2009학년도 1학기 양자역학의 기초 숙제 #6 답안

1. 교재 p. 227, Exercise # 23.

6-23: For $l = 0$, only $m_l = 0$ is allowed, $\Phi(\phi)$ and $\Theta(\theta)$ are both constants (from Table 6.1)), and the theorem is verified.

For $l = 1$, the sum is

$$\frac{1}{2\pi}\frac{3}{4}\sin^2\theta + \frac{1}{2\pi}\frac{3}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{2\pi}\frac{3}{4}\sin^2\theta = \frac{3}{4\pi}.$$

In the above, $\Phi^*\Phi = \frac{1}{2\pi}$, which holds for any l and m_l, has been used. Note that one term appears twice, one for $m_l = -1$ and once for $m_l = 1$.

For $l = 2$, combining the identical terms for $m_l = \pm 2$ and $m_l = \pm 1$, and again using $\Phi^*\Phi = \frac{1}{2\pi}$, the sum is

$$2\frac{1}{2\pi}\frac{15}{16}\sin^4\theta + 2\frac{1}{2\pi}\frac{15}{4}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{2\pi}\frac{10}{16}\left(3\cos^2\theta - 1\right)^2.$$

The above may be simplified by extracting the commons constant factors, to

$$\frac{5}{16\pi}\left[(3\cos^2\theta - 1)^2 + 12\sin^2\theta\cos^2\theta + 3\sin^4\theta\right].$$

Of the many ways of showing the term in brackets is indeed a constant, the one presented here, using a bit of hindsight, seems to be one of the more direct methods. Using the identity $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ to elminate $\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
&(3\cos^2\theta - 1)^2 + 12\sin^2\theta\cos^2\theta + 3\sin^4\theta \\
&= \left(9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1\right) + 12\left(1 - \cos^2\theta\right)\cos^2\theta + 3\left(1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

and the theorem is verified.

답안 변경점: 끝에서 두번째 줄의 상수는 1이 아니라 4가 맞습니다.

2. 교재 p. 264, Exercise # 6.

7-6: Because the system of electrons has the minimum total energy possible, each of the lowest five energy states is occupied by two electrons, with one of each spin. The lowest unoccupied level is the sixth, and the energy of the photon would be

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{8mL^2}\left(6^2 - 1^2\right) = \frac{\left(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\right)^2}{8\ (9.1095 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})\ (1.00 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})} (35)$$
$$= 2.11 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} = 13.1\ \mathrm{eV}.$$

답안 변경점: 교재 178를 보시면 $\hbar$가 아닌 h로 쓰는게 맞습니다. (답에는 변화 없음)

3. 교재 p. 265, Exercise # 22.

7-22: In the ground state, a hydrogen atom has no orbital angular momentum, and there can be no spin-orbit coupling.

4. 교재 p. 278의 식 (8.2)가 p. 277의 Fig. 8.9와 일치하는지 수식으로 증명하시오 (그림을 컴퓨터로 그릴 필요 없음).

$$\psi_{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{+1} + \psi_{-1}), \qquad \psi_{P_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{+1} - \psi_{-1})$$

$\psi_{\pm1} = c_1 r\, e^{-r/2a_0}\sin\theta e^{\pm i\phi}$ 을 각각의 식에 대입하게 되면,

$$\psi_{P_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{+1} + \psi_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 r\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta(e^{+i\phi} + e^{-i\phi}) = \sqrt{2}c_1 r\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta\cos\phi$$

$\left|\psi_{P_x}\right|^2 \propto \sin^2\theta\cos^2\phi$ 을 만족하므로, θ방향으로는 0 or π 일때는 값이 0이 되고, $\frac{\pi}{2}$ 일때 최대가 되므로, Fig. 8.9 와 같이 z=0 평면 위에서 값이 최대가 되는 모양을 가지게 되고,

Φ 방향으로는 0 or π 일 때 값이 최대가 되고, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ 일 때에는 0이 되어 $\Phi = 0, \pi$ 가 놓인 축을 x축으로 잡게 되면 x축 상에서 값이 가장 커지게 되는 $2p_x$ orbital의 모양을 지니게 된다.

마찬가지로

$$\psi_{P_y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{+1} - \psi_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 r\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta(e^{+i\phi} - e^{-i\phi}) = i\sqrt{2}c_1 r\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta\sin\phi$$

의 형태로, $\left|\psi_{P_y}\right|^2 \propto \sin^2\theta\sin^2\phi$ 을 만족하므로, Φ 방향으로 0 or π 일 때 0이 되고, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ 일 때 최대가 되는 $2p_y$ orbital의 모양을 지니게 됨을 알 수 있다.