양자역학의 기초 숙제 #5 답안

1. $\hat{L}^2$와 $\widehat{L_z}$는 서로 교환됨을 보여라.(10점)

$$\hat{L}^2 = \widehat{L_x}^2 + \widehat{L_y}^2 + \widehat{L_z}^2$$

이 때, 임의의 연산자 A, B에 대해서 다음이 성립하므로,

$$\left[\hat{A}^2, \hat{B}\right] = \hat{A}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{A}$$

이 식과 숙제의 2번 결과를 이용하면

$$\left[\widehat{L_z}, \widehat{L^2}\right] = -\left[\widehat{L^2}, \widehat{L_z}\right] = -\left[(\widehat{L_x}^2 + \widehat{L_y}^2 + \widehat{L_z}^2), \widehat{L_z}\right]$$

$$= -\left[\widehat{L_x}^2, \widehat{L_z}\right] - \left[\widehat{L_y}^2, \widehat{L_z}\right]$$

$$= -\left(\widehat{L_x}\left[\widehat{L_x}, \widehat{L_z}\right] + \left[\widehat{L_x}, \widehat{L_z}\right]\widehat{L_x} + \widehat{L_y}\left[\widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right] + \left[\widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right]\widehat{L_y}\right)$$

$$= -i\hbar(-\widehat{L_x}\widehat{L_y} - \widehat{L_y}\widehat{L_x} + \widehat{L_y}\widehat{L_x} + \widehat{L_x}\widehat{L_y}) = 0$$

2. $\hat{L}_x$ 와 $\hat{L}_y$의 commutator는 $\hat{L}_z$와 어떤 관계를 갖는가?(10점)

우선 각 방향에 대한 각운동량 연산자들의 정의는 다음과 같다..

$$\widehat{L_x} = \hat{y}\widehat{p_z} - \hat{z}\widehat{p_y}$$

$$\widehat{L_y} = \hat{z}\widehat{p_x} - \hat{x}\widehat{p_z}$$

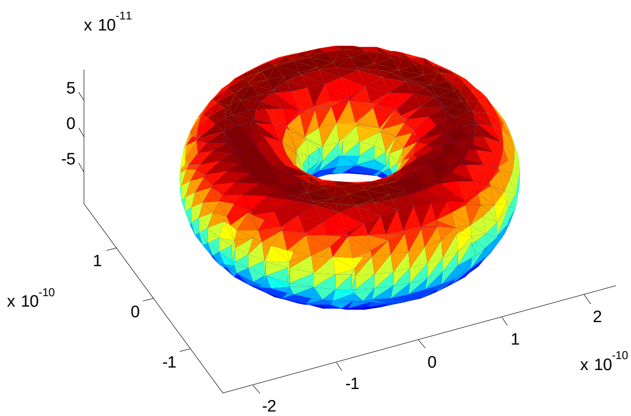
$$\widehat{L_z} = \hat{x}\widehat{p_y} - \hat{y}\widehat{p_z}$$

이제 연산자 사이에 교환법칙이 성립하지 않는다는 점을 유의하여 연산을 해 보면,

$$\left[\widehat{L_x}, \widehat{L_y}\right] = \left[\hat{y}\widehat{p_z} - \hat{z}\widehat{p_y}, \hat{z}\widehat{p_x} - \hat{x}\widehat{p_z}\right] = (\hat{y}\widehat{p_z} - \hat{z}\widehat{p_y})(\hat{z}\widehat{p_x} - \hat{x}\widehat{p_z}) - (\hat{z}\widehat{p_x} - \hat{x}\widehat{p_z})(\hat{y}\widehat{p_z} - \hat{z}\widehat{p_y})$$

$$= \hat{y}\widehat{p_x}\left[\widehat{p_z}, \hat{z}\right] + \hat{x}\widehat{p_y}\left[\hat{z}, \widehat{p_z}\right] = i\hbar(\hat{x}\widehat{p_y} - \hat{y}\widehat{p_x}) = i\hbar\widehat{L_z}$$

3. 강의자료 #9의 슬라이드 page 25의 (a)와 같은 결과를 보여주는 그림을 컴퓨터를 이용하여 그리시오. (20점)



4. 숙제 #4번의 마지막 문제(10점)

$$(<\Delta A>)^2(<\Delta B>)^2 \geq \frac{1}{4}|<[\mathrm{A},\mathrm{B}]>|^2$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{x}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\mathrm{xp} = -\mathrm{i}\hbar\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\mathrm{px} = -\mathrm{i}\hbar(1 + \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}})$$

$$\therefore [x,p] = i\hbar$$

이를 Schwarz inequality 에 대입하면

$$(<\Delta x>)^2(<\Delta p>)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\therefore <\Delta x><\Delta p> \geq \frac{\hbar}{2}$$