

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

Project 2: One-D, P3 Code

2008-21138 Bae Moo Hoon

A. Methodology

plane geometry에서 1-D Boltzmann transport equation은 다음과 같이 정의된다.

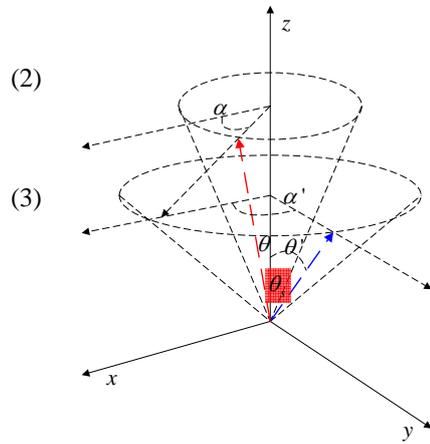
$$\mu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} + \Sigma_t \phi = \frac{1}{4\pi} \chi \psi + \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(z, E' \rightarrow E, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}) \phi(z, E', \hat{\Omega}') dE' d\hat{\Omega}' \quad (1)$$

angular flux와 scattering xs를 L차까지 Legendre expansion하여 정의하면 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\phi(z, E, \hat{\Omega}) = \sum_{l=0}^L \phi_l(z, E) \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \quad (2)$$

$$\Sigma(z, E' \rightarrow E, \mu_s) = \sum_{l=0}^L \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu_s) \quad (3)$$

$$\text{where, } \mu_s = \mu_s(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') = \mu_s(\mu, \mu', \alpha, \alpha')$$



식 (2)와 (3)을 식 (1)에 대입한 후 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) + \Sigma_t \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \right) \\ &= \frac{\chi}{4\pi} \psi + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) P_l(\mu_s) \right) \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E') P_l(\mu') \right) d\alpha' d\mu' dE' \end{aligned} \quad (4)$$

scattering 후, 입자 사이의 각도 μ_s 는 Addition theorem에 의해서 μ, μ' 로 표현할 수 있다. 그 결과는 다음과 같다.

$$P_l(\mu_s) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \tilde{P}_l^m(\mu) \cdot \tilde{P}_l^m(\mu') \cos m(\alpha - \alpha') \quad (5)$$

$$\text{where, } \tilde{P}_l^m(\mu) = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m}; m \leq l$$

식 (5)를 식 (4)의 scattering source term에 대입하여 정리하면 scattering source는 간단한 형태로 표현

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=0}^L \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu_s) \right) \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \right) d\alpha' d\mu' \\ &= \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \phi_l(z, E') P_l(\mu) \end{aligned} \quad (6)$$

위와 같이 angular flux를 Legendre expansion과 addition theorem을 사용하여 정리하면, 다음과 같이 형태의 1-D B.T.E를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) + \Sigma_t \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \right) \\ &= \frac{\chi}{4\pi} \psi + \int_0^\infty \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) P_l(\mu) \phi_l(z, E') dE' \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)의 양변을 $2\pi \int_{-1}^1 P_n(\mu) d\mu$ 로 적분하면, 각에 대한 의존성과 분모의 4π 를 제거할 수 있다.

또한 energy를 multi-group으로 분할하여 적분하면, energy에 대한 의존성을 없앨 수 있다.

이와 같은 과정으로 식 (7)의 각각 term을 정리하면 다음과 같다.

- Total reaction term

$$2\pi \int_{-1}^1 \Sigma_t(z, E) \left(\sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l(z, E) P_l(\mu) \right) P_n(\mu) d\mu = \Sigma_t(z, E) \phi_n(z, E) \quad (8)$$

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(z, E) \phi_n(z, E) dE = \bar{\Sigma}_t(z) \cdot \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi_n(z, E) dE = \Sigma_{mg} \phi_{n,g} \quad (9)$$

$$\text{where, } \bar{\Sigma}_t(z) = \frac{1}{\phi_{n,g}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_t(z, E) \phi_n(z, E) dE = \Sigma_{mg}$$

- Fission source term

$$2\pi \int_{-1}^1 \frac{\chi}{4\pi} \psi P_n(\mu) d\mu = \delta_{on} \chi(E) \psi(z) \quad (10)$$

$$\delta_{on} \chi_g \psi(z) \quad (11)$$

- Scattering source term

$$2\pi \int_{-1}^1 \int_0^\infty \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l(z, E' \rightarrow E) \phi_l(z, E') P_l(\mu) dE' P_n(\mu) d\mu = \int_0^\infty \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) \phi_n(z, E') dE' \quad (12)$$

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} \int_0^\infty \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) \phi_n(z, E') dE' dE = \int_0^\infty \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) dE \phi_n(z, E') dE'$$

$$= \sum_{g'=1}^G \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) dE \phi_n(z, E') dE' = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{ng'g} \phi_{ng'}$$
(13)

where, $\Sigma_{ng'g} = \frac{1}{\phi_{ng'}} \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_n(z, E' \rightarrow E) dE \phi_n(z, E') dE'$

- Leakage term

$$2\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \mu \phi_l(z, E) P_l(\mu) \right) P_n(\mu) d\mu$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{l=0}^L \frac{1}{4\pi} ((l+1)P_{l+1}(\mu) + lP_{l-1}(\mu)) \phi_l(z, E) \right) \cdot P_n(\mu) d\mu$$
(14)

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{-1}^1 n P_n^2(\mu) \phi_{n-1}(z, E) d\mu + \int_{-1}^1 (n+1) P_n^2(\mu) \phi_{n+1}(z, E) d\mu \right]$$

$$= \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n-1}(z, E) + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \phi_{n+1}(z, E)$$

$$\frac{n}{2n+1} \frac{\partial \phi_{n-1,g}}{\partial z} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial \phi_{n+1,g}}{\partial z}$$
(15)

위와 같은 과정의 최종 결과로 다음과 같은 multi-group P_L equation 얻을 수 있다.

$$\frac{n}{2n+1} \frac{\partial \phi_{n-1,g}}{\partial z} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial \phi_{n+1,g}}{\partial z} + \Sigma_{mg} \phi_{ng} = \delta_{0ng} \chi_g \psi + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{ng'g} \phi_{ng'}$$

where, $n = 0, \dots, L$
 $g = 1, \dots, G$

(16)

위의 식의 좌변을 matrix form으로 표현하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{n-1}{2n-1} \frac{\partial}{\partial z} & \Sigma_{m-1g} & \frac{n-1}{2n-1} \frac{\partial}{\partial z} \\ & \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} & \Sigma_{mg} & \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \\ & & \frac{n+1}{2n-3} \frac{\partial}{\partial z} & \Sigma_{m+1g} & \frac{n+2}{2n+3} \frac{\partial}{\partial z} \\ & & & \ddots & \end{array} \right] \begin{array}{l} \dots\dots\dots (a) \\ \dots\dots\dots (b) \\ \dots\dots\dots (c) \end{array}$$
(17)

홀수 n-th equation에 있는 홀수 n-th moment에 대한 의존성을 제거하면 짝수 n-th equation만으로 으

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

로 multi-group P_L equation을 표현할 수 있다. 예를 들어 식 (17)의 식 (b)에서 첫번째 항과 세번째 항을 소거하면 홀수 n-th moment에 대한 의존성을 없앨 수가 있다.

우선, (b) $-\frac{1}{\Sigma_{m-1g}} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \times (a)$ 를 하면 (b)의 첫번째 항을 제거할 수 있다. 그 결과로 0-th가

moment의 coefficient에 $-\frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Sigma_{m-1g}} \frac{n-1}{2n-1} \frac{\partial}{\partial z}$ 항이 추가된다. 마찬가지로 방법으로

(b) $-\frac{1}{\Sigma_{m+1g}} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \times (c)$ 를 하면 (b)의 세번째 항을 제거할 수 있고, 그 결과로 2nd moment의

coefficient에 $-\frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Sigma_{m+1g}} \frac{n+2}{2n+3} \frac{\partial}{\partial z}$ 항이 추가된다. 짝수 n-th equation으로 표현된 multi-group

P_L equation의 matrix form은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} d_0 & -u_0 & & & \\ -l_2 & d_2 & -u_2 & & \\ & -l_n & d_n & -u_n & \\ & & -l_{L-1} & d_{L-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0g} \\ \phi_{2g} \\ \phi_{ng} \\ \phi_{L-1g} \end{bmatrix}$$

$$\text{where, } d_{ng} = \Sigma_{mg} - \left(\frac{n^2}{(2n+1)(n-1)} \frac{\partial}{\partial z} D_{n-1g} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} D_{n+1g} \right)$$

$$l_{ng} = \frac{n}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} D_{n-1g} \quad \leftarrow D_{n-1} = \frac{1}{\Sigma_{m-1g}} \frac{n-1}{2n-1} \frac{\partial}{\partial z} \quad (18)$$

$$u_{ng} = \frac{n+2}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z} D_{n+1g} \quad \leftarrow D_{n+1} = \frac{1}{\Sigma_{m+1g}} \frac{n+2}{2n+1} \frac{\partial}{\partial z}$$

일반적인 1-D P_3 equation의 matrix form은 다음과 같다.

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{t0g} & \frac{d}{dx} \\ \frac{1}{3} \frac{d}{dx} & \Sigma_{t1g} & \frac{2}{3} \frac{d}{dx} \\ & \frac{2}{5} \frac{d}{dx} & \Sigma_{t2g} & \frac{3}{5} \frac{d}{dx} \\ & & \frac{3}{7} \frac{d}{dx} & \Sigma_{t3g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0g} \\ \phi_{1g} \\ \phi_{2g} \\ \phi_{3g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi} \chi_g \psi + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(0)} \phi_{0g} \\ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(1)} \phi_{0g} \\ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(2)} \phi_{0g} \\ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g}^{(3)} \phi_{0g} \end{bmatrix} \quad (19)$$

다음과 같은 가정을 통해서 P_3 equation를 간편화할 수 있다.

1. $\Sigma_{irgg} = \Sigma_{t0g} = \Sigma_{tg}$
2. P_1 scattering : $\Sigma_{g'g}^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 0$
3. Inconsistent P_1 : $\sum_{g'=1}^G \Sigma_{1gg'} \phi_g = \Sigma_{sg}^{(1)} \phi_g$
4. Transport Correction : $\Sigma_{irg} = \Sigma_{tg} - \Sigma_{sg}^{(1)}, D_{0g} = \frac{1}{3\Sigma_{irg}}$

위의 가정을 통해서 식 (19)의 두번째 식은 다음과 같이 간단히 정리할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{d\phi_{0g}}{dx} + \Sigma_{tg} \phi_{1g} + \frac{2}{3} \frac{d\phi_{2g}}{dx} &= \Sigma_{sg}^{(1)} \phi_{1g} \\ \frac{1}{3} \frac{d\phi_{0g}}{dx} + \Sigma_{irg} \phi_{1g} + \frac{2}{3} \frac{d\phi_{2g}}{dx} &= 0 \\ D_{0g} \frac{d\phi_{0g}}{dx} + \phi_{1g} + 2D_{0g} \frac{d\phi_{2g}}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$\phi_{1g} \rightarrow J_{0g}, \phi_{1g} \rightarrow J_{0g}, D_{2g} = \frac{3}{7\Sigma_{tg}}$ 로 표시하면 식 (19)는 다음과 같이 더욱 간단한 형태로 정리
가 된다.

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{rg} & \frac{d}{dx} \\ D_{0g} \frac{d}{dx} & 1 & 2D_{0g} \frac{d}{dx} \\ & \frac{2}{5} \frac{d}{dx} & \Sigma_{ig} & \frac{3}{5} \frac{d}{dx} \\ & & D_{2g} \frac{d}{dx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0g} \\ J_{0g} \\ \phi_{2g} \\ J_{2g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

where, $q_0 = \frac{1}{4\pi} \chi_g \psi + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{g'g} \phi_{0g}$

$$\Sigma_{rg} = \Sigma_{ig} - \Sigma_{gg}$$

식 (18)과 같이 홀수 n-th equation을 제거하면 식 (21)은 최종적으로 2 by 2 matrix로 간편화된 형태의 matrix form을 얻을 수가 있다.

$$\begin{bmatrix} -\Sigma_{D0} D_\xi^2 + \Sigma_r & -2\Sigma_r \\ -\frac{2}{3} \Sigma_r & -\Sigma_{D2} D_\xi^2 + \frac{4}{3} \Sigma_r + \frac{5}{3} \Sigma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_0(\xi) \\ \phi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(\xi) \\ -\frac{2}{3} q_0(\xi) \end{bmatrix} \quad (22)$$

where, $\beta_m = \frac{D_m}{h}$, $\Sigma_{Dm} = \frac{D_m}{h^2}$, $D_\xi^2 = h_2 \frac{d^2}{dx^2}$

$$\hat{\phi}_0(\xi) = \phi_0(\xi) + 2\phi_2(\xi)$$

위의 식에서 나타나는 2계 미분항은 FDM을 이용해서 풀 수가 있다. 식 (22)에 FDM을 적용하기 위해서 유도를 한 과정은 다음과 같다.

우선 m-th subregion에 대한 적분은 다음과 같이 할 수 있다.

$$-D_{gm} \frac{\partial \hat{\phi}_g}{\partial z} \Big|_{z_m^l}^{z_m^r} + \Sigma_{rg} \bar{\phi}_g h_m - 2\Sigma_{rg} \bar{\phi}_g^{(2)} h_m = q_{gm} h_m$$

where, $h_m = z_m - z_{m-1}$ (23)

$$\bar{\phi}_g = \frac{1}{h_m} \int_{z_{m-1}}^{z_m} \hat{\phi}_g(z) dz$$

$$\bar{\phi}_g^{(2)} = \frac{1}{h_m} \int_{z_{m-1}}^{z_m} \phi_g^{(2)}(z) dz$$

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

$$-D_{gm} \left. \frac{\partial \hat{\phi}_g}{\partial z} \right|_{z_{m-1}}^{z_m} = J_m^r - J_m^l \quad (24)$$

$$J_m^r = -D_m \frac{\hat{\phi}_{gmr} - \bar{\phi}_{gm}}{\frac{1}{2} h_m} = -D_{m+1} \frac{\bar{\phi}_{gm+1} - \hat{\phi}_{gmr}}{\frac{1}{2} h_{m+1}} \quad (25)$$

where, $\hat{\phi}_{gmr}$ = right surface flux of m-th subregion

$$\hat{\phi}_{gmr} = \frac{\beta_{gm+1} \bar{\phi}_{gm+1} + \beta_{gm} \bar{\phi}_{gm}}{\beta_{gm} + \beta_{gm+1}} \quad (26)$$

$$\text{where, } \beta_{gm} = \frac{D_{gm}}{h_m} : \text{relative diffusivity}$$

current는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} J_m^r &= -2\beta_m (\hat{\phi}_{gmr} - \bar{\phi}_{gm}) = -2 \frac{\beta_m \beta_{m+1}}{\beta_m + \beta_{m+1}} (\bar{\phi}_{gm+1} - \bar{\phi}_{gm}) = \tilde{D}_{gm} (\bar{\phi}_{gm} - \bar{\phi}_{gm+1}) \\ J_m^l &= \tilde{D}_{gm-1} (\bar{\phi}_{gm-1} - \bar{\phi}_{gm}) \\ \text{where, } \tilde{D}_{gm} &= 2 \frac{\beta_m \beta_{m+1}}{\beta_m + \beta_{m+1}} \end{aligned} \quad (27)$$

위에서 정의한 식들을 식 (22)에 대입하면 다음과 같은 식과 matrix form을 얻을 수가 있다.

$$\tilde{D}_{gm} (\bar{\phi}_{gm} - \bar{\phi}_{gm+1}) - \tilde{D}_{gm-1} (\bar{\phi}_{gm-1} - \bar{\phi}_{gm}) + \sum_{rg} \bar{\phi}_g h_m - 2 \sum_{rg} \phi_g^{(2)} h_m = q_{gm} h_m \quad (28)$$

$$-\frac{2}{3} \sum_{rg} \bar{\phi}_g h_m + \tilde{D}_{gm}^{(2)} (\bar{\phi}_{gm}^{(2)} - \bar{\phi}_{gm+1}^{(2)}) - \tilde{D}_{gm-1}^{(2)} (\bar{\phi}_{gm-1}^{(2)} - \bar{\phi}_{gm}^{(2)}) + \tilde{\Sigma}_{trg} \bar{\phi}_g^{(2)} h_m = -\frac{2}{3} q_g h_m \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{D}_{gm-1} & 0 \\ 0 & -\tilde{D}_{gm-1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_{gm-1} + \tilde{D}_{gm} + \sum_{rg} h_m & -2 \sum_{rg} h_m \\ -\frac{2}{3} \sum_{rg} h_m & \tilde{D}_{gm-1}^{(2)} + \tilde{D}_{gm}^{(2)} + \tilde{\Sigma}_{trg} h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{D}_{gm} & 0 \\ 0 & -\tilde{D}_{gm}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{gm-1} \\ \bar{\phi}_{gm-1}^{(2)} \\ \bar{\phi}_{gm} \\ \bar{\phi}_{gm}^{(2)} \\ \bar{\phi}_{gm+1} \\ \bar{\phi}_{gm+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{gm-1} \\ -\frac{2}{3} q_{gm-1} \\ q_{gm} \\ -\frac{2}{3} q_{gm} \\ q_{gm+1} \\ -\frac{2}{3} q_{gm+1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

m-th subregion에 적용된 식 (30)을 모든 영역에 적용을 하면 block tri-diagonal matrix을 얻을 수가 있다.

경계에서의 matrix form은 다음과 같이 수정될 수가 있다.

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

우선 왼쪽 경계가 반사 조건이라고 가정을 하면, 경계에서의 current는 0이므로 다음과 같은 matrix form을 얻을 수가 있다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_{g1} + \Sigma_{rg} h_1 & -2\Sigma_{rg} h_1 \\ -\frac{2}{3}\Sigma_{rg} h_1 & \tilde{D}_{gm}^{(2)} + \tilde{\Sigma}_{rg} h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{D}_{g1} & 0 \\ 0 & -\tilde{D}_{g1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{g1} \\ \bar{\phi}_{g1}^{(2)} \\ \bar{\phi}_{g2} \\ \bar{\phi}_{g2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{g1} \\ -\frac{2}{3}q_{g1} \\ q_{g2} \\ -\frac{2}{3}q_{g2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

또한 오른쪽 경계가 vacuum 조건이라고 가정을 하면, net current와 flux를 통해서 partial current를 구하여 이를 반영하여야 한다. partial incoming current는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_0^{in} = \int_{-1}^0 P_1(\mu)\varphi(\mu)d\mu$$

$$J_2^{in} = \int_{-1}^0 P_3(\mu)\varphi(\mu)d\mu \quad (32)$$

$$\text{where, } \varphi(\mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \phi_l P_l(\mu)$$

$$L=3, \quad J_0^{in} = -\frac{J_0}{2} + \frac{\phi_0}{4} + \frac{5\phi_2}{16} \quad (33)$$

$$J_2^{in} = -\frac{J_2}{2} - \frac{\phi_0}{16} + \frac{5\phi_2}{16}$$

vacuum 경계의 경우, incoming current가 0이므로 쉽게 net current를 구할 수가 있다.

$$J_0 = \frac{\phi_0}{4} + \frac{5\phi_2}{16} \quad (34)$$

$$J_2 = -\frac{\phi_0}{16} + \frac{5\phi_2}{16}$$

식 (34)에서 $\phi_0 = \hat{\phi} - 2\phi_2$ 로 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$J_0 = \frac{\hat{\phi}}{4} - \frac{3\phi_2}{16} \quad (35)$$

$$J_2 = -\frac{\hat{\phi}}{16} + \frac{7\phi_2}{16}$$

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

최종적으로 오른쪽 vacuum 경계 조건에 의한 matrix form은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\tilde{D}_{gm-1} & 0 \\ 0 & -\tilde{D}_{gm-1}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}_{gm-1} + \Sigma_{rg} h_m + \frac{1}{2} & -2\Sigma_{rg} h_m - \frac{3}{8} \\ -\frac{2}{3}\Sigma_{rg} h_m - \frac{1}{8} & \tilde{D}_{gm-1}^{(2)} + \tilde{\Sigma}_{rg} h_m + \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{gm-1} \\ \bar{\phi}_{gm-1}^{(2)} \\ \bar{\phi}_{gm} \\ \bar{\phi}_{gm}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{gm-1} \\ -\frac{2}{3}q_{gm-1} \\ q_{gm} \\ -\frac{2}{3}q_{gm} \end{bmatrix} \quad (37)$$

B. Code and Result

1. Modify the input processing routine to define the additional second order diffusion coefficient which requires the *total* cross section. Modify the linear system setup routine such the 2x2 matrix .

- Input processing

$D_{2g} = \frac{3}{7\Sigma_{rg}}$ 와 같이 정의되는 2nd order diffusion coefficient를 결정하기 위해서는 우선 total xs를

결정하여야 한다. total xs는 $\Sigma_{rg} = \Sigma_{rg} + \Sigma_{sg}$ 와 같이 정의되므로, 이 과정을 수행한 후 2nd order diffusion coefficient를 결정하여 저장한다. self scattering에 의한 source term을 제거하기 위해서 self scattering xs을 0으로 저장하여 준다.

- Linear system

Linear system을 setup하기 위해서 각 subregion에 대한 node size와 균정수를 초기화하여 준다.

이 값들을 사용하여 $\beta_m = \frac{D_m}{h}$, $\Sigma_{Dm} = \frac{D_m}{h^2}$ 를 결정하여 저장한다. FDM 사용하여 2계 미분항을 풀기 위해서는 식 (30)과 같이 2 by 2 matrix가 tri-diagonal 형태로 나타나는 linear system을 구축해야 한다. i-th upper diagonal term과 (i+1)-th lower diagonal term이 같으므로, 변수 ccz에 upper diagonal term을 저장하여 메모리를 절감할 수 있다.

2. Write a LU factorization routine for a block tridiagonal matrix. The block size is 2x2. Write also the forward and backward substitution routine to the block LU factors in solving the block tridiagonal linear system. Establish the outer iteration scheme with the solution obtained from the LU solver.

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

- Block LU factorization & forward and backward substitution

Block tri-diagonal matrix에서 2 by 2 matrix로 이루어진 block을 풀기 위해 matrix 곱과 inverse matrix를 계산하는 루틴을 함수화하여 놓으면, 기타 과정은 tri-diagonal matrix를 푸는 방법과 같다. 다른 점은 성분의 곱과 나누기가 matrix 곱과 inverse matrix로 계산되는 것이다. 2 by 2 matrix의 성분은 1,2,3,4의 index(idir)로 저장하였다.

Forward and backward substitution 역시 tri-diagonal matrix를 푸는 과정과 유사하다. 단지, 성분의 곱이 2x2 matrix 와 2x1 matrix의 곱으로 수행되는 점이 다르다.

! LU factorization

```
do i=1,nx
  do idir=1,4
    if(i.lt.nx) then
      upper(idir,i)=ccx(idir,i,m)
      lower(idir,i+1)=upper(idir,i)
    endif
    diag(idir,i)=am(idir,i,m)
    ut(idir,i,m)=upper(idir,i)
  enddo
enddo

dt(:,1,m)=diag(:,1)

do i=2,nx
  lt(:,i,m)=mtm2(lower(:,i),invmat(dt(:,i-1,m))) ! mtm2 : (2x2 matrix) x (2x2 matrix)
  dt(:,i,m)=diag(:,i)-mtm2(lt(:,i,m),ut(:,i-1,m)) ! invmat : inverse matrix
enddo
```

! Forward and backward substitution

```
y(1:2,1)=tsrc(1:2,1,m)

do i=2,nx
  y(1:2,i)=tsrc(1:2,i,m)-mtm1(lt(1:4,i,m),y(1:2,i-1)) ! mtm1 : (2x2 matrix) x (2x1 matrix)
end do

sol(1:2,nx)=mtm1(invmat(dt(1:4,nx,m)),y(1:2,nx))

do i=nx-1,1,-1
  dum(1:2)=y(1:2,i)-mtm1(ut(1:4,i,m),sol(1:2,i+1))
  sol(1:2,i)=mtm1(invmat(dt(1:4,i,m)),dum(1:2))
end do
```

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

```
    phihat(1:2,i,m)=sol(1:2,i)
  end do
```

- Outer iteration scheme

outer iteration은 source iteration을 사용하여 수행하였다.

```
! LU factorization
  do m=1,ng
    call blufac(m)
  enddo

! initialize variables
  do i=1,nx
    sum=0.
    do m=1,ng
      phi(i,m)=1.
      phihat(2,i,m)=0.01
      fsrc(i,m)=0.
      tsrc(1:2,i,m)=0.
      phihat(1,i,m)=phi(i,m)+2.*phihat(2,i,m)
      sum=sum+xsnf(i,m)*phi(i,m)
    enddo
    psi(i)=sum*hx(i)
  enddo

! solve linear system
  eig=1.
  reig=1./eig
  do iout=1,nmaxout
    do m=1,ng
      do i=1,nx
        fsrc(i,m)=reig*xschi(i,m)*psi(i)
        ssrc=0.
        do k=1,2
          ssrc=ssrc+phi(i,k)*xssm(i,m)%from(k)
        enddo
        tsrc(1,i,m)=fsrc(i,m)+ssrc*hx(i)
      enddo
    enddo
  enddo
```

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

```
tsrc(2,i,m)=-twoo3*tsrc(1,i,m)
enddo

call blusolve(m)

do i=1,nx
    phi(i,m)=phihat(1,i,m)-2.*phihat(2,i,m)
enddo
enddo

print '(i4,f10.6,1p2e15.6)',iout,eig,rel eig,relpsi

if (convchk()) then
    niter=iout
    exit
endif

enddo
```

3. Solve the 1-D C5G2 problem which consists of UOX(Composition 2), MOX(Composition 3), and Reflector(Composition 1) strip.

- Result

문제의 geometry는 다음과 같다.

UOX	MOX	REFLECTOR
10.71	20.72	20.72

주어진 문제의 노드를 충분히 작게 하여 계산한 결과는 다음과 같다.

# of node per a region	2048 / 4092 / 4092
node size	0.005
# of iteration	26
k-eff	0.956837

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

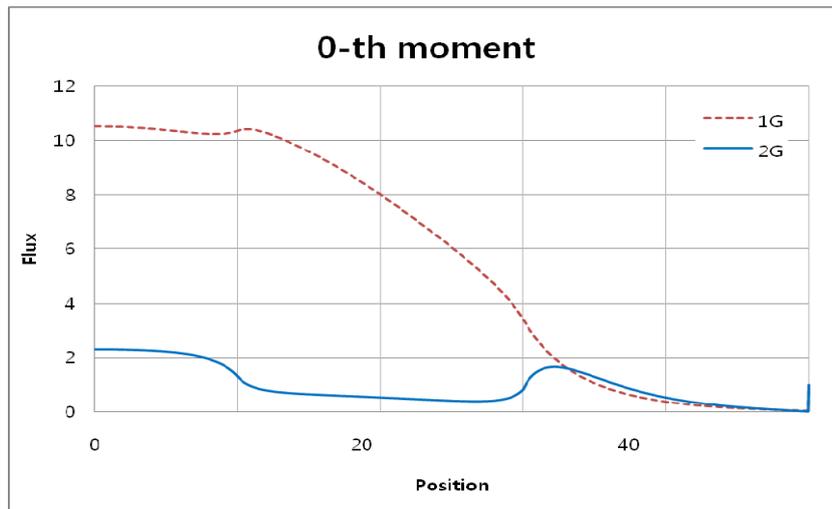


Fig 1. 0-th moment

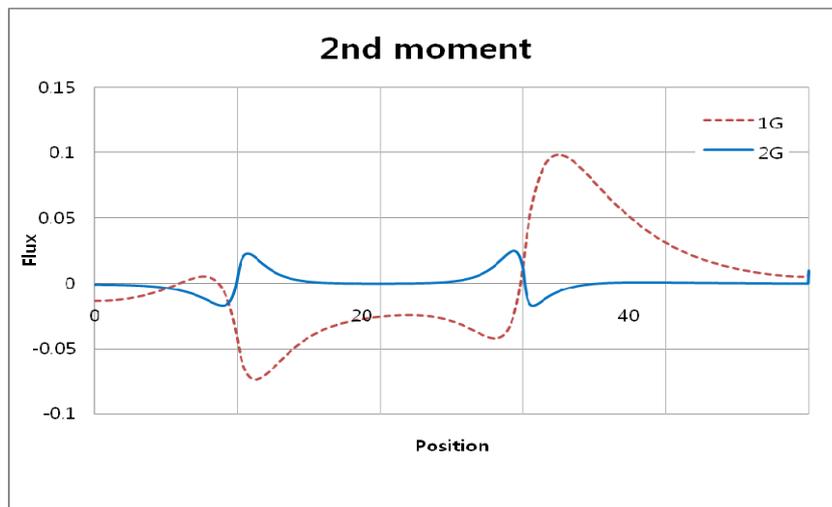


Fig 2. 2nd moment

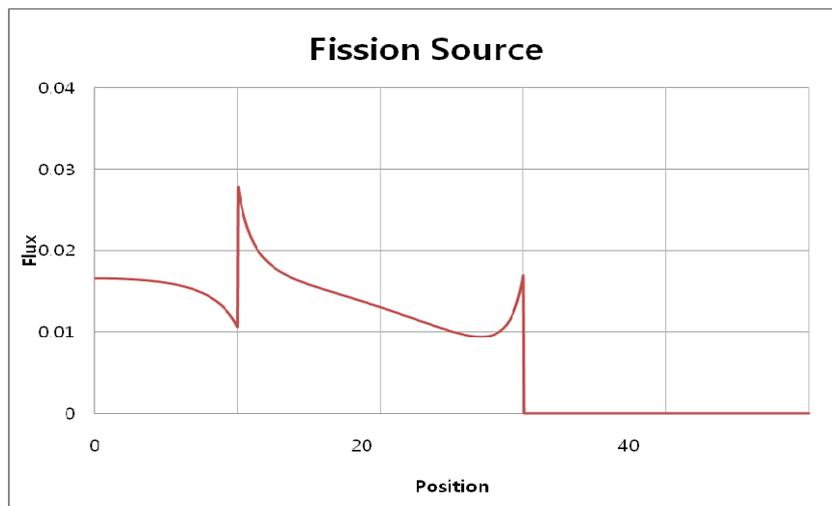


Fig 3. Fission source distribution

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

4. Examine the node size dependence of the solution by trying several refined mesh calculations. Estimate the true value of k-eff and regionwise fission source distribution.

첫번째 region을 기준으로 mesh 수를 2부터 2¹¹까지 쪼개어 k-eff의 값을 계산하였다. 그 결과는 < Fig.4 >와 같다. Node size가 작아질수록 특정값(k-eff=0.9568373)에 수렴함을 확인할 수가 있다.

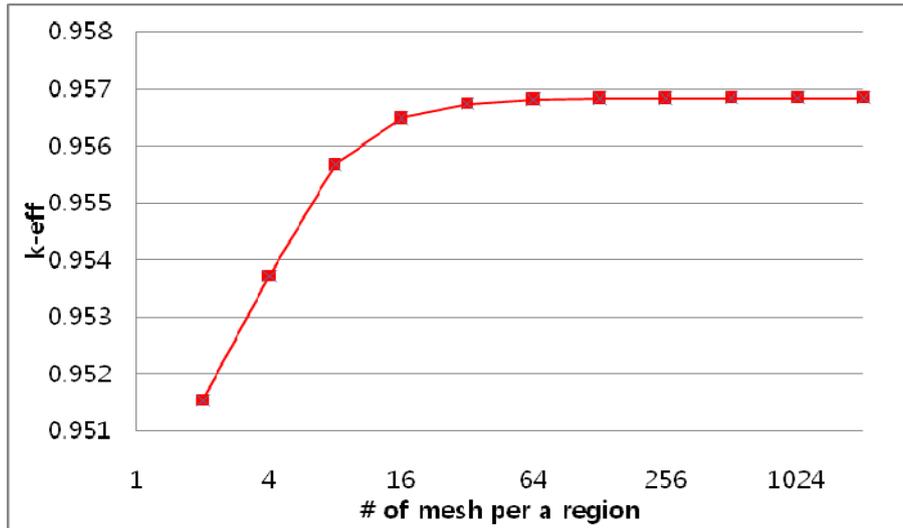


Fig 4. Fission source distribution

true solution k^* 는 error reduction ratio ρ 를 사용하여 추측할 수가 있는데 그 계산 과정은 다음과 같다.

$$k^* - k^{(n)} = \rho(k^* - k^{(n-1)})$$

$$k^* - k^{(n-1)} = \rho(k^* - k^{(n-2)})$$

$$k^{(n)} - k^{(n-1)} = \rho(k^{(n-1)} - k^{(n-2)})$$

$$\rho = \frac{k^{(n)} - k^{(n-1)}}{k^{(n-1)} - k^{(n-2)}}$$

$$k^* = \frac{k^{(n)} - \rho k^{(n-1)}}{1 - \rho}$$

위의 과정을 mesh 수가 32,64,128인 경우를 사용하여 계산을 수행하였다.

	# of meshes			Error reduction ratio
	32	64	128	
k-eff	0.9567398865	0.9568121006	0.9568308634	0.259822
Fission source of	3.0777674938	3.0751400784	3.0744497395	0.262744

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

UOX				
Fission source of MOX	5.5476104609	5.5490011294	5.5493466852	0.248482

FDM의 이론적인 error reduction ratio는 $O(h^2)$ 이므로 위의 경우는 1/4로 주어지게 된다. k-eff, FS of UOX, FS of MOX를 사용한 error reduction ratio는 이론적인 값과 대략 일치함을 확인할 수가 있다.

위의 표의 ρ 값을 사용하여 k-eff, FS of UOX, FS of MOX를 true solution을 추측한 결과는 다음과 같다.

	Estimated true solution	Solution using very defined mesh size(0.000163/65536)
k-eff	0.9568374	0.9568373
FS of MOX	3.0742037	3.0742154
FS of UOX	5.5494609	5.5494651

추측된 결과는 매우 작은 mesh size를 사용하여 얻은 결과와 대략 일치함을 확인할 수가 있다. 또한 이 결과는 SP3 NEM을 사용한 결과, 0.95722와 대략 일치한다.

5. Compare the P3 results with the diffusion code result and discuss the reasons for the differences. Compare then the result with the Monte Carlo result that you can obtain by using your previously written Monte Carlo code. Use sufficient number of histories in the Monte Carlo calculation. Plot the angular flux shape as a polar diagram at the two region interfaces.

- Diffusion code와의 비교

Diffusion code의 결과는 원자로 수치해석 시간에 작성한 코드를 사용하여 얻은 계산 결과는 0.9561894이다. 이 값과 SP3 FDM의 결과는 대략 65pcm의 차이를 보인다. Diffusion code는 P1 equation을 기반으로 작성된 코드이므로 고차 Legendre polynomial을 사용하여 angular flux를 표현한 P3 method에 비해 정확성이 떨어진다.

- Monte Carlo code와의 비교

Monte Carlo calculation의 결과는 이민재씨 코드의 결과를 사용하였다. 1,000,000 history를 사용하여 계산을 수행하였고 그 결과는 $0.95705 \pm 1.290 \times 10^{-3}$ 이다. SP3 FDM의 결과와는 대략 22pcm의 오차를 보인다.

- 물질 간 경계면에서의 Angular flux 분포

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

물질 간 경계면에서의 angular flux는 Matlab을 사용하여 plot을 하였다.

```
t=0:0.001:2.*pi;
phi=[10.36554 -0.08547 -0.04485 0.09209]; % 1G 1-2 1:UOX 2:MOX 3:REF
f = @(t) 0.5.*phi(1) + 1.5.*phi(2).*cos(t) + 2.5.*phi(3).*0.5.*(3.*cos(t).^2-1)
        + 3.5.*phi(4).*0.5.*cos(t).*(5.*cos(t).^2-3);
polar(t,f(t),'r')
title('UOX-MOX (Group 1)')
saveas(gcf,'lg12.bmp')
```

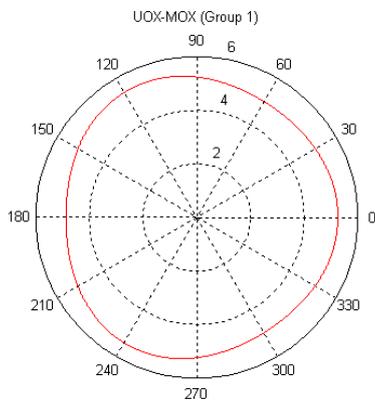


Fig 5. UOX-MOX (Group 1)

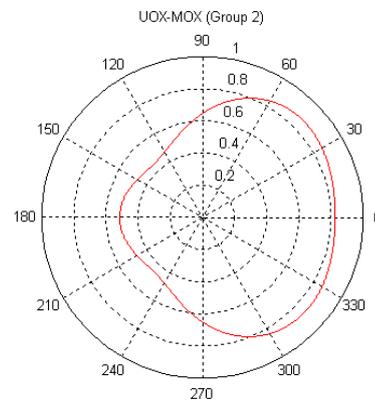


Fig 6. UOX-MOX (Group 2)

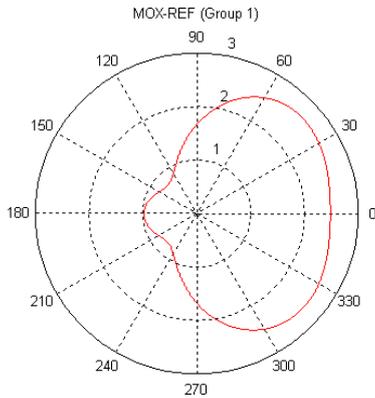


Fig 7. MOX-REF (Group 1)

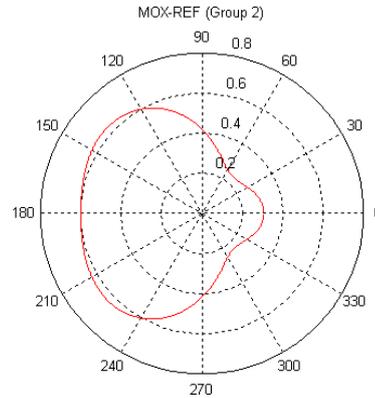


Fig 8. MOX-REF (Group 2)

1그룹의 UOX-MOX 경계에서의 angular flux는 약간의 backward peaking을 보인다. 이러한 현상은 < Fig.1 >의 0-th moment flux의 그래프에서 1그룹의 UOX-MOX 경계에서의 MOX의 flux가 약간 높게 나타나는 것을 통해서 확인할 수가 있다. 이와 마찬가지로 2그룹의 MOX-REF 경계에서의 강한 backward peaking 현상을 < Fig. 1> 에서 확인할 수가 있다. 2그룹의 MOX-REF 경계에서

Analysis of Reactor Static Characteristics

2008 년 2 학기

reflector 영역에서의 moderation과 reflecting 기능에 의한 것으로 경계면에서 강한 incoming current를 형성하게 되는 것으로 backward peaking을 설명할 수 있다.

P1 method를 사용하였을 경우의 angular flux의 대략적인 분포를 확인하기 위해 2nd, 3rd moment flux term을 제외하고 plot을 하였다.

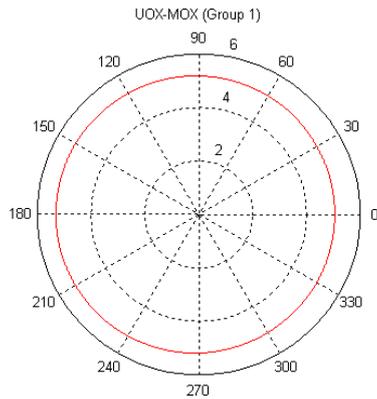


Fig 9. UOX-MOX (Group 1)

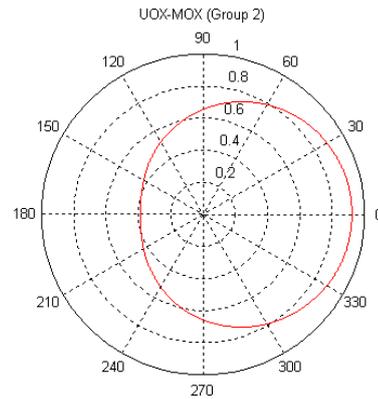


Fig 10. UOX-MOX (Group 2)

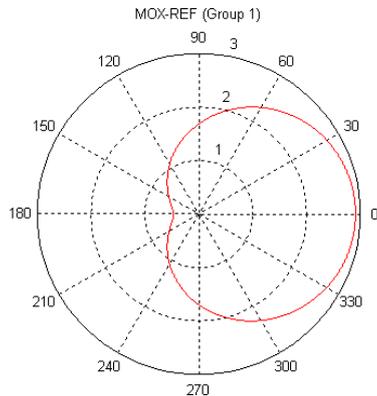


Fig 11. MOX-REF (Group 1)

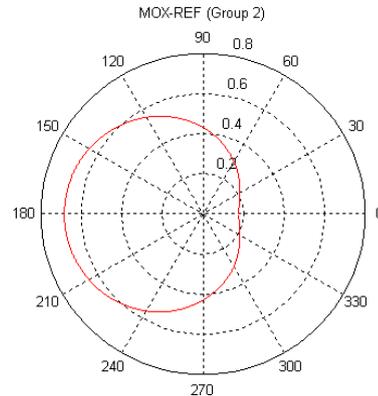


Fig 12. MOX-REF (Group 2)

P1 method에 의한 angular flux의 분포는 P3 method에 의한 결과와 같이 섬세하게 분포를 묘사하지 못한다. 이는 곧 오차를 수반하므로, P1 method에 의한 결과는 P3 method에 의한 결과보다 정확성이 떨어짐을 다시 한번 확인할 수가 있다.