

- 동적 시스템의 시간영역 해석
- 동적 시스템의 주파수 응답 해석
(MATLAB 실습 3)

Vehicle Dynamics and Control Laboratory

■ 선형 시간 불변 모델의 time response

함수	내용
step	계단입력에 대한 선형 시간 불변 모델의 응답을 구한다.
Impulse	충격량 입력에 대한 선형 시간 불변 모델의 응답을 구한다.
Initial	상태방정식으로 표현된 모델의 초기 조건에 의한 과도응답을 구한다.
lsim	임의의 입력에 대한 선형 시간 불변 모델의 응답을 구한다.

time response란 선형 시간 불변 모델에 시간 t 의 함수로 표현되는 입력이 가해질 경우에 응답을 시간 t 에 대해 구하는 것을 말한다. 보통 **time response**를 구하는 목적은 **delay time, rise time, peak time, max overshoot, settling time** 등과 같은 과도 상태에서 제어 시스템의 성능을 나타내는 값들을 계산하기 위함이다.

■ step 을 사용한 응답

step : 단위 계단 입력에 대한 응답을 얻고자 할 경우 사용된다.

Example.1 사용 예

<code>step(num,den)</code>	% num, den으로 정의된 transfer function에 대한 step response를 그린다.
<code>step(num,den,t)</code>	% num, den으로 정의된 transfer function에 대한 step response를 시간 t에 대해 그린다.
<code>step(A,B,C,D)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템에 대한 step response를 그린다.
<code>step(A,B,C,D,ui)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템의 input ui에 대한 step response를 그린다.
<code>step(A,B,C,D,ui,t)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템에 input ui에 대한 step response를 시간 t에 대해 그린다.

■ step 을 사용한 응답

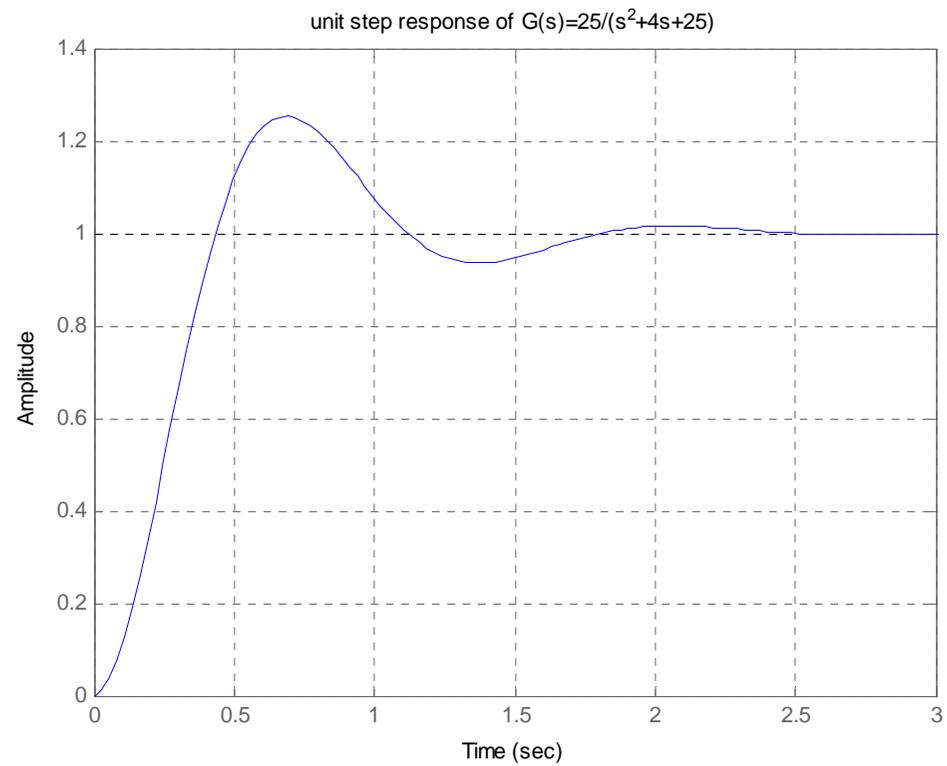
Example.2

1) m 파일 editor window (명령어 입력)

```
clear; clc;
% t=0:0.01:10;
num=[0 0 25];
den=[1 4 25];
step(num,den);      % 단위계단응답
% step(num,den,t);  시간 t에 대한 단위 계단 응답
grid on;
title('unit step response of G(s)=25/(s^2+4s+25)')
```

■ step 을 사용한 응답

2) 결과



■ step 을 사용한 응답

Example.3

1) m 파일 editor window (명령어 입력)

```
clear; clc;

A=[-1 -1; 6.5 0];
B=[1 1; 1 0];
C=[1 0; 0 1];
D=[0 0; 0 0];

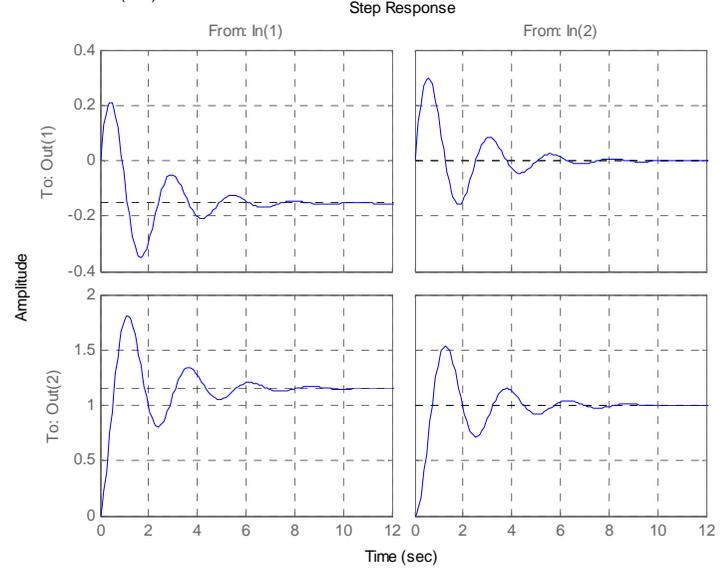
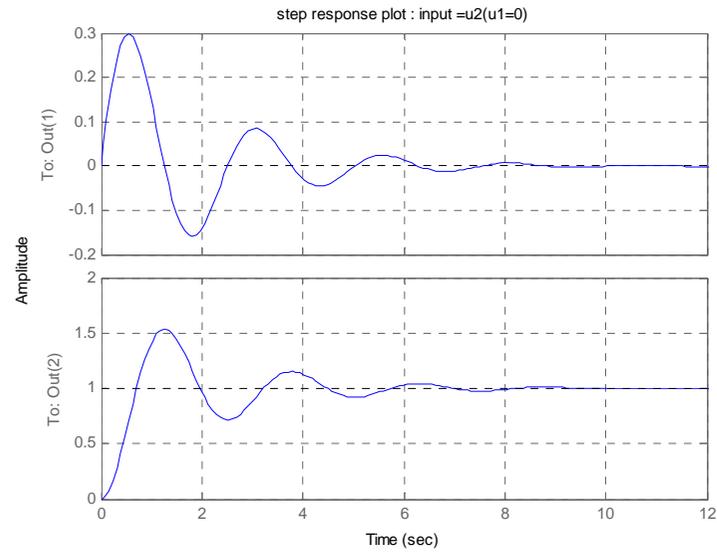
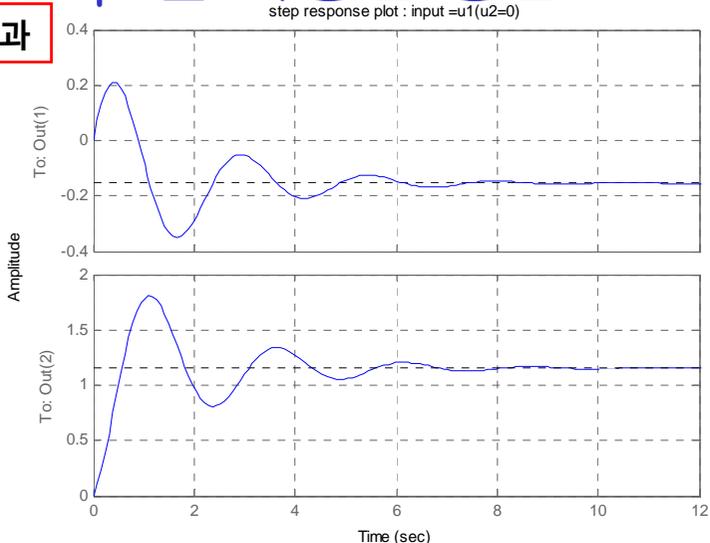
figure(1)
step(A,B,C,D,1)           % input u1에 대한step response
grid on;
title('step response plot : input =u1(u2=0)');

figure(2)
step(A,B,C,D,2)           % input u2에 대한 step response
grid on;
title('step response plot : input =u2(u1=0)');

figure(3)
step(A,B,C,D)             % input u1,u2에 대한 step response
grid on;
```

step 을 사용한 응답

2) 결과



■ impulse를 사용한 응답

impulse : 단위 충격량 입력에 대한 응답을 얻고자 할 경우 사용된다.

Example.4 사용 예(step 명령문의 경우와 동일하다)

impulse(num,den)	% num, den으로 정의된 transfer function에 대한 impulse response를 그린다.
impulse(num,den,t)	% num, den으로 정의된 transfer function에 대한 impulse response를 시간 t에 대해 그린다.
impulse(A,B,C,D)	% 상태공간으로 정의된 시스템에 대한 impulse response를 그린다.
impulse(A,B,C,D,iu)	% 상태공간으로 정의된 시스템의 input iu에 대한 impulse response를 그린다.
impulse(A,B,C,D,iu,t)	% 상태공간으로 정의된 시스템에 input iu에 대한 impulse response를 시간 t에 대해 그린다.

■ initial을 사용한 응답

initial : 상태방정식으로 표현된 모델의 초기 조건에 의한 과도응답을 얻고자 할 경우 사용된다.

step 이나 **impulse**는 외부 입력에 대한 응답을 구한다. 이 때 초기조건은 모두 0으로 되는데, 초기 조건에 대한 응답을 구하고 싶을 때는 **initial** 을 사용한다. 즉, **initial**은 외부 입력이 없다고 하고 단지 초기 조건에 대한 응답만을 구한다.

이때에는 모델이 상태방정식으로 표현된 모델이어야만 하는데 그 이유는 전달함수의 경우에는 이미 전달함수를 유도하기 위해 초기조건을 모두 0으로 한다는 가정을 사용했기 때문이다.

■ initial을 사용한 응답

Example.5 사용 예

<code>initial(A,B,C,D,x0)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템의 초기값 x0에 대한 response를 그린다.
<code>initial(A,B,C,D,x0, t)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템에 input iu에 대한 impulse response를 시간 t에 대해 그린다.

1) m 파일 editor window (명령어 입력)

```
clear; clc;

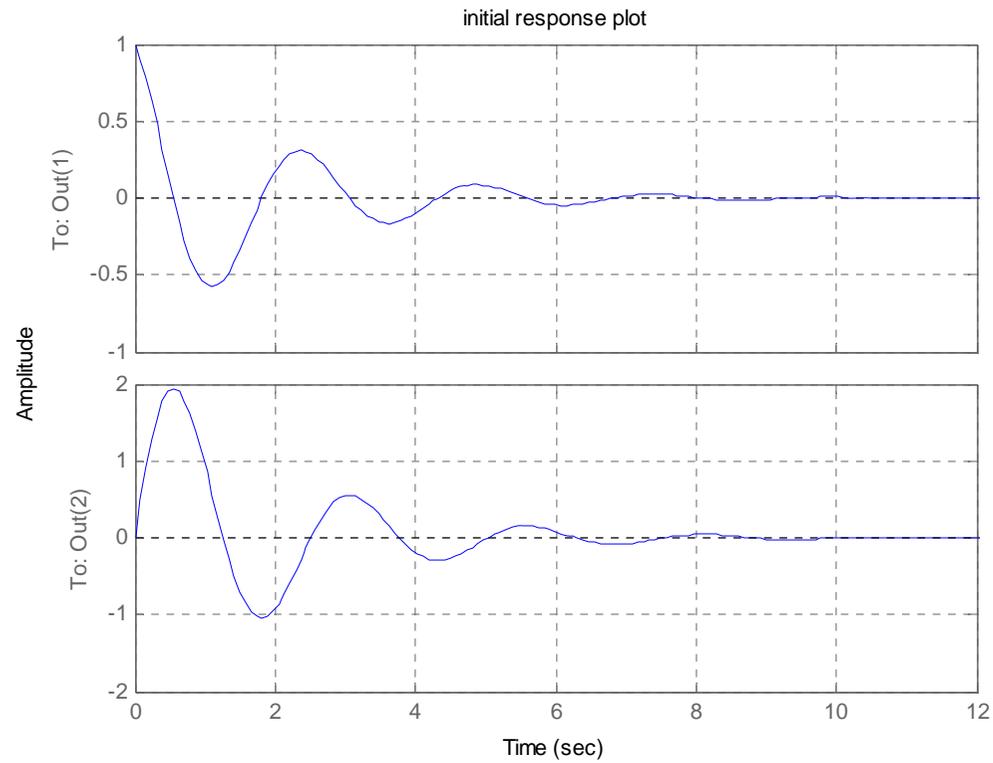
A=[-1 -1; 6.5 0];
B=[1 1; 1 0];
C=[1 0; 0 1];
D=[0 0; 0 0];

x0=[1;0];           % x1의 초기값 1, x2의 초기값 0

figure(1)
initial(A,B,C,D,x0);
grid on;
title('initial response plot');
```

■ initial을 사용한 응답

2) 결과



■ lsim을 사용한 응답

lsim : 임의의 입력에 대한 선형 시간 불변 모델의 응답을 구한다

step 이나 **impulse**는 미리 정해진 외부 입력에 대한 응답을 구한다.

하지만 **lsim**은 임의의 입력에 대한 응답을 구할 수 있다.

Example.6 사용 예

<code>lsim(num,den,u,t)</code>	% transfer function으로 정의된 시스템의 input u에 대한 response를 시간 t에 대해그린다.
<code>lsim(num,den,u,t,x0)</code>	% transfer function으로 정의된 시스템의 초기값 x0, input u에 대한 response를 시간 t에 대해그린다.
<code>lsim(A,B,C,D,u,t)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템의 input u에 대한 response를 시간 t에 대해그린다.
<code>lsim(A,B,C,D,u,t,x0)</code>	% 상태공간으로 정의된 시스템의 초기값 x0, input u에 대한 response를 시간 t에 대해그린다.

■ Isim을 사용한 응답

Example.7

1) m 파일 editor window (명령어 입력)

```
clear; clc;

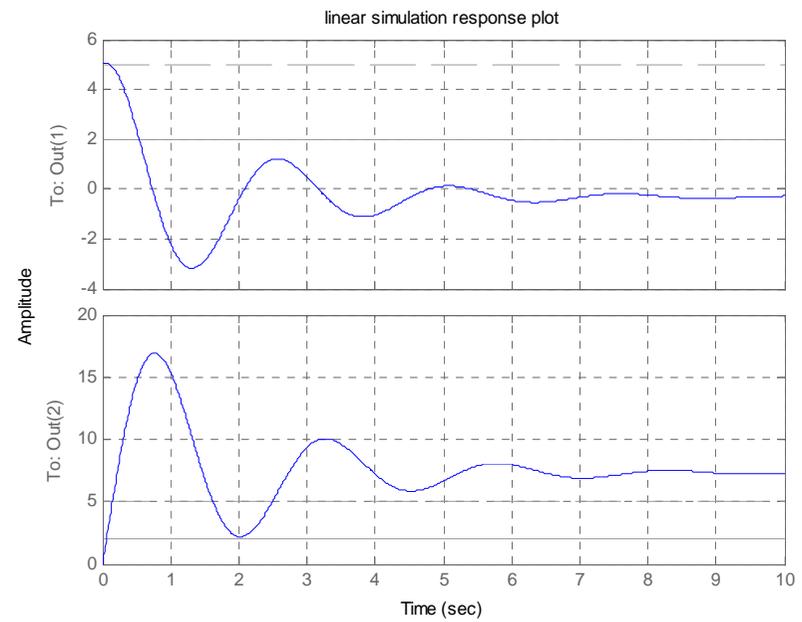
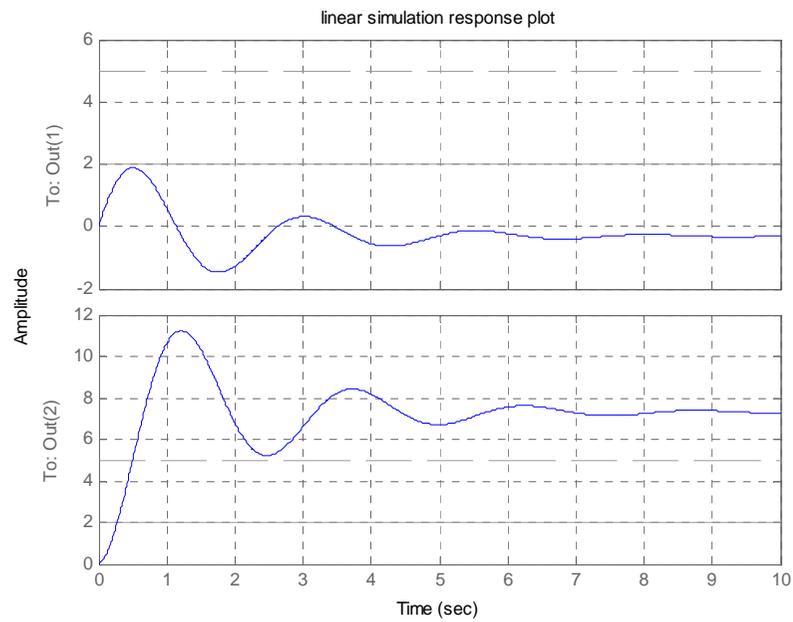
t=0:0.01:10;
A=[-1 -1; 6.5 0];
B=[1 1; 1 0];
C=[1 0; 0 1];
D=[0 0; 0 0];
u=[0*t+2; 0*t+5];           % input u1=2*1(t), u2=5*1(t)
x0=[5;0];                   % 초기값 x1=5, x2=0

figure(1)
lsim (A,B,C,D,u,t)         % 시간 t에 동안 상태 방정식으로 정의된 시스템의 input u에 대한 response
grid on;
title('linear simulation response plot');

figure(2)
lsim (A,B,C,D,u,t,x0)     % 시간 t에 동안 상태 방정식으로 정의된 시스템의 input u와 초기값 x0에 대한 response
grid on;
grid on;
title('linear simulation response plot');
```

■ Isim을 사용한 응답

2) 결과



■ B-8-9 (MATLAB Program)

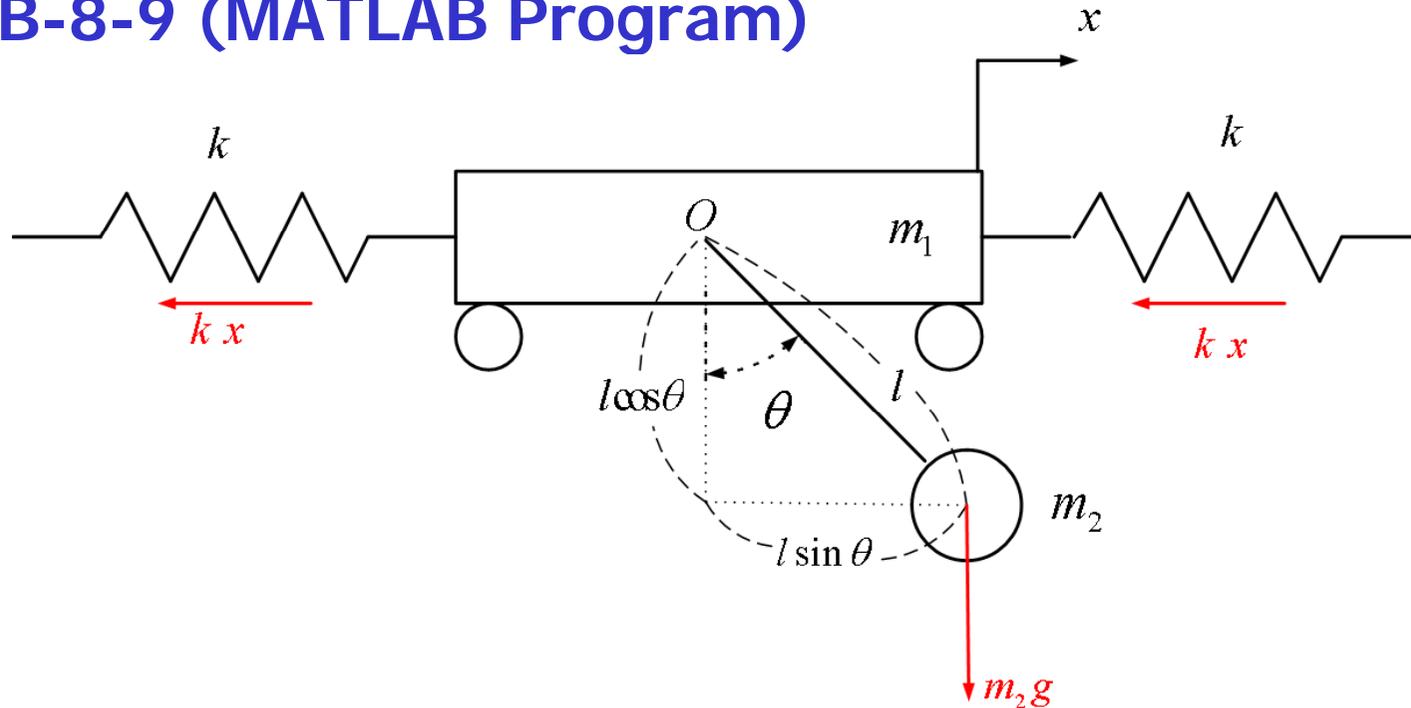
B-8-9. 그림의 기계시스템을 생각해 보자. $t < 0$ 에서는 정지해 있다. 진자 m_2 가 질량에 의해 지지되어 있는데 m_1 은 탄성 연결때문에 진동한다. 시스템의 운동방정식을 유도하라. 변위 x 는 $t < 0$ 에 대해 평형위치로 부터 측정된다. 각 변위는 진자의 중심을 통과하는 수직축으로부터 측정된다.

$$x(0) = 0.1m, \quad \dot{x}(0) = 0m/s$$

$$\theta(0) = 0rad, \quad \dot{\theta}(0) = 0rad/s$$

$$m_1 = 10kg, m_2 = 1kg, k = 250N/m, l = 1m$$

■ B-8-9 (MATLAB Program)



$$\sum F_x : m_1 \frac{d}{dt^2} x + m_2 \frac{d}{dt^2} (x + l \sin \theta) = -2kx$$

$$\sum M_o : m_2 \left(\frac{d}{dt^2} (x + l \sin \theta) \right) l \cos \theta + m_2 \left(\frac{d}{dt^2} (l \cos \theta) \right) l \sin \theta = -m_2 g l \sin \theta$$

■ B-8-9 (MATLAB Program)

$$\sum F_x : m_1 \frac{d^2}{dt^2} x + m_2 \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = -2kx$$

$$m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} - l \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + l \cos \theta \cdot \ddot{\theta}) = -2kx$$

$$m_1 \ddot{x} + m_2 (\ddot{x} + l \cdot \ddot{\theta}) = -2kx$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} = -2kx$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \\ \theta^2 \approx 0 \\ \dot{\theta}^2 \approx 0 \end{array} \right]$$

$$\sum M_o : m_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \right) l \cos \theta + m_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \right) l \sin \theta = -m_2 g l \sin \theta$$

$$m_2 (\ddot{x} - l \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + l \cdot \cos \theta \cdot \ddot{\theta}) l \cos \theta + m_2 (-l \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - l \sin \theta \cdot \ddot{\theta}) l \sin \theta = -m_2 g l \sin \theta$$

$$m_2 (\ddot{x} + l \ddot{\theta}) l + m_2 (-l \ddot{\theta}) l \sin \theta = -m_2 g l \sin \theta$$

$$m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\theta} = -m_2 g l \sin \theta$$

■ B-8-9 (MATLAB Program)

$$\left(\begin{array}{l} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} = -2kx \\ m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\theta} = -m_2 g l \theta \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} m_1 l \ddot{\theta} + (m_1 + m_2) g \theta = -2kx \\ m_1 \ddot{x} + 2kx = m_2 g \theta \end{array} \right)$$

$$\text{let } \left[\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{2k}{m_1} x_1 + \frac{m_2}{m_1} g \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = -\frac{2k}{m_1 l} x_1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 l} g \cdot x_3 \end{array} \right]$$

■ B-8-9 (MATLAB Program)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m_1} & 0 & \frac{m_2}{m_1}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m_1 l} & 0 & -\frac{m_1 + m_2}{m_1 l}g & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▪ MATLAB Commands (M file Editor Window)

```
clear;clc;

A=[0 1 0 0;
   -50 0 1 0;
   0 0 0 1;
   -50 0 -11 0];

B=[0;0;0;0];

C=[1 0 0 0;
   0 0 1 0];

D=[0;0];

t=0:0.01:10;

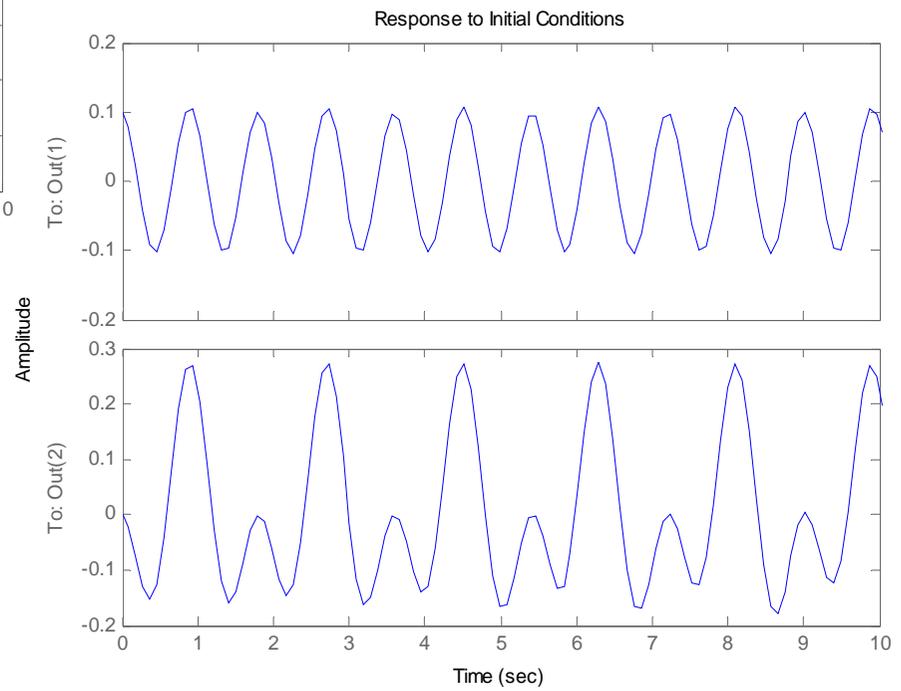
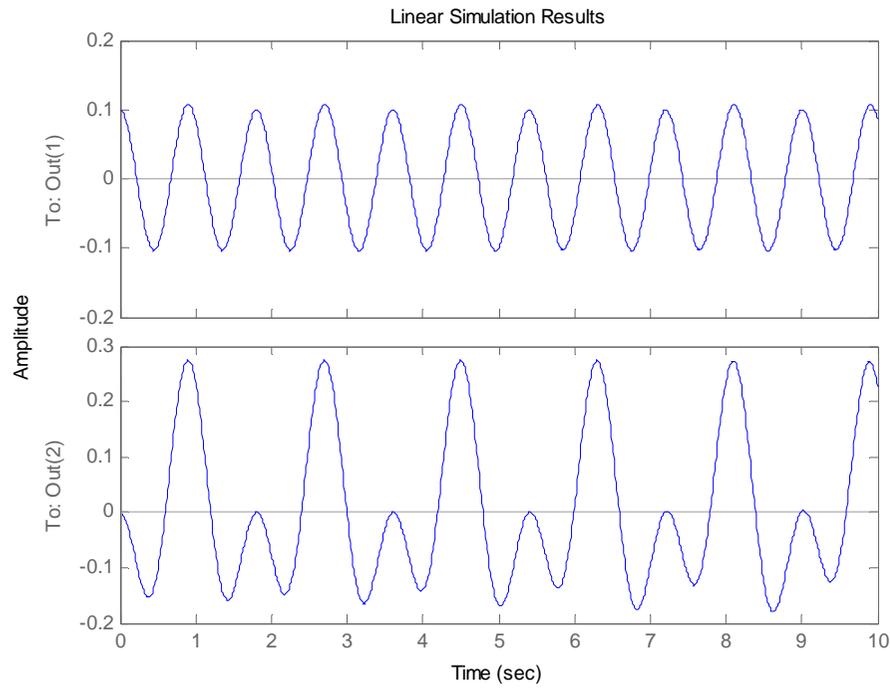
u=0*t;

x0=[0.1; 0; 0; 0];

lsim(A,B,C,D,u,t,x0);

% Initial(A,B,C,D,x0);
```

Simulation Results



■ B-8-20 (MATLAB Program)

B-8-20. 문제 B-8-19의 시스템에 대하여 MATLAB으로 시간 t 에 대한 응답 곡선 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 를 구하여라.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1(t) \\ 5 \cdot 1(t) \end{bmatrix}$$

▪ MATLAB Commands (M file Editor Window)

```
clear;clc;

A=[0 1; -6 -5];
B=[0 1;1 1];
C=[1 0; 0 1];
D=[0 0;0 0];

t=0:0.01:10;           % 시간 정의

u1=0*t+2;             % u1정의 (그냥 2로 하면 matrix가 아니므로 이런 수식으로 u1을 1X1001 행렬로 만든다.)
u2=0*t+5;
u=[u1;u2];

x0=[0;0];             % 초기값 정의

Figure

% lsim(A,B,C,D,u,t,x0);

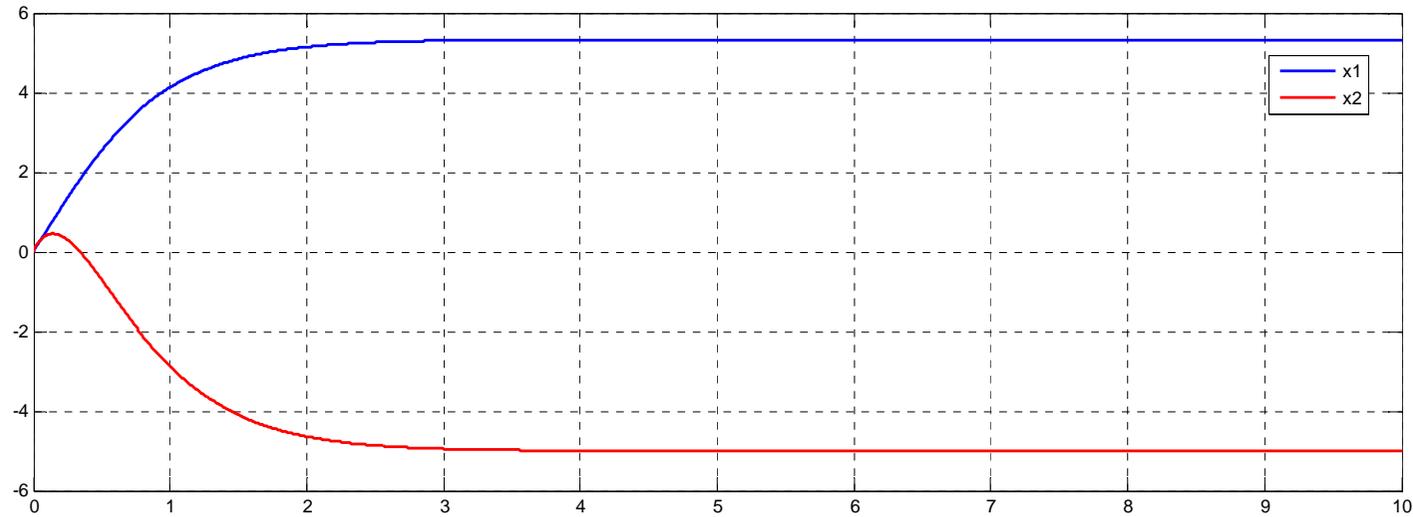
y=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);

plot(t,y(:,1),'linewidth',2);hold on;           %y의 1열의 값을 출력하고, figure창을 그대로 hold (유지)
plot(t,y(:,2),'r','linewidth',2);             % y의 2열의 값을 출력

grid on

legend('x1','x2');
```

▪ Simulation Results



$$x_1(t) = \frac{16}{3} - 11e^{-2t} + \frac{17}{3}e^{-3t}$$

$$x_2(t) = -5 + 22e^{-2t} - 17e^{-3t}$$

■ A-9-16 (MATLAB Program)

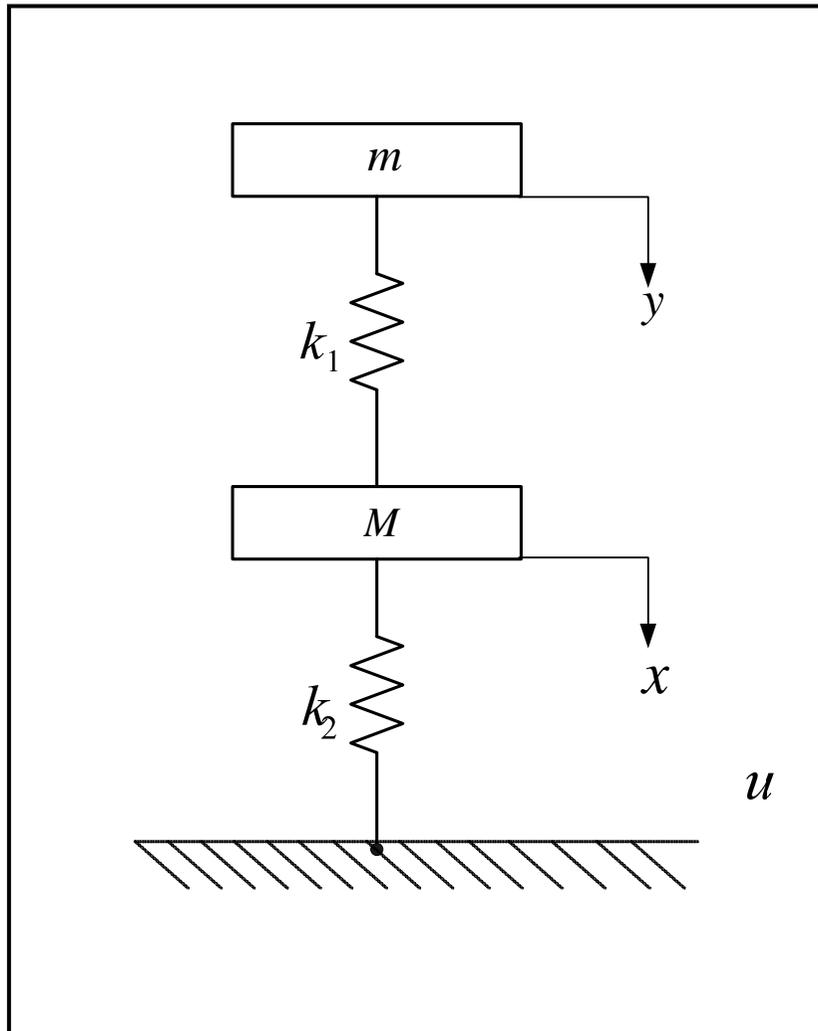
A-9-16. 초기조건이 다음과 같이 주어질 경우 진동을 구하라.

$$m = 1\text{kg}, M = 2\text{kg}, k_1 = 10\text{N/m}, k_2 = 40\text{N/m}$$

$$(a) \quad x(0) = 0.028078\text{m}, \quad \dot{x}(0) = 0\text{m/s}, \quad y(0) = 0.1\text{m}, \quad \dot{y}(0) = 0\text{m/s}$$

$$(b) \quad x(0) = 0.017808\text{m}, \quad \dot{x}(0) = 0\text{m/s}, \quad y(0) = -0.1\text{m}, \quad \dot{y}(0) = 0\text{m/s}$$

■ A-9-16 (MATLAB Program)



System equations

$$M\ddot{x} + k_1(x - y) + k_2x = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + k_1(y - x) = 0 \quad (2)$$

State Equation

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1 + k_2}{M}x_1 + \frac{k_1}{M}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_3 \end{cases}$$

■ A-9-16 (MATLAB Program)

State Equation

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in 4 \times 1$$

$$y = Cx + Du \quad u \in 1 \times 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{M} & 0 & \frac{k_1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & 0 & -\frac{k_1}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▪ MATLAB Commands (M file Editor Window)

```
clear; clc;

A=[0 1 0 0;
  -25 0 5 0;
   0 0 0 1;
   10 0 -10 0];

B=[0;0;0;0];

C=[1 0 0 0;
   0 0 1 0];

D=[0; 0];

x0=[0.028078; 0; 0.1; 0];           %초기값 정의

t=0:0.01:10;

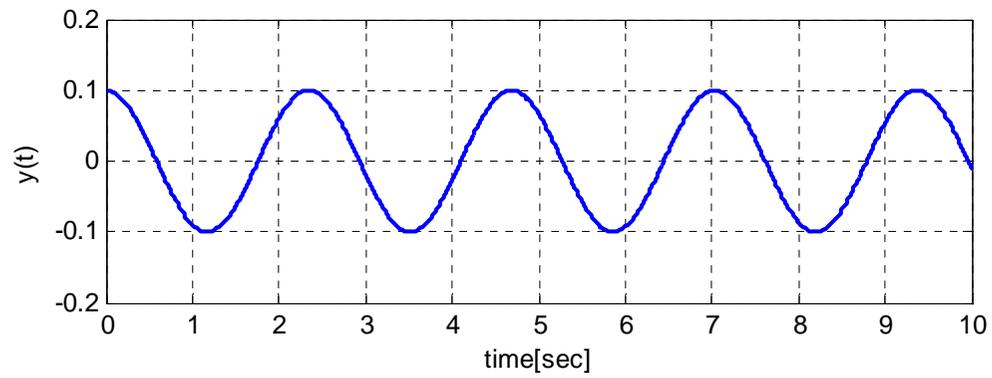
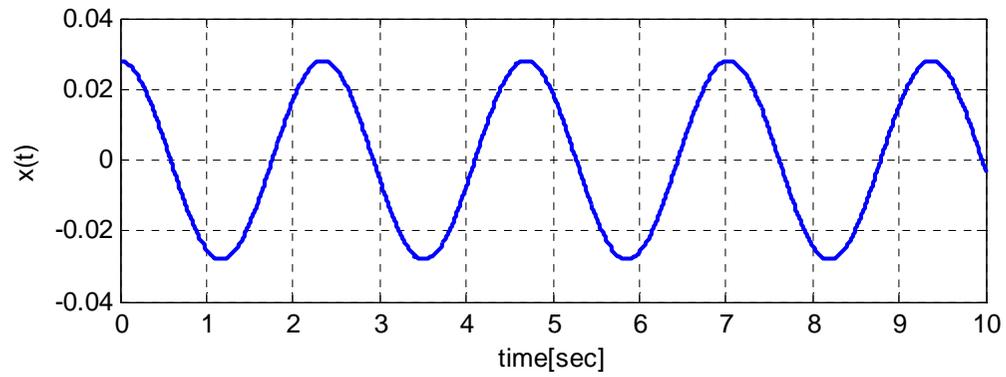
y=initial(A,B,C,D,x0,t);          % 초기값에 대한 응답을 시간 t동안 계산하여 y에 저장. 이때 y에는 2개 state 에 대한
                                  % 응답이 열 벡터 형태로 저장된다. 즉 nX2 행렬이 생성된다.

figure(1)

subplot(211)
plot(t,y(:,1),'linewidth',2)      % y의 1열의 값을 출력 (즉 x의 응답 출력)
xlabel('time[sec]'); ylabel('x(t)');grid on;

subplot(212)
plot(t,y(:,2),'linewidth',2)      % y의 2열의 값을 출력 (즉 y의 응답 출력)
xlabel('time[sec]'); ylabel('y(t)');grid on;
```

▪ Simulation Results



수고하셨습니다!!!