[Exercises 7] Samples

7.1 Using the circle criterion, study absolute stability for each of the scalar transfer functions. In each case, find a sector $[\alpha, \beta]$ for which the system is absolutely stable.

(1) $G(s) = \dfrac{s}{s^2 - s + 1}$

$G(s)$의 poles : $s^2 - s + 1 = 0 \rightarrow s = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⇒ $G(s)$가 unstable poles, 즉 Right Half Plane 에 pole 존재

⇒ $G(s)$는 Hurwitz 하지 않다. 그러므로 circle criterion의 첫번째 조건, $0 < \alpha < \beta$ 해당.

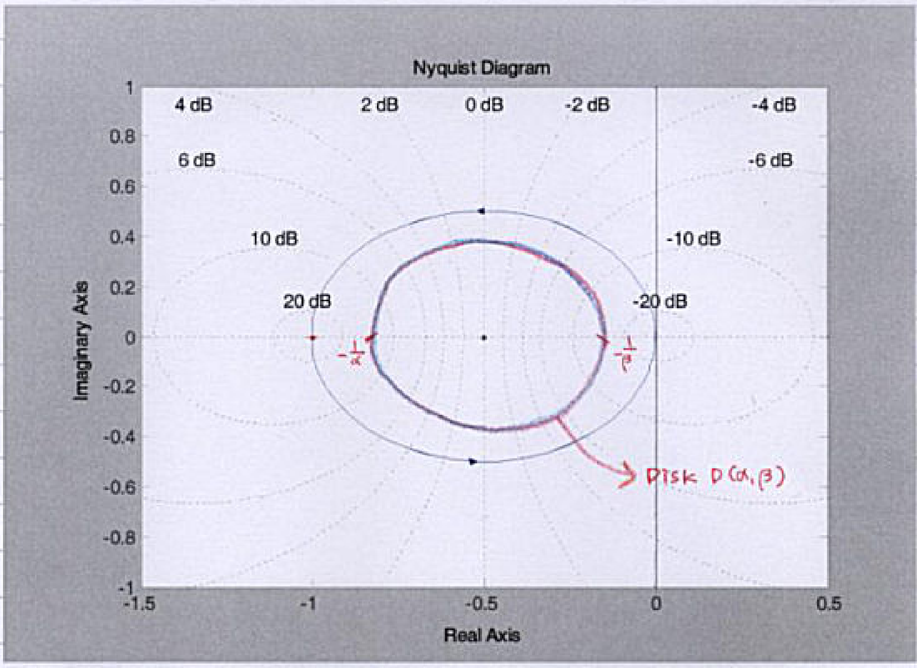
$$Z(s) = \frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)}$$

$G(s)$가 unstable pole 을 2개 갖기 때문에, Nyquist plot 은 disk $D(\alpha, \beta)$를 counterclock wise 방향으로 2번 감싸야 한다.

$G(j\omega)$ 의 Nyquist plot 은 아래 그림과 같다. (Matlab 의 'Nyquist' 이용한 결과이다.)

$\omega > 0$ 일때와 $\omega < 0$ 일때 모두 아래와 같은 Nyquist Plot 을 가지므로, ω가 $-\infty$에서 ∞로 변하는 동안, Nyquist Plot 은 아래와 같은 원을 2번 도는 것과 같다.

그러므로 disk $D(\alpha, \beta)$가 아래의 원 안에 존재하면, system 이 absolutely stable 이라고 할 수 있다.



$D(\alpha, \beta)$가 가장 클때는 Nyquist plot 의 원과 같을때이다. 그러므로,

$-\dfrac{1}{\alpha} = -1 + \varepsilon_1 \qquad -\dfrac{1}{\beta} = -\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1 > 0 \quad \varepsilon_2 > 0$: small values.

$\rightarrow \alpha = \dfrac{1}{1 - \varepsilon_1} \qquad \beta = \dfrac{1}{\varepsilon_2}$

∴ the system is absolutely stable for the sector $\left[\dfrac{1}{1-\varepsilon_1}, \dfrac{1}{\varepsilon_2}\right]$

7.7 Repeat Exercise 7.1 using Popov criterion.

7.1.(1) $G(s) = \frac{s}{s^2 - s + 1}$

For SISO case,

$Z(s) = \frac{1}{k} + (1 + s\gamma)G(s)$ 가 strict positive real 인지 test 한다.

By Lemma 6.1, $Z(s)$ 가 SPR 하려면 다음 조건을 만족해야한다.

① $G(s)$ 가 Hurwitz 해야한다.

② $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0 \quad \rightarrow \frac{1}{k} + Re[G(j\omega)] - \gamma\omega Im[G(j\omega)] > 0 \quad \forall\omega$

③ $\omega = \infty$ 일때 ② 식성립하거나, $\lim_{\omega\to\infty} \omega^2\left(\frac{1}{k} Re[G(j\omega)] - \gamma\omega Im[G(j\omega)]\right) > 0$

① condition ; $G(s)$ 의 poles ; $s^2 - s + 1 = 0$

문제 7.1 (1) 에서 구한것처럼 unstable pole 을 가지므로 Hurwitz 하지않는다.

그러므로 loop transformation 한다.

$\Rightarrow$ transformed transfer function $T(s) = \frac{G(s)}{1 + \alpha G(s)} = \frac{s}{s^2 + (\alpha - 1)s + 1}$ $[0, \beta - \alpha]$

$\alpha > 1$ 이면, $T(s)$ 는 Hurwitz 하다. $k = \beta - \alpha$

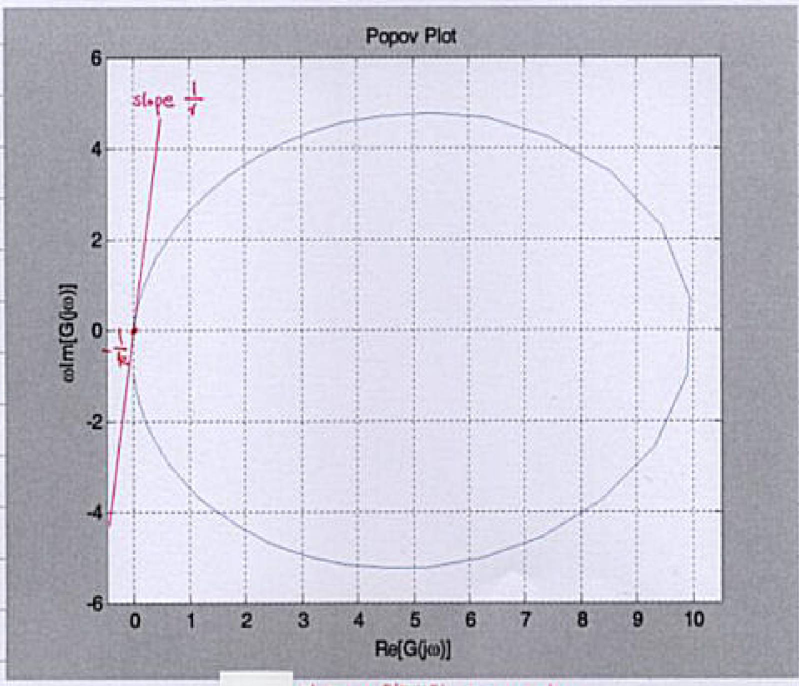
② condition 은 Popov plot 을 통해서 알 수 있다.

Matlab 에서 Popov plot 을 그려본 결과는 아래와 같다.

$\alpha = 1.1$ 일때의 popov plot 이다

$T(s) = \frac{s}{s^2 + 0.1s + 1}$

$T(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 0.1(j\omega) + 1} = \frac{j(\omega - \omega^3) + 0.1\omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + 0.01\omega^2}$

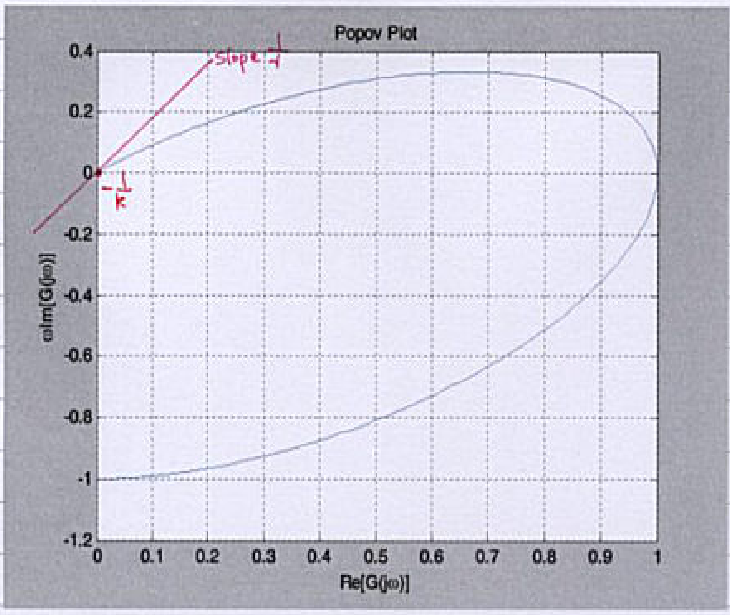


$\alpha = 1.1$ 일때의 popov plot.

$\alpha = 2$ 일때의 Popov plot은 아래와 같다.

$$T(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$T(j\omega) = \frac{j(\omega-\omega^3)+\omega^2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$$



$\alpha = 2$ 일때의 popov plot.

$\alpha = 1.1$ 일때, $\alpha = 2$ 일때 모두 $-\frac{1}{k} = 0$ 이므로 $k = \infty$

$\alpha = 1.1$ 일때, $\alpha = 2$ 일때 모두 slope $\frac{1}{\gamma}$ 아래 Popov plot 이 존재하도록

$\gamma \geq 0$ 이 존재한다.

그러므로 ②, ③ condition 만족한다.

∴ ①, ②, ③ condition 모두 만족하므로 $Z(s)$ 는 SPR.

⇒ the system is absolutely stable for the sector $[0, k]$,

where k is arbitrarily large.

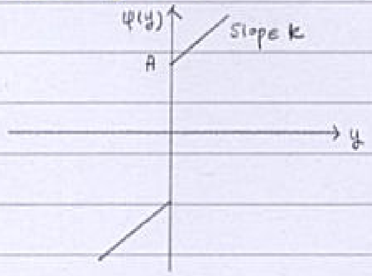
⇒ the origin system is absolutely stable for the sector $[1.1, \beta]$

where β can be arbitrarily large.

(sector $[2, \beta]$ 보다 $[1.1, \beta]$ 가 더 크므로)

7.10 For each odd nonlinearity $\varphi(y)$ on the following list, verify the given expression of the describing function $\Psi(a)$:

(7) $\varphi(y)$ = Figure 7.24(a) $\qquad \Psi(a) = k + \frac{4A}{\pi a}$



$$\varphi(y) = \begin{cases} A + ky & y > 0 \\ -A + ky & y < 0 \end{cases}$$
$$= ky + A\,\text{sign}(y)$$

$y = a \cdot \sin\theta$

describing function

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} \psi(a\sin\theta)\sin\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} \{k a\sin\theta + A\,\text{sign}(a\sin\theta)\}\sin\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} (k a \sin^2\theta + A\sin\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} \left\{ka\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + A\sin\theta\right\} d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi a}\left[ka\frac{\theta}{2} - ka\frac{\sin 2\theta}{4} - A\cos\theta\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi a}\left(ka\frac{\pi}{2} + A + A\right) = \frac{\cancel{2}}{\pi \cancel{a}} \cdot \frac{k\cancel{a}\pi}{\cancel{2}} + \frac{2}{\pi a}\cdot 2A$$
$$= k + \frac{4A}{\pi a}$$

$$\therefore\ \Psi(a) = k + \frac{4A}{\pi a}$$

* For $0 \le \theta \le \pi$, $\sin\theta \geq 0$. Therefore, $\text{sign}(a \cdot \sin\theta) = a \cdot \sin\theta$ $(\because a \geq 0)$

* $\text{sign}(\cdot) = \text{sgn}(\cdot)$

7.11 Using the describing function method, investigate the existence of periodic solutions and the possible frequency and amplitude of oscillation in the feedback connection of Figure 7.1 for each of the following cases:

(6) $G(s) = 5(s+0.25) / s^2(s+2)^2$, and ψ is nonlinearity of Exercise 7.10 (3) with $A=1$ and $k=2$.

Exercise 7.10 (3) describing function $\Psi(a) = k + \frac{4A}{\pi a}$

$$\Rightarrow \Psi(a) = 2 + \frac{4}{\pi a}$$

$$G(s) = \frac{5(s+0.25)}{s^2(s+2)^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{5(j\omega+0.25)}{(j\omega)^2(j\omega+2)^2} = \frac{5(j\omega+0.25)}{-\omega^2(-\omega^2+4j\omega+4)}$$

$$= \frac{5(j\omega+0.25)(\omega^2-4+4j\omega)}{\omega^2(\omega^2-4j\omega-4)(\omega^2-4+4j\omega)}$$

$$= \frac{1.25\omega^2-5-20\omega^2+5j\omega^3-20j\omega+5j\omega}{\omega^2\{(\omega^2-4)^2+16\omega^2\}}$$

$$= \frac{-18.75\omega^2-5+5j\omega(\omega^2-3)}{\omega^2\{(\omega^2-4)^2+16\omega^2\}}$$

$$= \frac{-18.75\omega^2-5+j5\omega(\omega^2-3)}{\omega^2(\omega^2+4)^2}$$

① $\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \frac{5\omega(\omega^2-3)}{\omega^2(\omega^2+4)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{3}$ rad/s

$$\mathrm{Re}[G(j\omega)] = \frac{-18.75\omega^2-5}{\omega^2(\omega^2+4)^2}$$

② $\mathrm{Re}[G(j\omega)] \cdot \Psi(a) + 1 = 0 \qquad \omega = \sqrt{3}$

$$\frac{-18.75\cdot 3-5}{3(3+4)^2}\cdot\left(2+\frac{4}{\pi a}\right)+1 = 0$$

$$\frac{-61.25}{147}\left(2+\frac{4}{\pi a}\right)+1=0$$

$$2+\frac{4}{\pi a} = \frac{147}{61.25} = 2.4$$

$$\frac{4}{\pi a} = 0.4 \Rightarrow a = \frac{10}{\pi}$$

∴ the solution MAY ~~exists~~ exist with frequency $\sqrt{3}$ rad/s and amplitude $\frac{10}{\pi}$

7.1 (1) (a) Circle ~~ct~~ Criterion.

$$G(s) = \frac{s}{s^2-s+1} = \frac{s}{(s-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)(s-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)}$$

pole : $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j \Rightarrow$ RHP에 pole 존재.

$\Rightarrow \quad 0 < \alpha < \beta$.

G(s)의 unstable pole → 2개

⇒ G(s) 의 Nyquist plot 이 $-\frac{1}{\alpha}$을 2번 감싸야 한다. (반 시계 방향으로)

and Disk (α, β) ($-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$을 지름의 끝점으로 하는 원) 가 G(s) 의 Nyquist plot 과 만나지 말아야 한다.

지금 주어진 G(s)의 Nyquist plot 이 2바퀴를 반시계 방향으로 돌고 있으므로 $-\frac{1}{\alpha}$ 이 $-1 \sim 0$ 사이에 들어가면, unstable pole 의 수만큼 Nyquist plot 이 $-\frac{1}{\alpha}$을 감싸게 된다.

$\Rightarrow \quad -1 < -\frac{1}{\alpha} < 0$

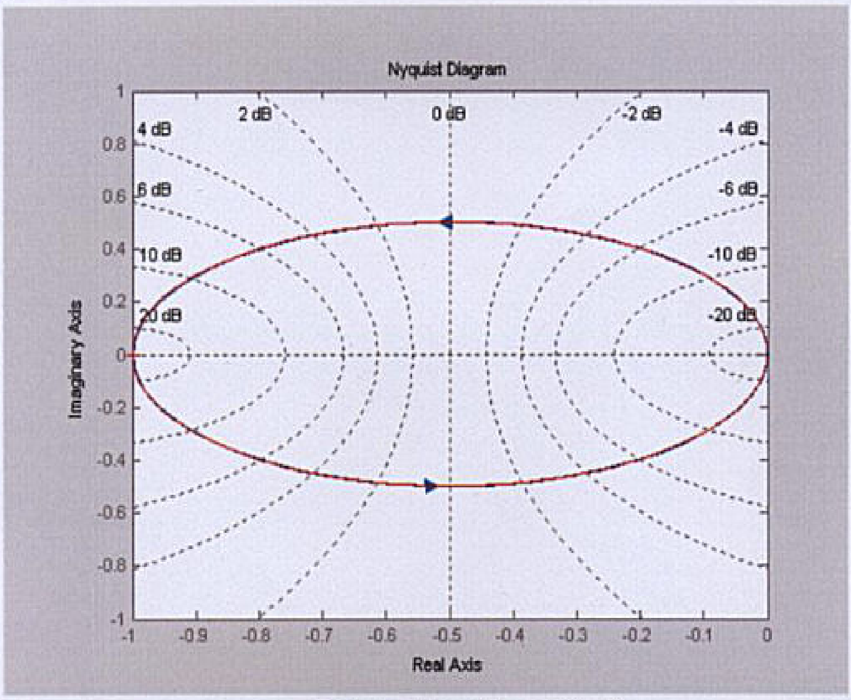
$\Rightarrow \quad \alpha > 1$ ($\because \alpha > 0$ 인 것은 G 가 Hurwitz 가 아니므로)

(-0.5, 0)을 중심으로 하는 원을 그려보면 반지름이 0.5인 원의 경우 (즉, $[\alpha, \beta] = [1, \infty]$) Nyquist plot 을 넘어가는 것을 확인할 수 있다.

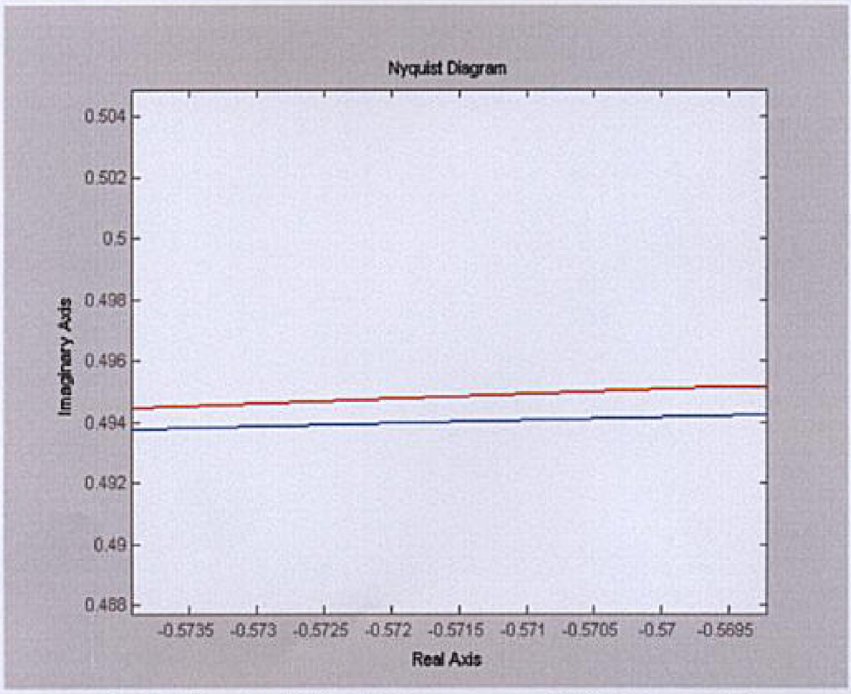
하지만 반지름이 0.495인 경우 ($[\alpha, \beta] = [1.005, 200]$) 원 안에 들어가는 것을 확인할 수 있다.

Generally, $[1+\varepsilon_1, 1/\varepsilon_2]$ for sufficiently small $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

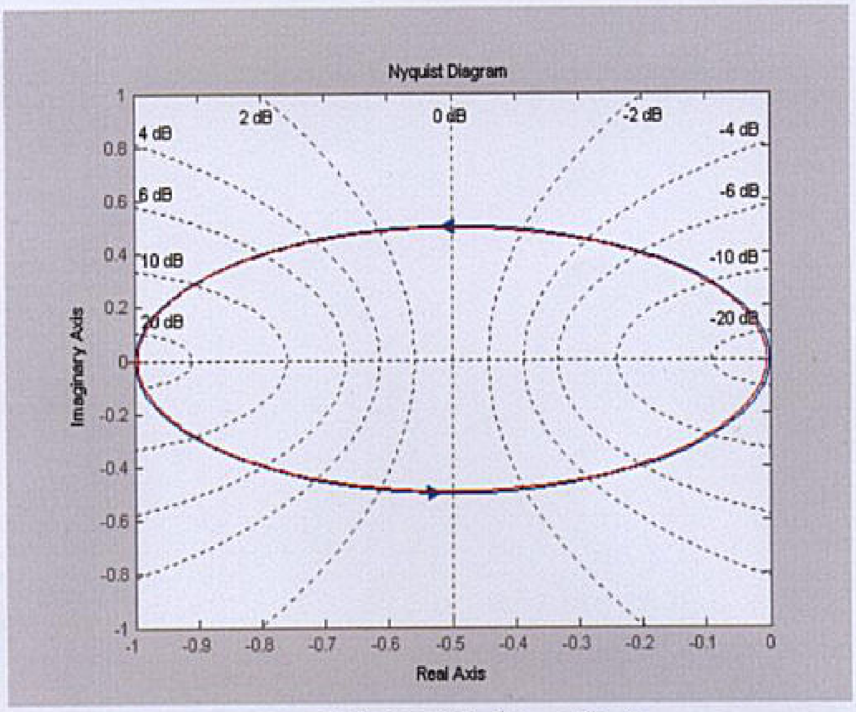
7.1(1)



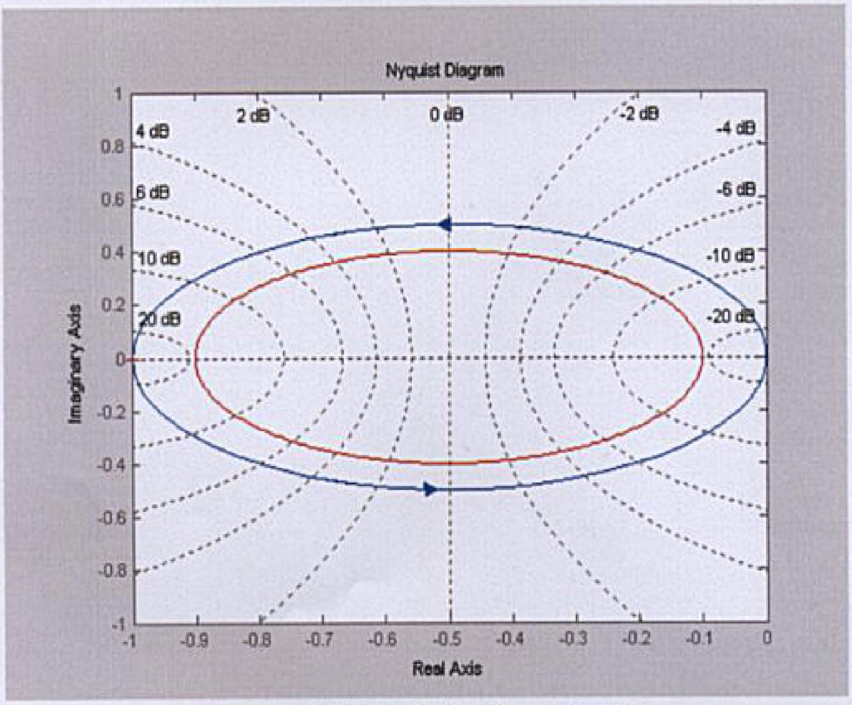
<r=0.5, 중심(-0.5,0)인 원을 그렸을 때>



<반지름이 0.5인 원(붉은 것)이 Nyquist plot(파란색)밖으로 나감>



<r=0.495, 중심(-0.5,0)인 원을 그렸을 때>



<r=0.4, 중심(-0.5,0)인 원을 그렸을 때>

(b) use Popov Criterion.

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - s + 1} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{array} \quad y = x_1$$

G(s) 가 Hurwitz 가 아니기 때문에 sector condition 0 부터 시작하는 feedback을 이용하면 안된다.

그러므로 교재 p218 의 Example 7.5 와 유사한 feedback $u = -\tilde{\psi}(y) = -(h(y) - \alpha y)$ $(\alpha > 0)$ 을 이용해야 한다. and $\tilde{\psi} \in [0, k]$ $(k = \beta - \alpha)$

이 feedback u를 이용했을 때, system eqn 은

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \;\; 0)\, x$$

가 된다.

$\tilde{A}$의 eigen value ⇒ $s^2 + (\alpha - 1)s + 1 = 0$ 의 근

$\tilde{A}$ 이 Hurwitz 가 되기 위해서는 $\alpha > 1$ 이어야 한다.

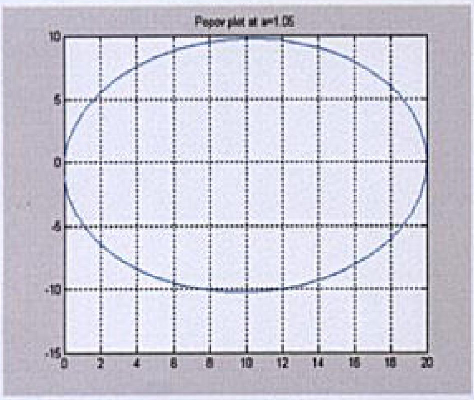
여기서 $\alpha = 1.05$로 잡고 Popov plot을 그리면 기울기가 $1/\gamma$ $(\gamma > 0)$ 이고 x 절편이 $-\frac{1}{\beta}$ $(\beta > 0)$ 인 Popov plot에 접하는 직선을 항상 그릴 수 있다.

그리고, 이때 $-\frac{1}{\beta} < 0$ 이면 항상 가능하므로, $\beta < \infty$ 인 경우 항상 absolutely stable하게 만들 수 있다.

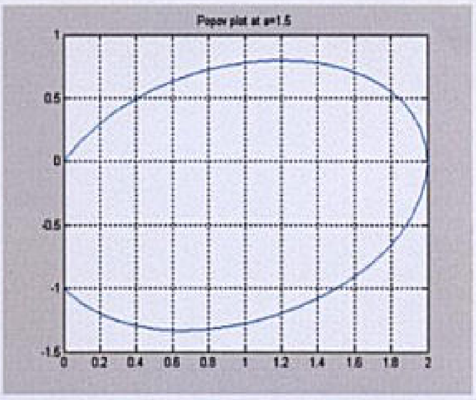
$\therefore$ $h(y) \in [1.05, \beta]$ $(\beta < \infty)$ 이면 가능,

general expression? o.k.
→ $[\alpha, \beta]$ for $\alpha > 1$ and
β arbitrarily large

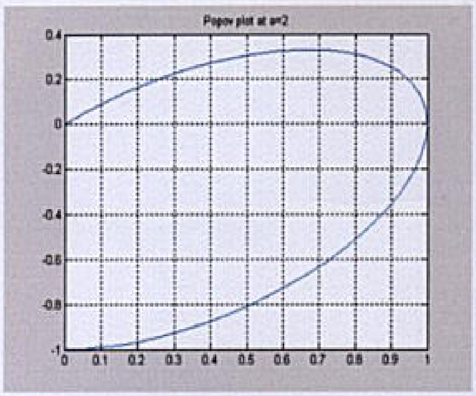
7.7 Use Popov Criterion



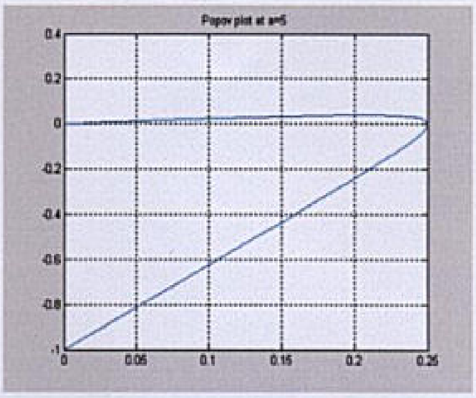
<at a=1.05>



<at a=1. 5>

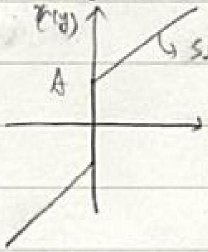


<at a=5>



<at a=5>

7.10 (3) $\psi(y)$: Fig 7.24 (a) show. $\Psi(a) = k + \frac{4A}{\pi a}$.



$\longrightarrow \psi(y) = K + A\,\mathrm{sgn}(y)$

$$\Psi(a) = \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} \psi(a\sin\theta)\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a\sin\theta)\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (A + ak\sin\theta)\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi a}\left[-A\cos\theta + \frac{ak}{2}x - \frac{ak}{2}\cos x \sin x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{\frac{4A}{\pi a} + k}$$

7.11 (6) $G(s) = \frac{5(s+0.25)}{s^2(s+2)^2}$ $\psi(y)$: Fig 7.24 (a).

$A=1$, $k=2$

$$G(j\omega) = \frac{5(j\omega + \frac{1}{4})}{-\omega^2(j\omega+2)^2} = \frac{-5(1 + \frac{5}{4}\omega^2) + 5j\omega(\omega^2-3)}{\omega^2(4+\omega^2)^2}$$

$\mathrm{Img}[G(j\omega)] = 0$ at $\omega = \sqrt{3}$.

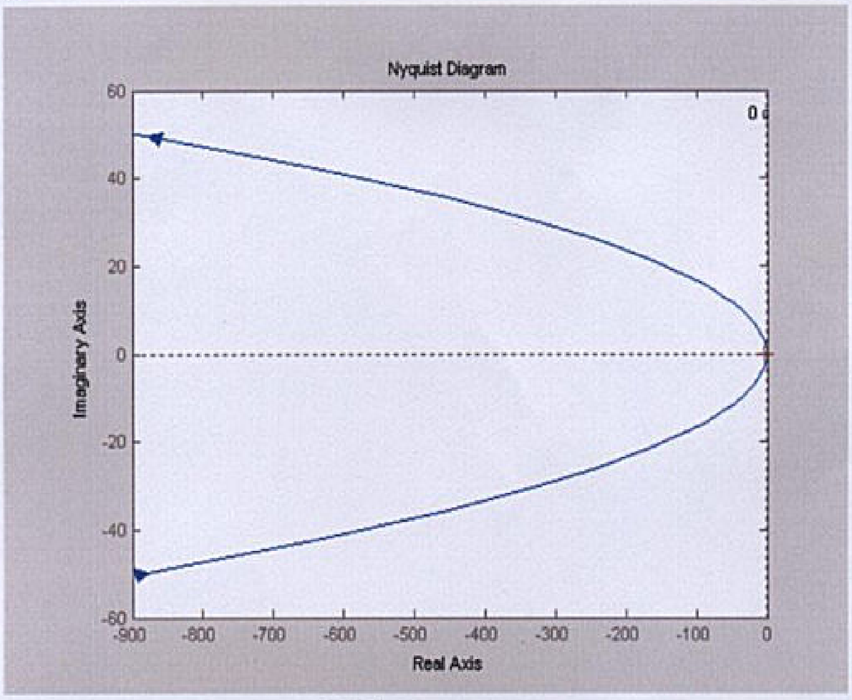
이때 $\mathrm{Re}[G(j\omega)] = -\frac{5}{12}$

$1 + \Psi(a)\,\mathrm{Re}[G(j\omega)] = 0 = 1 - \frac{5}{12}\left(\frac{4}{\pi a} + 2\right)$

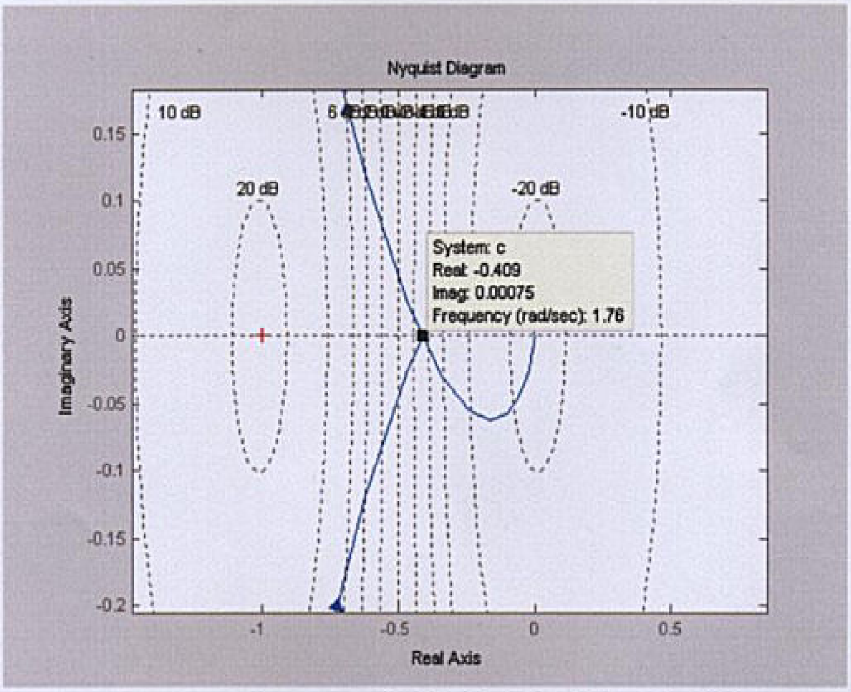
$\Rightarrow a = \frac{10}{\pi}$.

$\therefore$ amplitude 가 $10/\pi$ 이고 frequency 가 $\sqrt{3}$ 정도인 limit cycle 이 존재할 가능성이 있다.

7.11(6)



<G(s)의 Nyquist plot>



<Nyquist plot이 w=1.76근처에서 실수축과 만나는 것을 확인>