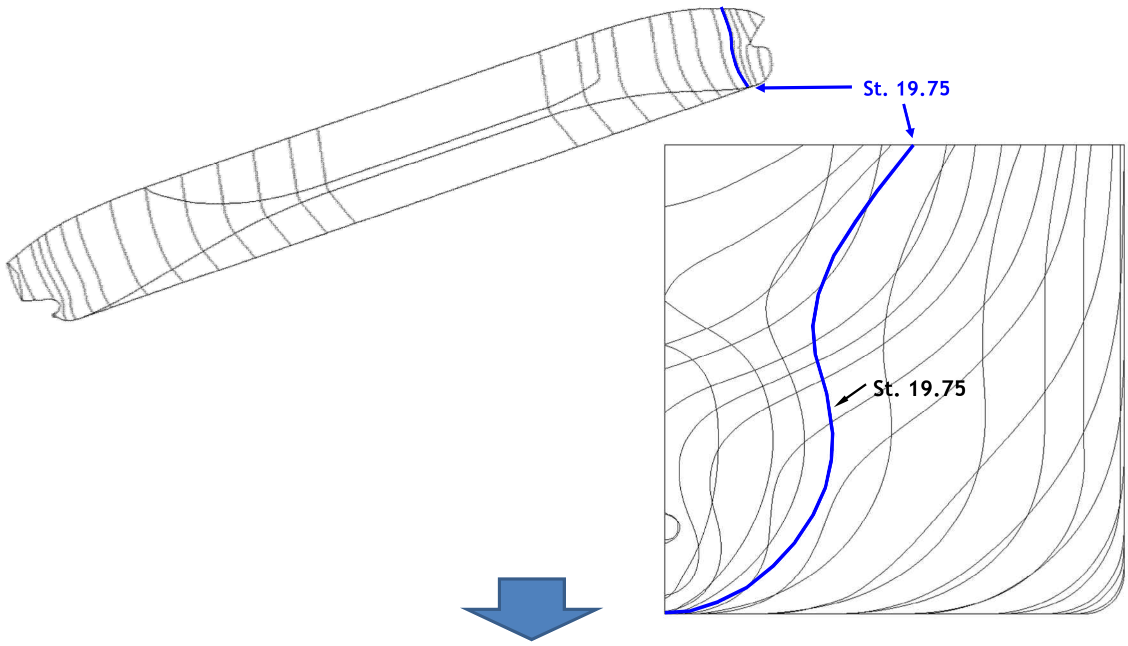
$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ u_{i-1} \le u < u_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

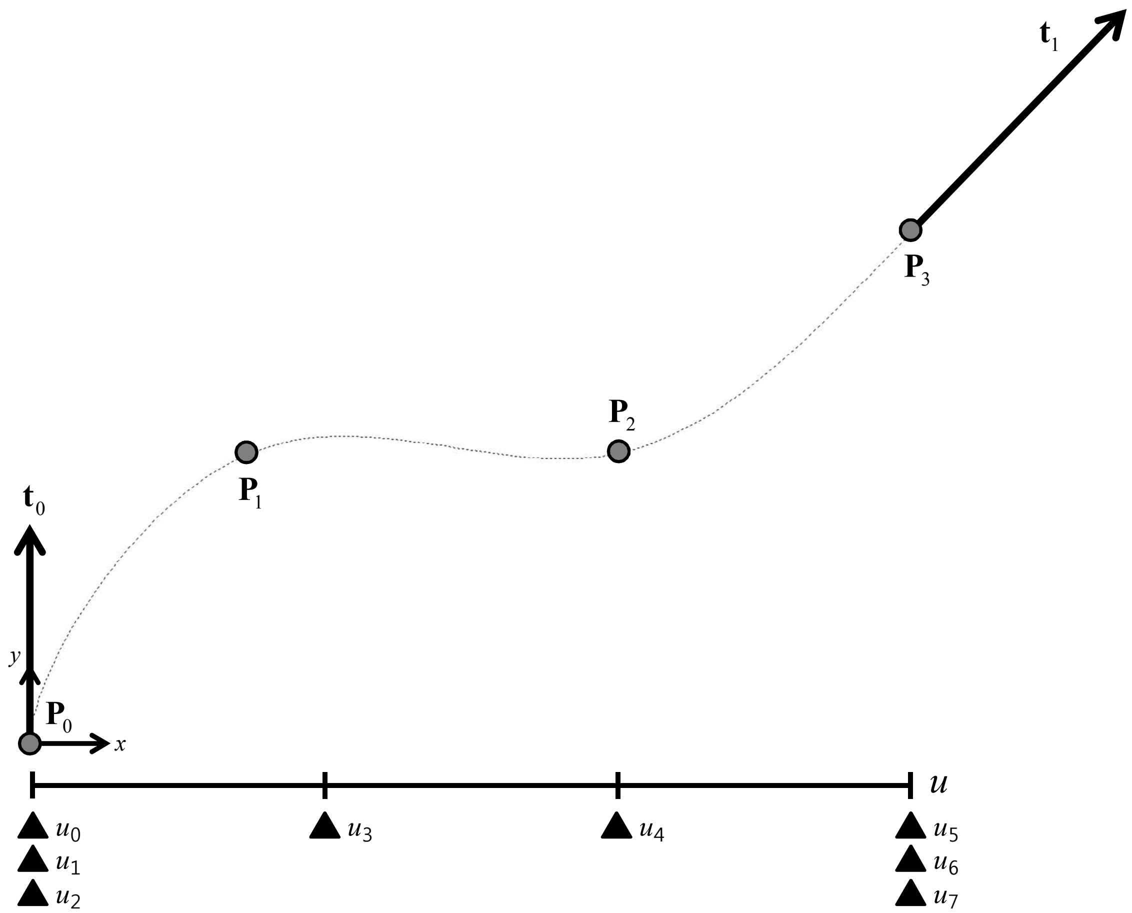
- B-Spline Function: $y(u) = \sum_{i=0}^{D-1} V_i^0 N_i^n(u)$

(D: 주어진 B-Spline control ordinate 의 개수, n: 곡선의 차수)

●

3. (Cubic B-Spline Curve Interpolation) 다음 그림은 어느 선박의 선수부 Section Line을 나타낸 것이다. 이것을 P_0, P_1, P_2, P_3 의 4개의 점을 지나는 부드러운 3차 곡선으로 표현하고자 한다. 단, 연결점인 P_1, P_2에서 C^1, C^2 조건을 만족해야 한다.





1) [10점] 그림을 이용하여 3차 B-Spline Curve의 Control Point를 도시하시오.

2) [20점] 점의 좌표와 양 끝에서의 접선 벡터가 다음과 같이 주어졌을 때, 3차 B-Spline Curve의 Control Point를 구하시오.

- 점의 좌표: $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0\left(0,0\right)$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\left(3,4\right)$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\left(8,4\right)$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3\left(12,7\right)$
- 접선 벡터: $\mathbf{t}_0 = \left(0,3\right)$, $\mathbf{t}_1 = \left(3,3\right)$

$$\alpha_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{(\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})}$$

$$\beta_i = \{\frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{(\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}\} / (\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})$$

$$\gamma_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})}$$

3) [20점] 위에서 구한 B-Spline Control Point를 이용하여 B-Spline 곡선식을 구하고, $u = 1.5$ 에서 곡선의 좌표를 구하시오.

<u>B-Spline 곡선식</u>

$$\mathbf{r}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{D-1} \mathbf{d}_i N_i^n(u)$$ (D: 주어진 점의 개수)

<u>Cox-de Boor Recurrence Formula</u>

$$N_i^n(u) = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u)$$

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{i-1} \le u < u_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$