

H.W #1

1. (a) $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

(b) $\lambda = \frac{h}{p}$, $E = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$ $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$
 $= \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{3kmT}} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1.381 \times 10^{-23} \times 4003 / (6.022 \times 10^{23}) \times 10^3 \times 300}} = 9.290 \times 10^{-11} \text{ (m)}$

(c) $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} (= \hbar k)$
 $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} (= \frac{\hbar^2 k^2}{2m})$

2. (a) $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (6 \times 10^{-9})^2} = 6.69 \times 10^{-25} \text{ (J)} = 4.18 \times 10^{-6} \text{ (eV)}$

(b) $V_p = \frac{w}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mv} = \frac{V_g}{2}$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mV_g}$, $\lambda = \frac{h}{mV_g}$, $V_g = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 6 \times 10^{-9}} = 1212 \text{ (m/s)}$

$\therefore V_p = \frac{V_g}{2} = 606 \text{ (m/s)}$

(c) $E = h\nu = hc/\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 2.998 \times 10^8}{6 \times 10^{-9}} = 3.33 \times 10^{-19} \text{ (J)} = 2.07 \text{ (eV)}$

$E_{ph} > E_{el}$ (E_{ph} 가 E_{el} 이 비해 5×10^5 배 정도 크다.)

$E_{el} = \frac{p^2}{2m} = \frac{m^2 V_g^2}{2m} = \frac{m}{2} V_g \cdot \frac{h}{m \cdot \lambda} = V_g \cdot \frac{h}{2\lambda}$

$E_{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ $\therefore E_{ph}/E_{el} = \frac{2c}{V_g} > 1$ 같은 파장을 갖는 photon 과 electron 의 에너지는 비교하면 항상 photon 의 energy 가 더 크다. (일종의 E 만 2배)

4. $\Psi_1 = \sin[kx - \omega t]$, $\Psi_2 = \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t]$

$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi = 2 \cdot \sin\left(\frac{kx - \omega t + (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{kx - \omega t - (k + \Delta k)x + (\omega + \Delta \omega)t}{2}\right)$
 $= 2 \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cdot \sin\left[(k + \frac{\Delta k}{2})x - (\omega + \Delta \omega)t\right]$

$$5. \begin{cases} p = mv \\ c = \nu \lambda \\ E = mc^2 \end{cases} \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc \text{ (massless particle)} \quad \therefore \lambda p = h$$

$$E = h\nu = \frac{h\nu_p}{\lambda} = \frac{h\nu_g}{2\lambda} = \frac{1}{2} m\nu_g^2 \text{ (mass of } \frac{1}{2} \text{ particle)}$$

$$h = m\nu_g \lambda \quad \therefore \lambda p = h$$

6. $w = \lambda\nu = E/p$: the velocity of propagation for a de Broglie wave
 \rightarrow phase velocity.

particle velocity : v . \rightarrow group velocity. $v/2 = w$.

particle 이 non relativistic velocity $\frac{v}{2}$ 가라, group velocity (particle 이 실제로 움직이는 속도) 는 phase velocity (de Broglie wave 가 진행해가는 속도) 의 두배이다.
 matter wave 의 velocity $\frac{v}{2}$ 가라할 때 이 둘은 구분하여 고려해야 한다.

H.W # 2

1. (a) a free electron: no potential $\rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (continuous energy)

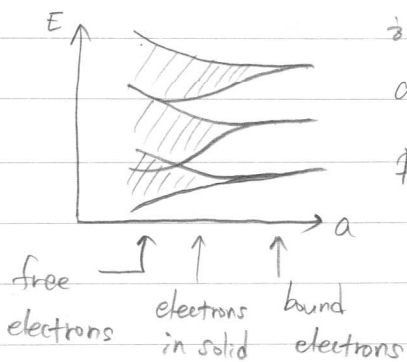
(b) a strongly bound electron: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
(discrete energy)

(c) an electron in a periodic potential: 주기적인 potential 에 의해 energy band 형성
(allowed energy band, forbidden energy band 존재)

같은 energy band scheme 을 보이는 이유

: 각각의 경우 Schrodinger equation 을 풀 때 boundary condition, potential 이 다르다.
이에 따라 각각의 해가 다른 모습을 보이는 것이다.

같은 현상은 interatomic distance a 를 이용한 것이 있다.



하나의 고립된 atom 에 속하는 전자는 discrete energy 를 가진다

atom 이 서로 접근하여 영향을 미치고 하나의 system 이 되는 경우

Pauli exclusion principle 에 의해 energy state 가 나누어지게 된다. (band 형성)

이 때 band 내에서는 energy state 가 나누어져 있지만 그 차이가 매우 작아 연속적인 것으로 생각할 수 있다.

2. Kronig - Penny Model

S.E. I (no potential): $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$. S.E. II ($V=V_0$): $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \psi = 0$

the trial solution $\psi(x) = A e^{ikx}$ 대입. ($\frac{d\psi}{dx} = A i k e^{ikx}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -A k^2 e^{ikx}$)

I: $-A k^2 e^{ikx} + \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot A e^{ikx} = 0 \quad \therefore k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

II: $-A k^2 e^{ikx} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \cdot A e^{ikx} = 0 \quad \therefore k^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$

} $V_0 = 0$.

Bloch function $\psi(x) = u(x) \cdot e^{ikx}$ 이서 $u(x)$ 는 lattice 의 periodicity 를 알려주는 주기함수이다. $u(x)$ 가 constant A 일 경우 periodic potential 이 없는 ($V_0=0$) 상황이 되어 free electron 과 같은 경우가 된다.

3. $u = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ (2), $a \frac{d^2u}{dx^2} + bu = 0$ (1) ($k = \sqrt{b/a}$)

(2) $\frac{d^2u}{dx^2}$ (1) 이 대입, $\left(\frac{du}{dx} = Aike^{ikx} - Bik e^{-ikx}, \frac{d^2u}{dx^2} = -Ak^2 e^{ikx} - Bk^2 e^{-ikx} \right)$

$\therefore a \cdot (-Ak^2 e^{ikx} - Bk^2 e^{-ikx}) + b(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})$

$= (-aA \cdot \frac{b}{a} + bA) e^{ikx} + (-aB \cdot \frac{b}{a} + bB) e^{-ikx} = 0, (\text{중명꼴})$

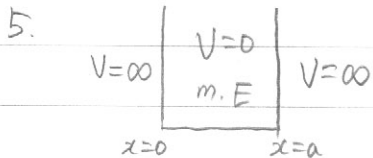
4. $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{(-) e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (방향과 크기 부호 생략), $V^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}$

Bohr's postulate: $L = mvr = n\hbar$, $r = n\hbar/mv$ $\xrightarrow{\text{대입}}$ $V^2 = \frac{e^2 \cdot m \hbar}{4\pi\epsilon_0 n \cdot \hbar}$

$E = KE + PE$, ($PE = -\int F(r) dr = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$)

$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{m}{2} \cdot \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

$= \frac{-9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4}{2 \times (4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.626 \times 10^{-34} / 2\pi)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -2.17 \times 10^{-18} \cdot \frac{1}{n^2} \text{ (J)} = -13.6 \cdot \frac{1}{n^2} \text{ (eV)}$



(a) $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0 \rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$ } solution

$\psi = A \sin kx + B \cos kx$ ($Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ 과 같은 형태)

B.C. 적용 $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ 에서 } \psi=0, \therefore \psi(0) = B=0 \\ x=a \text{ 에서 } \psi=0, \therefore \psi(a) = A \sin ka = 0, A \neq 0 \text{ 이어야 } \psi \neq 0 \text{ 이므로} \\ ka = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{array} \right.$

$\therefore k = \frac{n\pi}{a}$, $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(b) the lowest energy: 10.00 eV ($n=1$)

the two higher energies: $E_n \propto n^2$ 이므로, $E_2 = 40.00 \text{ eV}$, $E_3 = 90.00 \text{ eV}$.

(c) $\psi_n = A \sin kx = A \sin \frac{n\pi x}{a}$, normalization: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx = 1$

$$\int_0^a A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = A^2 \int_0^a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) dx$$

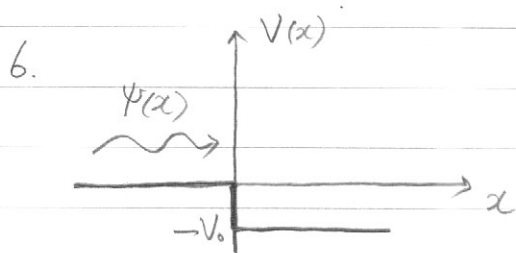
$$= A^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{a}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{a} \right]_0^a = A^2 \cdot \frac{a}{2} = 1 \quad \therefore A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\therefore \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

(d) the probability density ($0 < x \leq \frac{a}{3}$) $\Rightarrow \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_3|^2 dx$ ($n=3$)

$$\int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{6\pi x}{a} \right) dx$$

$$= \frac{2}{a} \left[\frac{1}{2}x - \frac{a}{12\pi} \sin \frac{6\pi x}{a} \right]_0^{\frac{a}{3}} = \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{1}{3}$$



(a) $x \geq 0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \psi = 0$$

$x \leq 0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

(b) $x \leq 0$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$$

$\begin{cases} \text{incident amplitude} \\ \text{reflected amplitude} \end{cases}$ (amplitude $\hat{=}$ $|A|^2$ 일지라.)

$x \geq 0$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}, \quad \psi_2(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} \quad (\text{assuming there is no incoming wave to the right})$$

Boundary condition, $x=0$ or $x=1$ $\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \text{--- (1)} \\ \frac{d\psi_1}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{d\psi_2}{dx}\bigg|_{x=0} \quad \text{--- (2)} \end{array} \right.$

(1): $A + B = C$

(2): $Aik_1 - Bik_1 = Cik_2 \rightarrow \frac{(A-B)k_1}{k_2} = C \rightarrow (1) \text{에 대입}$

$$A+B = \frac{(A-B)k_1}{k_2} \quad k_2(A+B) = k_1(A-B) \quad \frac{B}{A} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$$

$$(k_1-k_2)A = (k_1+k_2)B$$

$$\therefore R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E+V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E+V_0}} \right)^2$$

(c) $E = V_0/3 \rightarrow V_0 = 3E$

$$\therefore R = \left(\frac{\sqrt{E} - 2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + 2\sqrt{E}} \right)^2 = \left(\frac{-1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} \quad \therefore T = 1 - R = \frac{8}{9}$$

H.W #3

1. bound electrons: discrete energy level 을 갖는다.

ex) infinite potential well : $E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2ma^2} \cdot n^2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

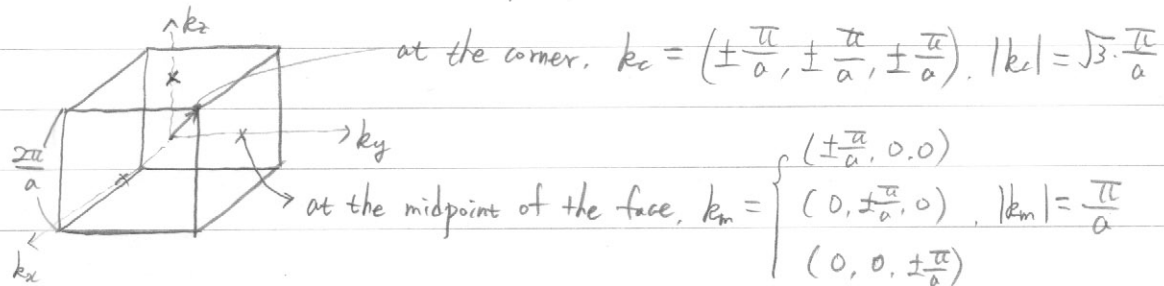
free electrons: 연속적인 energy 을 가질 수 있다. $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

electrons in crystals: energy band 가 존재한다. (allowed, forbidden bands 존재)

ex) from Kronig-Penny model, $P \frac{\sin da}{da} + \cos \alpha a = \cos ka$

2. Simple cubic lattice : reciprocal lattice 도 마찬가지로 simple cubic 이다.
reciprocal lattice 이서의 fundamental vector b_1, b_2, b_3 의 크기는 $2\pi/a$ 이다. (real lattice parameter a)

in reciprocal space,
first Brillouin zone

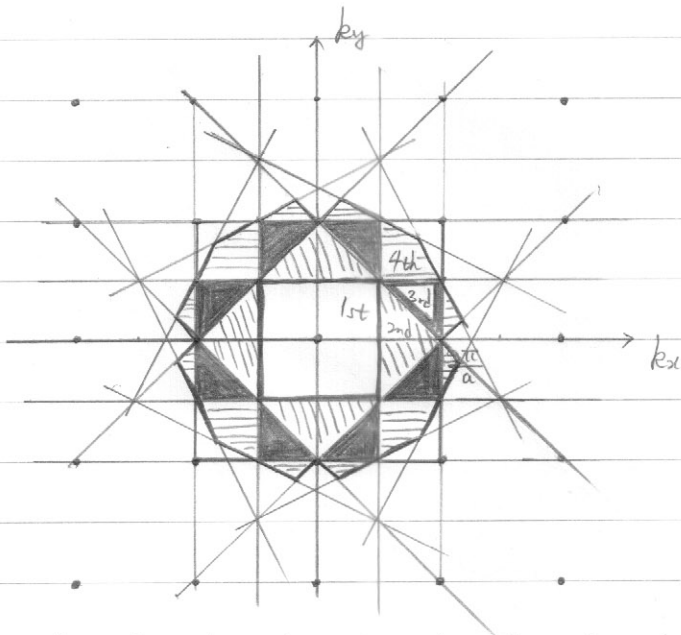


(for free electron)

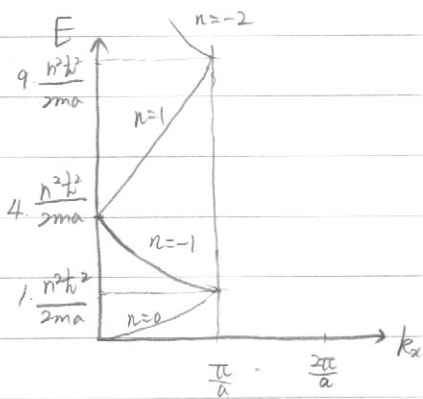
$$\therefore E_c = \frac{\hbar^2 |k_c|^2}{2m} = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, \quad E_m = \frac{\hbar^2 |k_m|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$\therefore E_c$ 가 E_m 보다 $\frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2}$ 만큼 더 크다. ($E_c : E_m = 3 : 1$)

3.



4 Fig 5.6



$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_x + n \frac{2\pi}{a} \right)^2, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$n=1, E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_x + \frac{2\pi}{a} \right)^2 \begin{cases} k_x=0, E=4 \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2} \\ k_x=\frac{\pi}{a}, E=9 \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2} \end{cases}$$

$$n=-2, E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_x - 2 \frac{2\pi}{a} \right)^2 \begin{cases} k_x=0, E=16 \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2} \\ k_x=\frac{\pi}{a}, E=9 \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2} \end{cases}$$

5. FCC crystal of main lattice vector (in real space)

$$\vec{t}_1 = \frac{a}{2} (\hat{i} + \hat{j}), \quad \vec{t}_2 = \frac{a}{2} (\hat{j} + \hat{l}), \quad \vec{t}_3 = \frac{a}{2} (\hat{l} + \hat{i}) \quad (a: \text{lattice parameter})$$

($\hat{i}, \hat{j}, \hat{l}$ 은 각각 x, y, z 방향 unit vector, 2개의 notation $\frac{a}{2}$ 라고 하자)

in reciprocal space,

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{t}_2 \times \vec{t}_3}{V}, \quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{t}_3 \times \vec{t}_1}{V}, \quad \vec{b}_3 = \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{V} \quad (V = \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 \times \vec{t}_3)$$

$$V = \left(\frac{a}{2} \right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{a}{2} \right)^3 \cdot (1+1) = \frac{a^3}{4}$$

$$\therefore \vec{b}_1 = \frac{4}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{l} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} (\hat{i} + \hat{j} - \hat{l})$$

$$\vec{b}_2 = \frac{4}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{l} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{l}), \quad \vec{b}_3 = \frac{4}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{l} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a} (\hat{i} - \hat{j} + \hat{l})$$

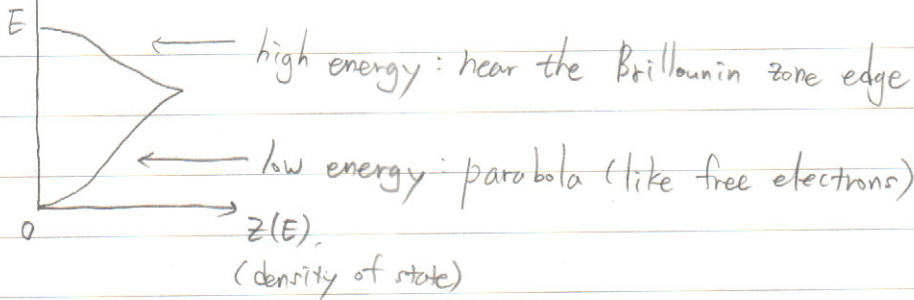
간단하게 표현, $b_1 = \frac{1}{a} (11\bar{1})$, $b_2 = \frac{1}{a} (\bar{1}11)$, $b_3 = \frac{1}{a} (1\bar{1}1) \rightarrow$ bcc of main lattice vector (in reciprocal space)

6. $b_i \cdot t_i = 1$

이 식이 $b_i \parallel t_i$ 를 의미하지 않는다. b_i 은 정역이 라서 \vec{t}_2 와 \vec{t}_3 에 수직인 방향이며 \vec{t}_1 이 \vec{t}_2 와 \vec{t}_3 에 수직일 때만 $b_i \parallel \vec{t}_i$ 이 성립한다. 나머지 경우, $|b_i \cdot t_i| \cos \theta = 1$ 만 만족시키면 된다.

H. W #4

1. Valence band of metal



electron 은 2개의 spin state 를 가지고, fermi-dirac distribution 을 따르므로,

population density : $N(E) = 2 \cdot g(E) \cdot F(E)$

band 의 bottom 은 2입자이와 같이 density of state 가 작다. band 의 middle 은 bottom 이 비해 많은 density of state 를 가지고 있는데, 실제로 전자의 수 $N(E)$ 를 고려해줘야 하에서는 전자가 차 있을 확률 $F(E)$ 를 고려해야 한다. bivalent metal 의 경우 fermi energy 가 valence band 의 아래부분이 존재하게 되는데, (Fig 7.6 참고) 이 때에도 $T > 0K$ 일 때는 fermi distribution 의 Boltzmann tail 부분으로 인해 band 의 중간부분에도 전자가 존재할 확률이 존재하게 된다 즉 우리가 실제로 다루는 영역 ($T > 0K$) 에서는 band 의 middle 부분이 더 많은 전자가 존재한다.

2. $F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right) + 1}$ silver: $E_F = 5.5eV$, 1% above: $5.5 \times 1.01 = 5.555 (eV)$, $F(E) = 0.1$

$$\frac{1}{F(E)} - 1 = \exp\left(\frac{E-E_F}{k_B T}\right)$$

$$\frac{E-E_F}{k_B T} = \ln\left(\frac{1}{F(E)} - 1\right) \quad \therefore T = \frac{E-E_F}{k_B \ln\left(\frac{1}{F(E)} - 1\right)} = \frac{5.555 - 5.5}{8.62 \times 10^{-5} \times \ln 9} = 290.4 (K)$$

3. $g(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2 \times 9.11 \times 10^{-31}}{(1.054 \times 10^{-34})^2}\right)^{3/2} \cdot (7 \times 1.6 \times 10^{-19})^{1/2} = 5.63 \times 10^{46}$

$= 5.63 \times 10^{46}$ (energy states / J) ← 1J은 너무 큰 단위이다.

$= 9.01 \times 10^{27}$ (energy states / eV) ← 식적으로는 의미 있는 정보

4. $E_F = 7eV$, at the E_F : 10^{21} energy states / eV (원자의 electron 은 free e' 만 고려)

(a) the number of electrons for this metal: 2×10^{21} electrons → Wrong!

이것은 Fermi energy level 근방에 있는 전자의 수만 고려한 것이다. 실제 자유전자의 수는 band 내의 모든 energy state 를 고려해야 한다.

(b) $N^* = \int_0^{E_F} N(E) dE = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_0}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2} = \frac{1 \times 10^{-6}}{3\pi^2} \cdot \left(\frac{2 \times 9.11 \times 10^{-31}}{(1.054 \times 10^{-34})^2}\right)^{3/2} \cdot (7 \times 1.6 \times 10^{-19})^{3/2} = 4.41 \times 10^{22}$ electrons.

(a)에서 제안한 값과 한 order 정도 차이가 난다. 크기 다르지 않은 가량은 Fermi energy 근방의 density of state 가 크기 때문이다.

$$5. (a) N' = \frac{N^*}{V} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2 \times 9.11 \times 10^{-31}}{(1.054 \times 10^{-34})^2} \right)^{3/2} \cdot (1.7 \times 1.6 \times 10^{-19})^{3/2}$$

$$= 8.41 \times 10^{28} \text{ electrons/m}^3 = 8.41 \times 10^{22} \text{ electrons/cm}^3$$

(b) eq 9.5 $N_a = \frac{N_0 \delta}{M} \left(\begin{array}{l} \delta_{Cu}: 8.94 \text{ g/cm}^3 \\ M_{Cu}: 63.546 \text{ g/mol} \end{array} \right)$ Copper atom 하나당 한개의 free e' 고여.

$$\therefore N = \frac{6.023 \times 10^{23} \times 8.94}{63.546} = 8.47 \times 10^{22} \text{ electrons/cm}^3$$

(a) 에서 구한 electron 의 수보다 약간 큰 값을 가진다

(c) (a) 에서 구한 방법은 free electron model 을 기반으로 한다 density of states 가 $E^{1/2}$ 이 비례 (E vs $\rho(E)$: parabola) 한다고 생각하지만, 실제 정확히 그려지는 양다 (b) 의 경우도 실제 계산상으 구한 전자 하나당 자유전자가 하나씩 존재한다는 것도 일부 오차를 포함하고 있는 것이다.

(d) effective mass 를 사용하는 것은 실제의 E vs. k 의 정보를 이용하는 것이다. $m^* = m_0$ 라는 것은 E vs. k 가 ideal parabolic 을 의미한다 따라서 effective mass 는 이용한 경우 discrepancy 는 줄일수 있다 ((b) 에서 구한 값이 실험적으로 더 높은 값이라고 볼때)

6. (a) $E - E_F = n kT, T = 300 \text{ K}$

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} \approx \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right)$$

$n=1 \quad E - E_F = 8.62 \times 10^{-5} \times 300 = 2.59 \times 10^{-3} \text{ (eV)}$

$n=2 \quad E - E_F = 2 \times k_B \times 300 = 5.17 \times 10^{-3} \text{ (eV)}$

$n=4 \quad E - E_F = 4 \times k_B \times 300 = 1.03 \times 10^{-2} \text{ (eV)}$

$\frac{E - E_F}{k_B T} = n$ exp(n) 이 "significantly larger" than 1 하기 위한 기준으로, Fermi distribution 과 Boltzmann distribution 의 오차가 1% 미만인 되는 n 값을 구하자.

$$\frac{1}{\exp(n)+1} = 0.99 \quad \therefore n = 4.60 \quad n \geq 4.60 \text{ 이서는 } \exp(n) = 99.48 \dots$$

1 보다 충분히 크다고 생각할수 있다

(b) Boltzmann statistics 를 적용할수 있는 범위는 $n \geq 4$ 로 두었다

$$E = E_F + 4k_B T$$

$$= 5 + 4 \times 8.62 \times 10^{-5} \times 300 = 5.10 \text{ (eV)}$$

H.W #5

1. Au : electronic configuration $\rightarrow [Xe] 4f^{14} 5d^{10} 6s^1$
 density : 19.3 g/cm^3
 atomic mass : 196.97 g/mol
 ↳ monovalent 3 생각.

$$N_e = N_a = \frac{N_0 d}{M} = \frac{6.022 \times 10^{23} (\text{atoms/mol}) \times 19.3 (\text{g/cm}^3)}{196.97 (\text{g/mol})} = 5.90 \times 10^{22} (\text{atoms/cm}^3)$$

(monovalent)

2. (a) Drude postulation \rightarrow a free electron gas.

전자에 electrostatic force eE 와 저항력 γv 가 작용한다고 생각하자. ($\gamma = \text{const.}$)

$$m \frac{dv}{dt} + \gamma v = eE \quad (\text{운동방정식})$$

For steady state ($v = v_f$) $\rightarrow dv/dt = 0$, $\therefore \gamma = \frac{eE}{v_f}$

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{eE}{v_f} v = eE \xrightarrow{\text{solution}} v = v_f \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{eE}{mv_f}\right)t\right) \right]$$

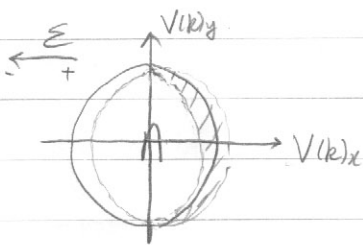
$$\text{relaxation time } \tau = \frac{mv_f}{eE} \rightarrow v_f = \frac{\tau eE}{m}$$

$$\text{Current density : } J = N_f v_f e = \sigma E \rightarrow \sigma = \frac{N_f e^2 \tau}{m}$$

(b) Drude model 은 전기장이 의해 모든 자유전자가 이동하여 전류를 흐르게 한다고 생각한다.

실제로 전기장이 의해 모든 자유전자가 이동하는 것이 아니기에 수정이 필요하다

Quantum mechanical consideration 은 E 근처의 electron 만이 conduction 에 기여한다고 생각한다



Field 가 가해졌을 때 A 영역에서는 random motion 으로 인해 상쇄되고 빙글린 부분만이 전류 형성이 기여한다.

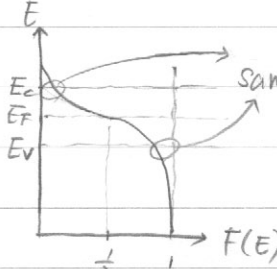
(c) 온도가 올라가면 입자들 사이에 충돌 횟수가 많아지게 되고, 따라서 τ (relaxation time) 이 감소한다. 즉 (a)에서 구한 conductivity 식에 의하면 온도가 증가함에 따라 σ 는 감소 (ρ 는 증가) 하게 된다. 실제 empirical equation 에서도 pure metal 에서 온도가 증가함에 따라 ρ 가 증가하는 것은 확인할 수 있다.

3.
$$N_e = 4.84 \times 10^{15} \left(\frac{m_e^*}{m_0} \right)^{3/2} T^{3/2} \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T} \right], \text{ for Si, } T=300 \text{ K, } \frac{m_e^*}{m_0} = 1$$

$$= 4.84 \times 10^{15} \times 1 \times 300^{3/2} \exp \left(-\frac{1.12}{2 \times 8.616 \times 10^{-5} \times 300} \right) \text{ Appendix 4}$$

$$= 9.81 \times 10^9 \text{ (cm}^{-3}\text{)}$$

4. Fermi function:
$$F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_B T}\right) + 1}$$



same: probability of finding electron
(at the top of valence band + at the bottom of conduction band = 1)

$E_c = 0$ (기준점을 생각), $E_v = -E_g$

$$\therefore F(E_c) = F(0) = \frac{1}{\exp(-E_F/k_B T) + 1}, \quad F(E_v) = \frac{1}{\exp\left(\frac{-E_g - E_F}{k_B T}\right) + 1}$$

$$F(E_c) + F(E_v) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\exp(-E_F/k_B T) + 1} + \frac{1}{\exp(-E_g - E_F/k_B T) + 1} = 1$$

$$\rightarrow \frac{2 + \exp(-E_F/k_B T) + \exp((-E_g - E_F)/k_B T)}{\left\{ \exp(-E_F/k_B T) + 1 \right\} \left\{ \exp\left(\frac{-E_g - E_F}{k_B T}\right) + 1 \right\}} = \frac{2 + \exp(-E_F/k_B T) + \exp\left(\frac{-E_g - E_F}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{-E_g - 2E_F}{k_B T}\right) + \exp(-E_F/k_B T) + \exp\left(\frac{-E_g - E_F}{k_B T}\right)} = 1$$

분모를 우변으로 넘겨 정리하면,
$$\exp\left(\frac{-E_g - 2E_F}{k_B T}\right) = 1 \Rightarrow -E_g - 2E_F = 0, \therefore E_F = -\frac{1}{2} E_g$$

5. eq. (8.14)

$$\sigma = 4.84 \times 10^{15} \left(\frac{m^*}{m_0} \right)^{3/2} T^{3/2} e (\mu_e + \mu_h) \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T} \right]$$

$$\ln \sigma = \text{const.} - \frac{3}{2} \ln \frac{1}{T} - \frac{E_g}{2k_B T}$$

주어진 그림에서 σ ($\log \sigma$) vs $1/T$ 그래프는 거의 직선을 나타낸다. 이는 기울기 $-\frac{E_g}{2k_B}$ 이 아래 $-\frac{3}{2} \ln \frac{1}{T}$ 이 주는 효과가 매우 작기 때문이다. 좀 더 엄밀하게 mobility도 온도 의존성을 가지지만, 그 효과 역시 기울기에 영향을 주지 않는다. \rightarrow 결국 그래프의 기울기는 구하면 된다.

$$\frac{\ln 1 - \ln 100}{(0.8 - 0.6) \times 10^{-2}} = -2302.6 \text{ (K)} = -\frac{E_g}{2 \cdot k_B} \therefore E_g = 0.397 \text{ (eV)}$$

H.W#6

1. 300°C 이상의 온도는 donor (phosphorous) 에서 제공된 extra electron (10^{12} 개/cm³) 이 대부분 conduction band 에 존재하게 한다. (350°C 에서도 동일한 효과)
intrinsic effect 를 알기 위해 각 온도에서의 자유 전자 수를 고려.

$$N_e = 4.84 \times 10^{15} \left(\frac{m_e^*}{m_0} \right)^{3/2} T^{3/2} \exp \left[- \left(\frac{E_g}{2kT} \right) \right] \quad (m_e^*/m_0 = 1)$$

$$E_g(300^\circ\text{C}) = E_{g_0} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 573^2}{573 + \theta_D} \quad \left(\frac{1}{2} = 5 \times 10^{-4} \text{ (eV/K)} \right)$$

$\theta_D(\text{Si}) = 650 \text{ K}$

$$= 1.17 - \frac{5 \times 10^{-4} \times 573^2}{573 + 650} = 1.04 \text{ (eV)}$$

$$E_g(350^\circ\text{C}) = 1.17 - \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 623^2}{623 + 650} = 1.02 \text{ (eV)}$$

$$\text{at } 300^\circ\text{C} : N_e = 4.84 \times 10^{15} \times 1 \times 573^{3/2} \cdot \exp \left(\frac{-1.04}{2 \times 8.616 \times 10^{-5} \times 573} \right) = 1.77 \times 10^{15} \text{ (개/cm}^3\text{)}$$

$$\text{at } 350^\circ\text{C} : N_e = 4.84 \times 10^{15} \times 1 \times 623^{3/2} \cdot \exp \left(\frac{-1.02}{2 \times 8.616 \times 10^{-5} \times 623} \right) = 5.63 \times 10^{15} \text{ (개/cm}^3\text{)}$$

$\sigma = N_e e \mu_e$ 에서, 온도가 300°C → 350°C 가 됨에 따라 intrinsic carrier 의 수가 늘어나므로 conductivity 는 증가한다. (mobility 에 의한 영향은 상대적으로 작음)

이 때의 conductivity 증가 (자유전자 수의 증가) 는 doping 의 효과 (extrinsic effect) 보다 intrinsic effect 에서 훨씬 더 많이 기인되었다.

2. (a) at 300K

$$N_{e,ex} = 10^{13} \times \exp \left(\frac{-0.01}{8.616 \times 10^{-5} \times 300} \right) = 6.8 \times 10^{12} \text{ (개/cm}^3\text{)}$$

$$(b) N_{e,in} = 4.84 \times 10^{15} \times (1) \times 300^{3/2} \cdot \exp \left(\frac{-1}{2 \times 8.616 \times 10^{-5} \times 300} \right) = 9.99 \times 10^{10} \text{ (개/cm}^3\text{)}$$

(c) $N_{e,extrinsic} > N_{e,intrinsic}$ 이므로

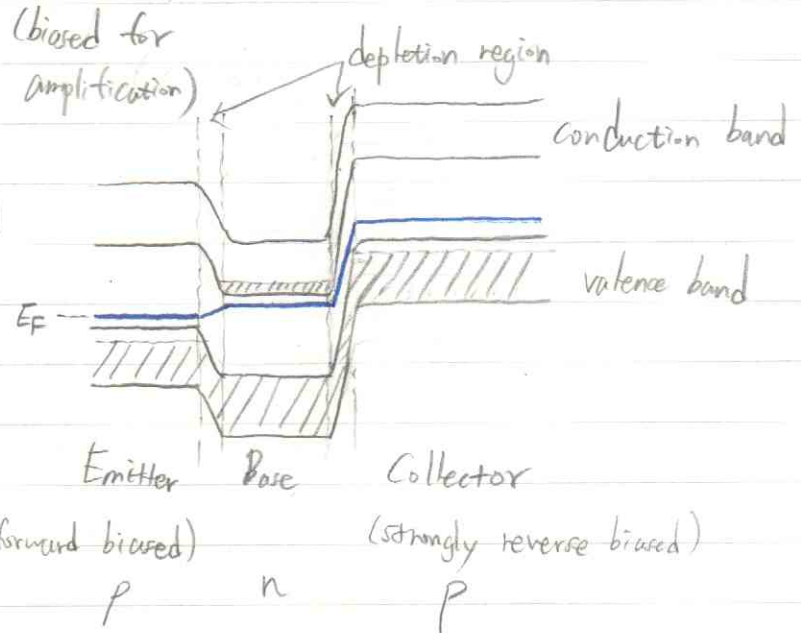
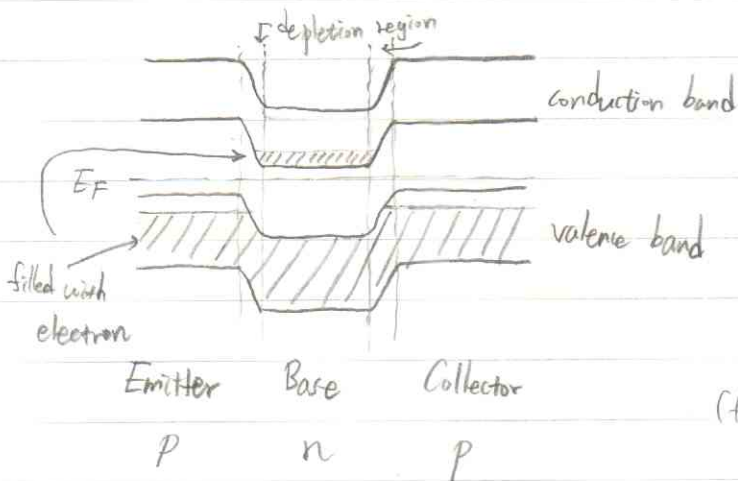
extrinsic effect 에 의한 conduction 이 전체 conduction 에 이 많이 기여한다.

3. p-type doped Si. \rightarrow ohmic contact : $\phi_m > \phi_s$. $\phi_{si} = 2.6 \text{ eV}$ (p.412~413)

$\phi_m > 3.6 \text{ eV}$ 이어야 한다. Ag (4.7eV), Al (4.1), Au (4.8), Cu (4.5) 등은 사용할 수 있다.

4. p-n-p transistor

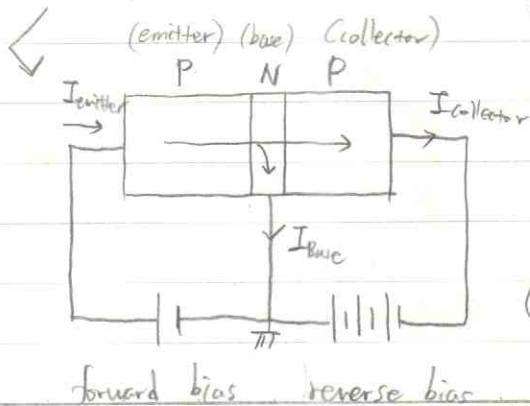
band diagram (unbiased)



npn transistor 과 비교했을 때 major charge carrier 가 hole 이라는 점이 다르다.

우선 emitter 에 존재하는 hole 이 potential barrier 를 뛰어넘게 되면 base 지역이 포화하게 되고, 이 때 일부분이 base 의 전자와 결합하여 소멸된다. 이러한 소수의 전자는 전원의 -극에서 계속 공급 되므로 이것이 양의 base current 가 된다. emitter 에서 base 로는 hole 을 전자와 결합하지 않은 것은 강한 reverse bias 에 의해 collector 쪽으로 가서 collector current 를 형성한다. 또한 emitter 의 hole 은 전원의 +극에서 점차 보충되어 emitter current 를 형성한다 따라서 emitter current 의 대부분은 collector current 가 되고, 일부분만 base current 를 형성하게 된다 위의 같은 transistor 에서 base current 의 작은 변화로 collector current 의 매우 큰 변화를 얻을 수 있으며, 이를 amplification 에 이용한다. 또한 base voltage 의 조절이 의해 emitter 에서 collector 로의 전류는

making electronic switch 기능도 나타낼 수 있다.



$$I_{emitter} = I_{base} + I_{collector}$$

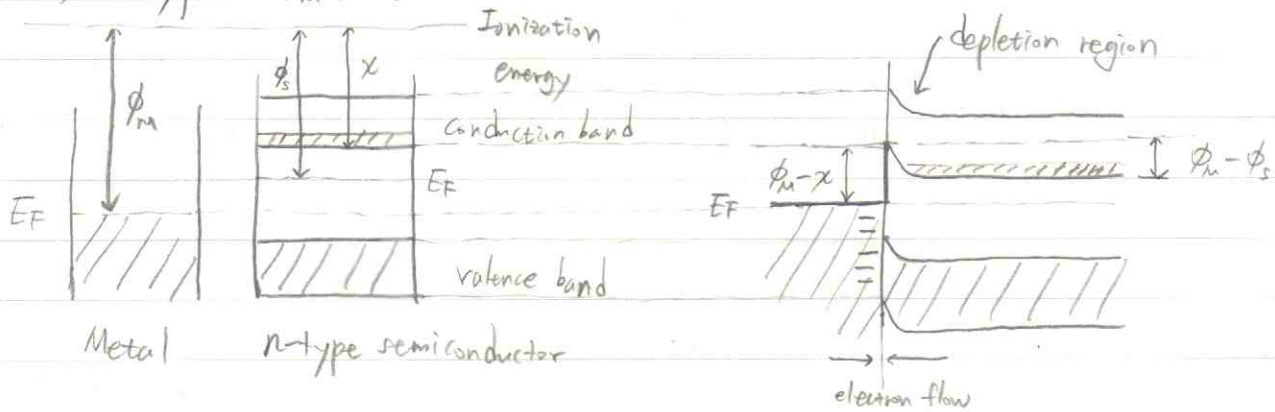
$$(\Delta I_{emitter} = \Delta I_{base} + \Delta I_{collector})$$

forward bias reverse bias
(Common emitter)

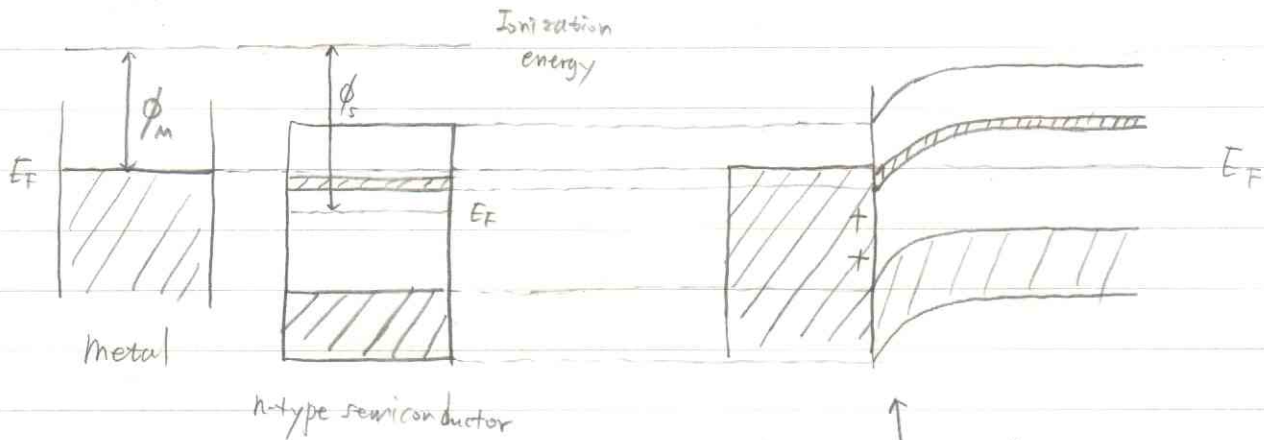
< Before >

< After >

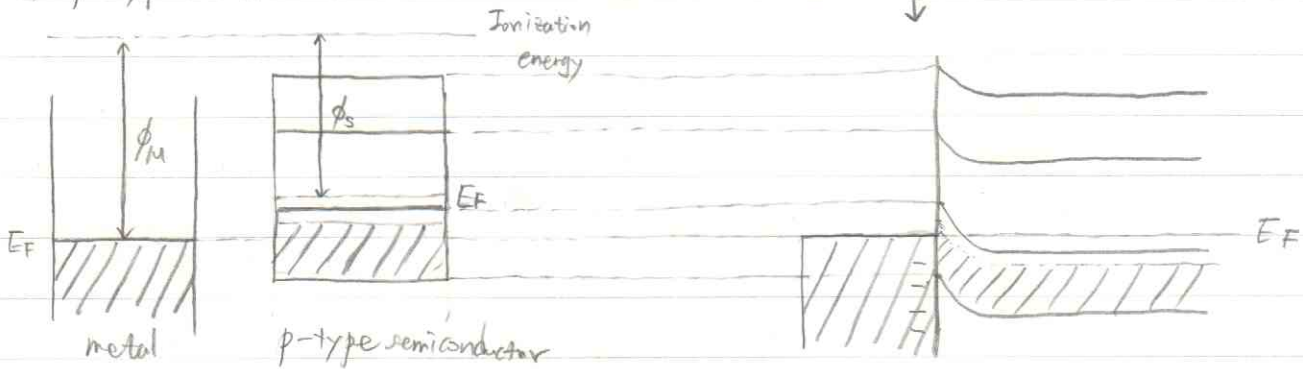
6. a) n-type, $\phi_m > \phi_s$



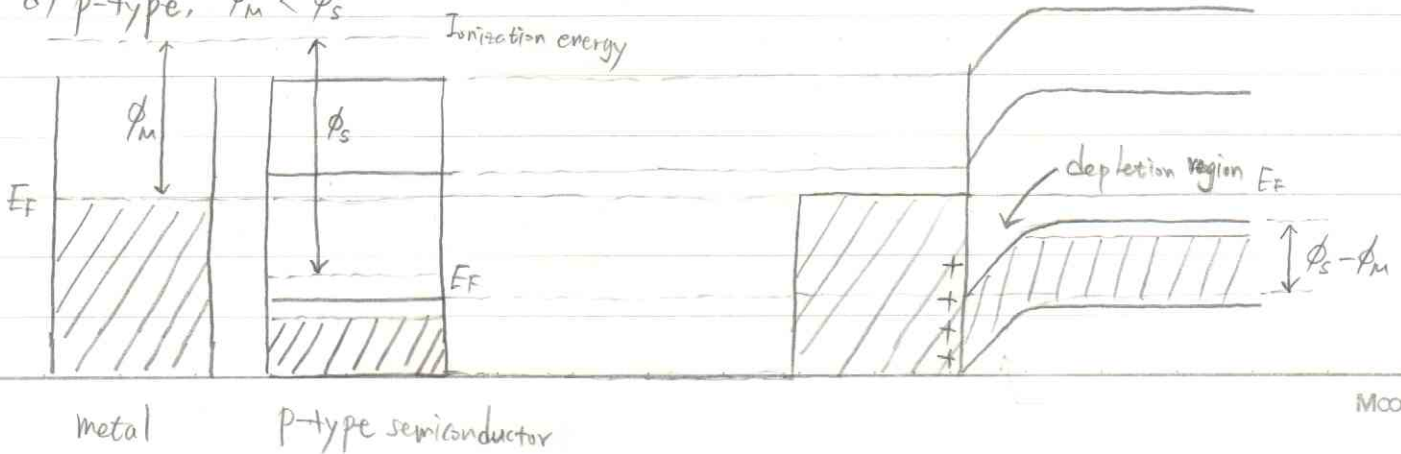
b) n-type, $\phi_m < \phi_s$



c) p-type, $\phi_m > \phi_s$



d) p-type, $\phi_m < \phi_s$



5. $I_s = A C T^2 \exp \left[- \left(\frac{\phi_n - \phi_s}{k_B T} \right) \right]$ $\phi_{silicon} : 4.7 \text{ eV}$
 $\phi_{Si} : 3.6 \text{ eV}$

$= 10^{-8} \times 10^{19} \times 300^2 \times \exp \left[- \left(\frac{4.7 - 3.6}{0.616 \times 10^{-5} \times 300} \right) \right] = 2.97 \times 10^{-3} \text{ (A)}$

$I_{net} = I_s \left[\exp \left(\frac{eV}{k_B T} \right) - 1 \right] = 2.97 \times 10^{-3} \times \left[\exp \left(\frac{1 \times 0.3}{0.616 \times 10^{-5} \times 300} \right) - 1 \right] = 3.26 \times 10^{-2} \text{ (A)}$

7. $\mu_{ion} = \frac{De^2}{k_B T} = \frac{10^{-13} \cdot 1 \cdot 1.21}{0.616 \times 10^{-5} \cdot 300} = 3.32 \times 10^{-12} \text{ (cm}^2/\text{V}\cdot\text{s)}$

Si 의 $\begin{cases} \mu_{el} = 1.5 \times 10^3 \text{ (cm}^2/\text{V}\cdot\text{s)} \\ \mu_{hole} = 4.8 \times 10^2 \text{ (cm}^2/\text{V}\cdot\text{s)} \end{cases}$ GaAs 의 $\begin{cases} \mu_{el} = 8.5 \times 10^3 \text{ (cm}^2/\text{V}\cdot\text{s)} \\ \mu_{hole} = 4 \times 10^2 \text{ (cm}^2/\text{V}\cdot\text{s)} \end{cases}$

300 K, VO_2 에서의 O^{2-} 의 mobility 는 semiconductor 에서의 electron 과 hole 의 mobility 보다 훨씬 작다. (온도 차를 감안하더라도) 이는 ion 이 electron 이나 hole 보다 질량이 훨씬 크기 때문에, (effective mass) 같은 field 하에서 같은 속도를 가지기 때문이다. \therefore mobility 가 작다.

8. $D = D_0 \exp \left(- \frac{Q}{k_B T} \right) \rightarrow \ln \frac{D}{D_0} = \frac{-Q}{k_B T} \quad \therefore Q = -k_B T \ln \frac{D}{D_0}$
 $= -0.616 \times 10^{-5} \cdot 300 \cdot \ln (10^{-10}/10^{-11}) = 0.833 \text{ (eV)}$

9. $\begin{cases} E = V/L \text{ (9.3)} \\ C = q/V \text{ (9.9)} \\ \epsilon = C/C_{vac} \text{ (9.11)} \end{cases} \quad \begin{aligned} E &= V/L = q/LC \leftarrow \text{일정한 전하량 q가 있어야,} \\ &= C_{vac} \cdot V_{vac} / L \cdot C \quad q = CV = C_{vac} \cdot V_{vac} \\ &= E_{vac} / \epsilon \end{aligned}$ \hookrightarrow equivalents for vacuum

10. $D = \epsilon \epsilon_0 E \text{ (9.14)}$
 $D = \epsilon_0 E + P \text{ (9.15)}$
 $\rightarrow \epsilon \epsilon_0 E = \epsilon_0 E + P \rightarrow P = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E$

for vacuum : $\epsilon = 1$ (교재의 notation, 일반적인 표현으로 $\epsilon_r = 1$)

$\therefore D = \epsilon_0 E, \quad P = 0$

11. Fick's first law : $J = -D \cdot dc/dx$ $\hookrightarrow d\mu_i = kT d \ln X_i = kT \frac{dX_i}{X_i}$

$\begin{cases} \text{flux } J \text{ (cm}^2/\text{s)} = C \text{ (cm}^3/\text{s)} \cdot v \text{ (m/s)} \\ v = -u \frac{d\mu_i}{dx} \end{cases} \quad \begin{aligned} J &= -C \cdot M \frac{d\mu_i}{dx} \quad (\mu_i = \mu_0 + kT \ln X_i; \text{ ideal solution}) \\ &= -C \cdot M \cdot kT \cdot \frac{dX_i}{X_i} = -MkT \cdot \frac{dc}{dc} \quad (\because C = \frac{X_i}{V_m}) \end{aligned}$

mobility of the particle $J = -D \cdot dc/dc$ 에서 $D = MkT$

$v = MF = MgE = uE \quad (u = Mg) \quad \therefore D = MkT/g \quad \therefore u = \frac{De}{kT}$
 (consider only E field) \hookrightarrow electrical mobility $(g = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$

H.W #7

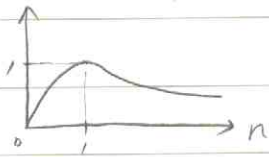
1. $R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}$ insulator에서는 빛의 damping 이 잘 일어나지 않기 때문에, $k \approx 0$ 으로 두면, $R = (n-1)^2 / (n+1)^2$ 으로 들 수 있다.

이때, $R = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2}$

또한 table 10.2 을 참고하면, 이러한 ceramic 과 polymer 의 경우 대략 1~2 사이의 n 값을 가짐을 알 수 있다. (빛의 파장에 대한 변화는 작다고 생각하자.)

R 값이 매우 작다는 것은 $4n / (n+1)^2$ 이 거의 1에 근접한 라는 것이다. 그래프도 표현해 보면,

$Y = 4n / (n+1)^2$ 와 같이 나타난다. n 이 매우 작거나 크면, Y 값은 0 ($R=1$) 에 근접한다.



ceramic 과 polymer 의 경우 1보다 약간 큰 n 값을 갖기 때문에 매우 작은 R 값을 가지게 된다.

2. IR region 에서 very high reflectivity 를 보이는 것은 metal 이다.

IR region (small frequency) : $\nu < 10^{13} (s^{-1})$ in metal, $\sigma / 2\pi\epsilon_0\nu \gg 1$,

$\therefore \sigma / 2\pi\epsilon_0 \approx 10^{17} (s^{-1})$

이때의 $|\epsilon| \approx 10$ 이라 보면, $\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0\nu} \approx \frac{10^{17}}{10^{13}} \gg \epsilon$. $\therefore n^2 \approx \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0\nu} \approx k^2$ (from (10.15) (10.16))

$\therefore R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \approx \frac{2n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} = 1 - \frac{4n}{2n^2 + 2n + 1}$ (small frequency 에서 $n \gg 1$) $\therefore 2n^2 \gg 2n + 1$

$\rightarrow R = 1 - \frac{2}{n} = 1 - 4 \sqrt{\frac{\nu\pi\epsilon_0}{\sigma}} = 1 - 4 \sqrt{\frac{\nu\pi\epsilon_0}{\sigma_0}}$ ($\sigma = \sigma_0$ (d.c. conductivity) for small frequency)

이때 σ_0 값이 분자 부분보다 상당히 크기 때문에, (metal) $R \approx 1$ 이 된다. (Hagen-Rubens relation)

3. $\begin{cases} \epsilon = n^2 - k^2 \rightarrow n^2 = k^2 + \epsilon \\ \sigma = 4\pi\epsilon_0 n k \nu \rightarrow k = \sigma / 4\pi\epsilon_0 n \nu \end{cases}$ 대입, $n^2 = \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 n \nu} \right)^2 + \epsilon$ 양변에 n^2 을 곱하면

$n^4 - \epsilon n^2 - \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \nu} \right)^2 = 0 \rightarrow n^2 = \frac{1}{2} \epsilon \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 + 4 \left(\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \nu} \right)^2}$

n 은 실수 이므로 $n^2 > 0$ 이다. $\therefore n^2 = \frac{1}{2} \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 \nu} \right)^2} \right)$ ((10.15) 와 동일)

$\therefore R = \pm \left[\frac{1}{2} \left(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 \nu} \right)^2} \right) \right]^{1/2}$

n 가 반사도, $k^2 = n^2 - \epsilon$

$$\therefore k^4 + \epsilon k^2 - \left(\frac{d}{4\pi\epsilon_0 V}\right)^2 = 0 \rightarrow k^2 = -\frac{1}{2}\epsilon \pm \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon^2 + 4\left(\frac{d}{4\pi\epsilon_0 V}\right)^2}$$

$k^2 > 0$ 이라기, $k^2 = \frac{1}{2}\left(-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{d}{2\pi\epsilon_0 V}\right)^2}\right)$ (10.16) 과 동일함

$$\therefore k = \pm \left[\frac{1}{2}\left(-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \left(\frac{d}{2\pi\epsilon_0 V}\right)^2}\right) \right]^{1/2}$$

4. $R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}$, $R_{Ag} = \frac{(0.05-1)^2 + 4.09^2}{(0.05+1)^2 + 4.09^2} = 0.989$ (Table 10.2)

flint glass : $k \ll 1$, $R_{fg} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} = \frac{(1.59-1)^2}{(1.59+1)^2} = 0.0519$

$\therefore R_{Ag} > R_{flint\ glass}$ ($\lambda = 0.6 \mu m$)

5. (10.29) $R = \frac{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} + \epsilon_1)}}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} + 1 + \sqrt{2(\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} + \epsilon_1)}}$

In the IR region, $\rightarrow \nu \approx 10^{13} (s^{-1}) \rightarrow \frac{d}{2\pi\epsilon_0} \approx 10^{19} (s^{-1})$ for metals.

이러기

$|\epsilon_1| \approx 10$ 이라 보면, $\epsilon_2 = \frac{d}{2\pi\epsilon_0 \nu} \approx \frac{10^{19}}{10^{13}} \gg |\epsilon_1|$ $\therefore \epsilon_2^2 \gg \epsilon_1^2$

$$\therefore R \approx \frac{\epsilon_2 + 1 - \sqrt{2(\epsilon_2 + \epsilon_1)}}{\epsilon_2 + 1 + \sqrt{2(\epsilon_2 + \epsilon_1)}} \approx \frac{\epsilon_2 + 1 - \sqrt{2\epsilon_2}}{\epsilon_2 + 1 + \sqrt{2\epsilon_2}} = 1 - \frac{+2\sqrt{2\epsilon_2}}{\epsilon_2 + 1 + \sqrt{2\epsilon_2}}$$

$$= 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon_2 + \frac{1}{\epsilon_2}} + \sqrt{2}} \approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon_2}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{d}{2\pi\epsilon_0 \nu}}} = 1 - 4\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 \nu}{d}}$$

(Hagen-Rubens Relation)

for small frequencies $d = d_0$ (d.c. conductivity)

6. $\lambda = 589 nm$, $d = 1 cm$, $T = 89\% \rightarrow \frac{d}{\lambda}$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{2\omega k}{c} z\right), \quad T = \frac{I(d=1cm)}{I_0} = \exp\left(-\frac{2\omega k}{c} \cdot d\right) = 0.89$$

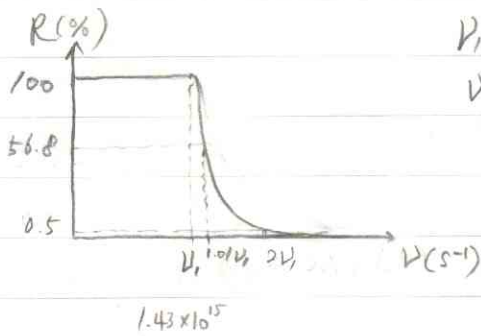
$$T\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{I\left(\frac{d}{2}\right)}{I_0} = \exp\left(-\frac{2\omega k}{c} \cdot \frac{d}{2}\right) = (0.89)^{1/2} = 0.943 = 94.3\%$$

7. Free electrons without damping

$$\hat{n}^2 = 1 - \frac{e^2 N_f}{4\pi^2 \epsilon_0 m \nu^2} \rightarrow \nu_1^2 = \frac{e^2 N_f}{4\pi^2 \epsilon_0 m} \quad (N_f: \text{free electrons/cm}^3)$$

$$\nu > \nu_1 : \hat{n}^2 > 0 \rightarrow \hat{n} : \text{real} \rightarrow k=0 \quad R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

$$\nu < \nu_1 : \hat{n}^2 < 0 \rightarrow \hat{n} : \text{pure imaginary} \rightarrow n=0 \quad R = \frac{1+k^2}{1-k^2} = 1$$



$\nu_1 = 14.3 \times 10^{14} /s$ for Na

$$\nu > \nu_1 \text{ 일 때, } \hat{n}^2 = n^2 = 1 - \frac{\nu_1^2}{\nu^2}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{1}{(\nu/\nu_1)^2}}$$

ν/ν_1	n	R
1	0	1
1.01	0.140	0.568
1.1	0.417	0.190
1.5	0.745	0.021
2	0.866	0.005

ν 이 증가함에 따라 R 은 급격히 0으로 수렴한다.

8. metal, small frequency $< 10^{13} (s^{-1}) \rightarrow$ Hagen-Rubens relation. 저주파수

$$R = 1 - 4 \sqrt{\frac{\nu}{\sigma_0}} \pi \epsilon_0 \quad \text{gold: } \rho_0 = 2.35 \mu\Omega \cdot \text{cm} = 2.35 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \rightarrow \sigma_0 = 4.255 \times 10^7 (\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$$

$$R = 1 - 4 \sqrt{\frac{9 \times 10^{12}}{4.255 \times 10^7}} \pi \cdot 8.854 \times 10^{-12} = 0.9903 \quad \therefore R = 99.03\%$$

pure metal 에서 주파수가 증가하면 일반적으로 σ_0 이 작아진다. 따라서 주파수가 증가함에 따라 reflectivity 는 감소하게 된다.

9. index of refraction : 빛이 medium 을 지난 때 굴절되는 정도. medium 에서의 빛의 속력 (phase velocity) 에 관한 정보도 제공한다.

damping constant : 빛이 medium 을 지난 때 amplitude 가 감소하는 정도를 알려주는 parameter.

$$\hat{\epsilon} = \hat{n}^2 = n^2 - k^2 - 2nki = \epsilon_1 - i\epsilon_2 \quad \text{아는 set of parameters 로 } \epsilon_1, \epsilon_2 \text{ 가 있다}$$

ϵ_1 (우리가 $C = \epsilon \epsilon_0 A/d$ 에서 계산할 때 사용하는 유전상수)

ϵ_2 : absorption (전위장에 의해 한 방향 흐름은 다른 방향 등으로 인의 흐름에 의해 dipole 등이 배향될 때 유전체에서의 에너지 손실을 나타냄)

from Maxwell Equation

이들이 "sets" of parameter 인 이유는, 이들이 파동 방정식에서 얻어지는 상수의 상수 부분과 허수 부분이 되기 때문이다. 따라서 이들은 항상 하나의 set 가 되고, 이를 이용해 다른 여러 optical constant 등을 표현할 수 있다.

$$10. \quad 11.45 \quad \epsilon_1 = 1 + \frac{e^2 m N_a (V_0^2 - V^2)}{\epsilon_0 [4\pi^2 m^2 (V_0^2 - V^2)^2 + \gamma'^2 V^2]} \quad 11.46 \quad \epsilon_2 = \frac{e^2 N_a \gamma' V}{2\pi \epsilon_0 [4\pi^2 m^2 (V_0^2 - V^2)^2 + \gamma'^2 V^2]}$$

$$V_0 \rightarrow 0 \quad \epsilon_1 = 1 + \frac{e^2 m N_a (-V^2)}{\epsilon_0 [4\pi^2 m^2 (+V^2)^2 + \gamma'^2 V^2]} = 1 - \frac{e^2 N_a / 4\pi^2 \epsilon_0 m^2}{V^2 + \gamma'^2 / 4\pi^2 m^2} \quad (N_a = N_f) \text{ one oscillator per atom}$$

$$\gamma = \gamma' = \frac{N_f e^2}{\sigma_0} \quad \left(\frac{\gamma'}{2\pi m} = \frac{N_f e^2}{2\pi \sigma_0 m} = \frac{V_1^2 \cdot 2\pi \epsilon_0}{\sigma_0} \right)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{e^2 N_f}{4\pi^2 \epsilon_0 m}} \quad = 1 - \frac{V_1^2}{V^2 + \gamma'^2 / 4\pi^2 m^2} = V_2$$

$$V_2 = \frac{2\pi \epsilon_0 V_1^2}{\sigma_0}$$

$$\epsilon_2 = \frac{e^2 N_a \gamma' V}{2\pi \epsilon_0 [4\pi^2 m^2 (V^2)^2 + \gamma'^2 V^2]} = \frac{\gamma'}{V} \cdot \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{e^2 N_a}{(4\pi^2 m^2 V^2 + \gamma'^2)} = \frac{\gamma'}{V} \cdot \frac{1}{2\pi \epsilon_0 m} \cdot \frac{e^2 N_a / 4\pi^2 \epsilon_0 m}{V^2 / \epsilon_0 + \gamma'^2 / 4\pi^2 \epsilon_0 m^2}$$

$$= \frac{\gamma'}{2\pi m V} \cdot \frac{V_1^2}{V^2 + \gamma'^2 / 4\pi^2 m^2} = \frac{V_2}{V} \cdot \frac{V_1^2}{V^2 + V_2^2}$$

11. (a) A: metal (high reflectivity in IR region, intraband transition)

B: semiconductor (Low reflectivity in IR region, band gap 존재)

(b) A: 100% 투과시키는 에너지 영역이 없다.

B: IR region ($E < 1.5 \text{ eV}$)

(c) A: 1.5 eV (weak), 3.0 eV (strong) \rightarrow see Fig. 12.3

B: 1.5 eV (Band gap)

(d) intraband transition 이 일어날 수 있는 물질은 A 이다. (in IR region)

이는 metal 의 경우 conduction band 에 비어있는 부분이 항상 존재하기 때문에 낮은 energy (IR) 도 band 내에서 transition 이 가능하다.

(e) 전자가 threshold energy 이상을 제공 받으면 interband transition 이 가능해진다.

따라서 intraband transition 의 경우 낮은 에너지 (IR) 영역에서 관찰된다.

H.W # 8

1. $H = \frac{I_n}{L} = 2 \times \frac{1000}{0.1} = 2 \times 10^4 \text{ A/m}$

$1 \text{ A/m} = \frac{4\pi}{1000} \text{ Oe} \quad \therefore 2 \times 10^4 \text{ A/m} = \frac{2 \times 10^4 \times 4\pi}{1000} = 80\pi = 251.3 \text{ Oe}$

2. $\chi_{dia} = - \frac{e^2 Z^2 F^2 \mu_0}{6m} \cdot \frac{N_0 \rho}{W} \quad \left(\begin{array}{l} N_0 : \text{Avogadro Number, } W : \text{atomic mass} \\ \rho : \text{density, } Z : \text{atomic number} \end{array} \right)$

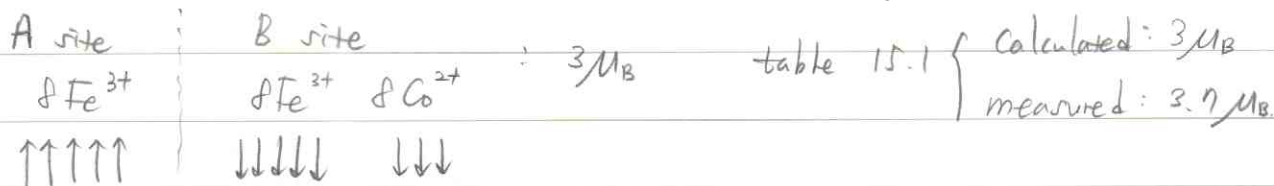
for Ge. $\chi = \frac{-(1.6 \times 10^{-19})^2 \times 32 \times (0.92 \times 10^{-10})^2 \cdot 1.257 \times 10^{-6}}{6 \times 9.11 \times 10^{-31}} \times \frac{6.022 \times 10^{23} \times 5.325 \times 10^3}{72.64 \times 10^{-3}}$
 $= -7.04 \times 10^{-5}$ (table 14.1 의 값 : -7.11×10^{-5} , 거의 동일하다.)

unit check! : $\frac{(C/\text{electron})^2 \cdot (\text{electrons/atom}) \cdot m^2 \cdot V \cdot S / A \cdot m \cdot (\text{atoms/mol}) \cdot kg/m^3}{kg/\text{electron} \cdot kg/\text{mol}}$
 $= \frac{C^2 \cdot m^2 \cdot V \cdot S / A \cdot m}{kg} \cdot \frac{\text{mol}^2 \cdot kg/m^3}{kg/\text{mol}} = \frac{(A \cdot S)^2 \cdot V \cdot S}{kg \cdot A \cdot m^2} = \frac{V \cdot A \cdot S}{kg \cdot m^2/s} = \frac{J}{J} = 1 \text{ (unitless)}$

3. iron ferrite : $FeO \cdot Fe_2O_3$ (Fe_3O_4) : inverse spinel



cobalt ferrite : $CoO \cdot Fe_2O_3$ ($CoFe_2O_4$) : inverse spinel



계산이 의한 것과 실험적으로 측정된 값의 차이는 각 물질이 완벽히 inverse spinel 구조를 가지는 것이 아니라, 일부 Fe^{2+} , Co^{2+} ion 이 A site 에 존재하게 되며, 또한 자외 orbital 이 magnetic moment 에 일부 기여하기 때문이다.

4. Table 15.1, M_{SD} (A/m)

Fe 1.75×10^6

Co 1.45×10^6

Ni 0.51×10^6

Gd 5.66×10^6

Table 16.1 μ_m at 0K

Fe $2.22 \mu_B$

Co $1.72 \mu_B$

Ni $0.60 \mu_B$

Gd $7.12 \mu_B$

$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ (A} \cdot \text{m}^2)$

$M = \frac{\mu_m \text{ (원자 자화량 moment)}}{V \text{ (원자 하나당 부피)}}$

$V = \frac{W \text{ (atomic mass)}}{\delta \text{ (density)} \cdot N_0 \text{ (Avogadro's Number)}}$

$\therefore \mu_m = MV = \frac{MW}{\delta N_0}$ 이 식을 이용해서 각각은 conversion 하면,

$\mu_m(\text{Fe}) = \frac{1.75 \times 10^6 \times 55.847 \times 10^{-3}}{7.88 \times 10^3 \times 6.022 \times 10^{23}} = 2.065 \times 10^{-23} \text{ (A} \cdot \text{m}^2) = 2.226 \mu_B$

$\mu_m(\text{Co}) = \frac{1.45 \times 10^6 \times 58.933 \times 10^{-3}}{8.92 \times 10^3 \times 6.022 \times 10^{23}} = 1.591 \times 10^{-23} \text{ (A} \cdot \text{m}^2) = 1.725 \mu_B$

$\mu_m(\text{Ni}) = \frac{0.51 \times 10^6 \times 58.693 \times 10^{-3}}{8.90 \times 10^3 \times 6.022 \times 10^{23}} = 5.585 \times 10^{-24} \text{ (A} \cdot \text{m}^2) = 0.602 \mu_B$

$\mu_m(\text{Gd}) = \frac{5.66 \times 10^6 \times 157.25 \times 10^{-3}}{7.90 \times 10^3 \times 6.022 \times 10^{23}} = 1.871 \times 10^{-22} \text{ (A} \cdot \text{m}^2) = 20.17 \mu_B$

Fe, Co, Ni 은 이러한 계산에 의해 주어진 값과 거의 일치함을 안 수 있다. 이는 각각 하나의 원자가 가지고 있는 spin moment 의 총합이 실제 재료가 가지고 있는 전체 magnetic moment 인 것으로, 각 전자가 특정 원자에 구속되지 않고 free electron 과 유사하게 움직이는 3d band 문질에 적합하다. 하지만 Gd 의 자성 특성은 4f electron 에 의해 발생되는데, 4f electron 은 3d electron 에 비해 원자에 더 구속되어 있어 (localized) spin 이외에도 전자의 orbital 등이 전체 magnetic moment 에 영향을 끼친다 따라서 Gd 의 경우 오차가 발생한다.

d-band filling 을 보면, Hund's rule 에 따라 전자는 unpaired spin 이 최대가 되도록 존재함을 알 수 있다. 즉 Fe 의 경우, 먼저 5개의 up spin 존재 \rightarrow 5-2.22 개의 down spin 채워짐으로 생각 할 수 있다. (Co 의 경우도 같은 방법으로)

$\therefore \text{Fe} : 5 + 5 - 2.22 = 7.78$ (Fe : $[\text{Ar}] 3d^6 4s^2 \rightarrow (3d+4s)$ electron 의 대부분이)
 $\text{Co} : 5 + 5 - 1.72 = 8.28$ (Co : $[\text{Ar}] 3d^7 4s^2$ 3d band 에 존재한다)

5. 앞에서 구한 값에 의해, (table 16.1)

$$\left(\begin{array}{l} \mu_m(\text{Fe}) = 2.226 \mu_B \rightarrow 2.22 \mu_B \\ \mu_m(\text{Co}) = 1.175 \mu_B \rightarrow 1.17 \mu_B \end{array} \right. \text{ (거리 비슷함) } \Big) \text{ crystalline solid 의 경우}$$

iron or cobalt atom 의 경우 (독립된 원자) Bohr magneton 은 가지지 않는다
이는 iron, cobalt 각각 원자끼리의 상호 작용을 통해 magnetic moment 을 발생시키기 때문이다.

iron ferrite : $4 \mu_B$ (calculated), $4.1 \mu_B$ (measured)

cobalt ferrite : $3 \mu_B$ (calculated), $3.7 \mu_B$ (measured)

↑ 3번에서 구한 방법에 의해.