양자역학의 기초 Homework #2

1. 교재 p. 109 의 그림 3.14 의 관계를 제대로 된 Fourier transform의 식 (식 (3.19)는 틀린 식)을 써서 보이시오.

*올바른 Fourier Transform

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{jkx}\,dk \\ g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)e^{-jkx}\,dx\end{aligned}}$$

a) A pulse

$$\Psi(x) = \delta(x)$$

라 두고 이를 Fourier Transform 하면

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-jkx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

b) A wave group

$$g(k) = \begin{cases} 1 & (k \le \left|\frac{\Delta k}{2}\right|) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

라 두고 이를 Inverse Fourier Transform 하면

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{jkx}\,dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{jkx}\,dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{jx}\left[e^{j\frac{\Delta k}{2}x} - e^{-j\frac{\Delta k}{2}x}\right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{\Delta k}{2}x}{x}\end{aligned}$$

c) A wave train

$$\Psi(x) = \sin k_0 x$$

라 두고 이를 Fourier Transform 하면

$$\begin{aligned}g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin k_0 x\ e^{-jkx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jk_0x} - e^{-jk_0x}}{2j}\ e^{-jkx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2j}\left[\sqrt{2\pi}\delta(k-k_0) - \sqrt{2\pi}\delta(k+k_0)\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left[\delta(k-k_0) - \delta(k+k_0)\right]\end{aligned}$$

d) A Gaussian distribution

Gaussian 함수 꼴은 e^{-x^2} term을 포함하므로 간단하게 계산 확인 가능하다. 즉,

$$\Psi(x) = e^{-x^2}$$

라 두고 이를 Fourier Transform 하면

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-jkx}\, dx$$

한편, 적분 내부의 수식을 정리해 보면

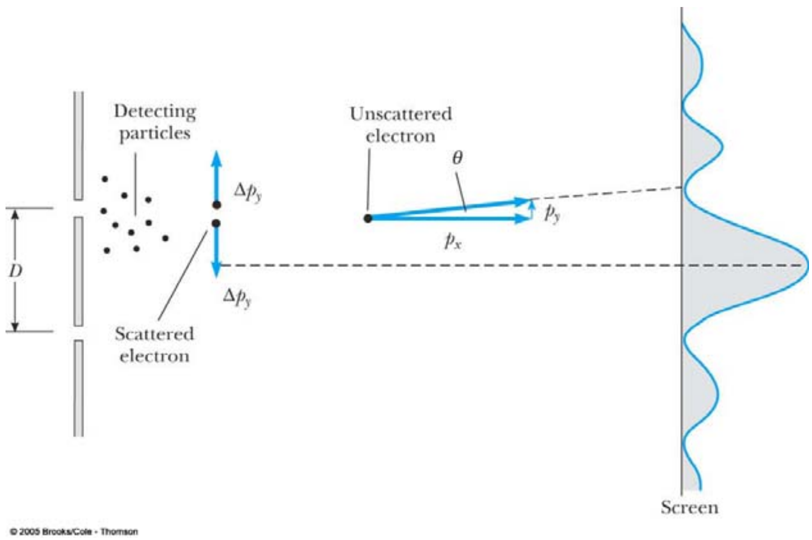
$$e^{-x^2} e^{-jkx} = e^{-(x^2+jkx)} = e^{-\left(x+j\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{k^2}{4}}$$

$X = x + j\frac{1}{2}k$ 라 두고 수식을 간단히 하면 (dX=dx)

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2}\, dX = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

이므로 Gaussian 함수의 F.T.는 Gaussian 꼴이다.

2. Young 의 이중 슬릿(double slit) 실험에서 photon이 어떤 슬릿을 통과하는지를 관측한다면 간섭무늬가 사라지게 됨을 보이시오.



광자가 어떤 슬릿을 통과했는지 관측했을 경우 슬릿의 크기를 Δy 라고 하면 이 방향으로의 위치와 운동량은 불확정성의 원리에 의하여

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2\Delta y} \gg \frac{\hbar}{2D} \qquad (\because D \gg \Delta y)$$

의 관계를 가지게 된다. 한편 첫 번째 상쇄 간섭은

$$D\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin\theta \cong \theta = \frac{\lambda}{2D}$$

이다.

$$\sin\Delta\theta \cong \Delta\theta = \frac{\Delta p_y}{p} \gg \frac{\hbar/2D}{\hbar/\lambda} = \frac{\lambda}{2D} \cong \theta$$

즉,

$$\Delta\theta \gg \theta$$

이므로 이는 광자의 움직임을 Slit을 통해 확인하면 간섭무늬를 관찰할 수 없음을 뜻한다.

3. 교재 p. 118, Exercise #40

a) $L = mvr = rp$ 이므로 $\Delta L = r\Delta p$, $\Delta p = \frac{\Delta L}{r}$

한편, $\Delta x = r\Delta\theta$ 이므로

$$\Delta x\Delta p = (r\Delta\theta)\left(\frac{\Delta L}{r}\right) = \Delta L\Delta\theta \geq \frac{\hbar}{2}$$

b) $\Delta\theta$가 2π보다 클 때 문제의 조건을 만족. 이 때 $\Delta L = \frac{\hbar}{4\pi}$ 이다.

4. 교재 p. 158, Exercise #13

Ground state 에 대해서 $\lambda = 2\pi a_0$이므로

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi a_0} = \frac{\hbar}{a_0}$$

한편, $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ 이므로

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2a_0}$$

즉 p는 Δp 값의 대략 두 배 정도 된다.