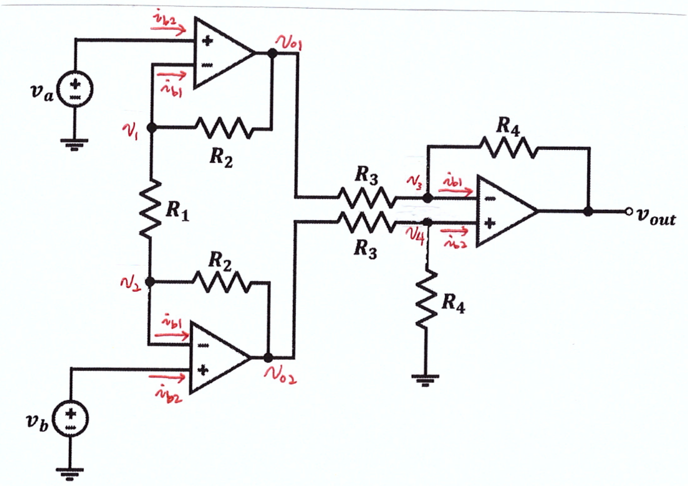
1.

(a) (8점)



ideal op-amp. 이므로 $\left(\begin{array}{ll} v_1 = v_a & \\ v_2 = v_b & i_{b1} = i_{b2} = 0 \\ v_3 = v_4 (= v) & \end{array} \right)$

node 1 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_b - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_{o1}}{R_2} \quad - ①$$

node 2 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b - v_{o2}}{R_2} \quad - ②$$

① : $v_{o1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_a - \frac{R_2}{R_1} v_b$

② : $v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_b - \frac{R_2}{R_1} v_a$

$\Rightarrow v_{o1} - v_{o2} = \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)(v_a - v_b)$

node 4 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_{o2} - v}{R_3} = \frac{v}{R_4} \quad - ③$$

node 3 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_{o1} - v}{R_3} = \frac{v - v_{out}}{R_4} \quad - ④$$

③ : $v = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{o2}$

④ : $v_{out} = \left(\frac{R_3 + R_4}{R_3}\right) v - \frac{R_4}{R_3} v_{o1}$

$= \frac{R_4}{R_3}(v_{o2} - v_{o1})$

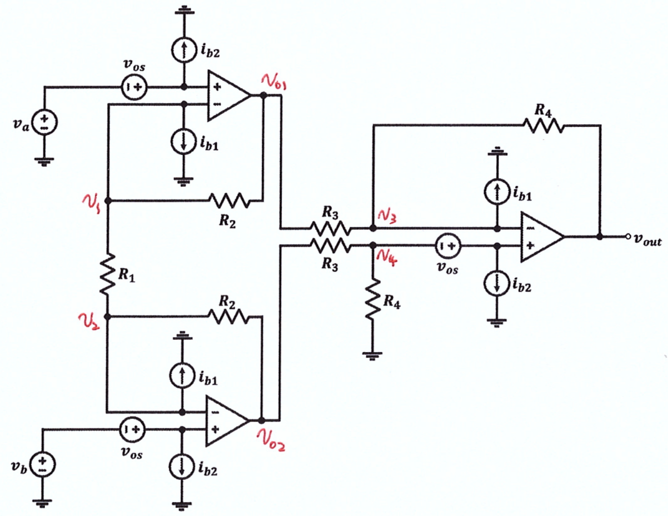
$\therefore \underline{v_{out} = -\left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{R_4}{R_3}\right)(v_a - v_b)}$

[채점기준]

- ideal op-amp.의 조건 +1점
  (명시하지 않더라도 문제 풀이 과정에서 올바르게 사용하였으면 점수 부여)
- v_{o1}, v_{o2} 에 대한 식 +1 점
- v_{o1}, v_{o2} 를 v_a, v_b 를 이용하여 올바르게 나타내면 +2점
- v_{out} 에 대한 식 +1 점
- v_{out} 을 v_{o1}, v_{o2} 를 이용하여 올바르게 나타내면 +2점
- v_{out} 을 v_a, v_b 를 이용하여 올바르게 나타내면 +1점

(※식이 틀릴 경우 그에 해당하는 결과에도 점수 부여하지 않음)

(b) (12점)



Offset model : $\begin{pmatrix} v_{os} = v_- - v_+ \\ i_{os} = i_{b1} - i_{b2} \end{pmatrix}$ 이므로,

$$\begin{pmatrix} v_1 = v_a + v_{os} \\ v_2 = v_b + v_{os} \\ v_3 (= v) = v_4 + v_{os} \longrightarrow v_4 = v - v_{os} \\ i_{os} = i_{b1} - i_{b2} \end{pmatrix}$$

node 1 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_b - v_a}{R_1} = \frac{v_a + v_{os} - v_{o1}}{R_2} + i_{b1} \quad -①$$

node 2 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b + v_{os} - v_{o2}}{R_2} + i_{b1} \quad -②$$

$$①: v_{o1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_a - \frac{R_2}{R_1} v_b + v_{os} + i_{b1} R_2$$

$$②: v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_b - \frac{R_2}{R_1} v_a + v_{os} + i_{b1} R_2$$

$$\Rightarrow v_{o1} - v_{o2} = \left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)(v_a - v_b)$$

node 4 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_{o2} - v + v_{os}}{R_3} = \frac{v - v_{os}}{R_4} + i_{b2} \quad -③$$

node 3 에서 KCL을 쓰면,

$$\frac{v_{o1} - v}{R_3} = \frac{v - v_{out}}{R_4} + i_{b1} \quad -④$$

$$③: v = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{o2} + v_{os} - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} i_{b2}$$

$$④: v_{out} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} v - \frac{R_4}{R_3} v_{o1} + i_{b1} R_4$$

$$= \frac{R_4}{R_3}(v_{o2} - v_{o1}) + \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) v_{os} + R_4 \underbrace{(i_{b1} - i_{b2})}_{= i_{os}}$$

$$\therefore v_{out} = -\left(1 + 2\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{R_4}{R_3}\right)(v_a - v_b) + \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) v_{os} + i_{os} R_4$$

$$\therefore v_{out\_offset} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) v_{os} + i_{os} R_4$$

[채점기준]

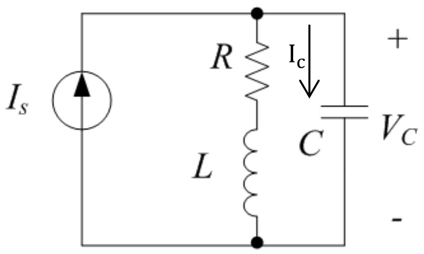
- offset model op-amp. 의 조건 +1점
  (명시하지 않더라도 문제풀이 과정에서 올바르게 사용하였으면 점수 부여)
- v_{o1}, v_{o2} 에 대한 식 +2점
- v_{o1}, v_{o2} 를 올바르게 구하면 +3점
- v_{out} 에 대한 식 +2점
- v_{out_offset} 을 올바르게 구하면 +4점

(※ 식이 틀릴경우 그에 해당하는 결과에도 점수 부여하지 않음)

2번

(a)

System의 differential equation과 Characteristic equation을 써보면,



$$I_c = C\frac{dV_c}{dt}\ ,\ V_c = (I_s - I_c)R + L\frac{d(I_s - I_c)}{dt}$$

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{LC} = \frac{RI_s}{LC} + \frac{1}{C}\frac{dI_s}{dt}$$

이때, Characteristic equation은, $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 = s^2 + 2\alpha s + w_o^2$ 이다.

이때, $\alpha = \frac{R}{2L}$, $w_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Overdamped 이기 위한 조건 => $(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC} > 0$ ------(1점)

Critically damped 이기 위한 조건 => $(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC} = 0$ ------(1점)

Underdamped 이기 위한 조건 => $(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC} < 0$ ------(1점)

Undamped 이기 위한 조건 => $R = 0$ ------(1점)

---[채점기준]---

각각 1점씩 /총4점

(b)

이때, $\alpha = \frac{R}{2L}$, $w_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$w_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ------(1점)

$w_d = \sqrt{\alpha^2 - w_o^2} = \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$ ------(1점)

Resonance frequency 는 case에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.

Overdamped case : $s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$, when, $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Critically damped case : $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L}$, when, $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Underdamped : $s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$, when, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ------(1점)

--[채점기준]---

고유주파수, 공진주파수, 감쇠주파수를 올바르게 구한 경우 각각 +1점 (총 +3점)

/총 3점

(c)

$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{LC} = \frac{RI_s}{LC} + \frac{1}{C}\frac{dI_s}{dt}$

에서 각각의 주어진 값들을 대입하면 $\frac{d^2V_c}{dt^2} + 100\frac{dV_c}{dt} + 10^6 * V_c = 10^7 * I_s + 10^5 * \frac{dI_s}{dt}$

$s_1, s_2 = -50 \pm j\sqrt{10^6 - 2500} = -50 \pm j998.75$ 로 underdamped되어 있다.

초기값 $I_L(0) = 1,\ V_c(0) = 10$ 과 $c\frac{dV_c}{dt} = I_s - I_L \Rightarrow \frac{dV_c}{dt}(0) = \frac{1}{C}$ 을 이용하여 답을 구해 줄 수 있다.

따라서 $\mathbf{V_c(t) = e^{-50t}(-10 * \cos(998.75t) + 99.62 * \sin(998.75t)) + 20}$ 이다.

여기서 natural response은 $V_n(t) = e^{-50t}(-10 * \cos(998.75t) + 99.62 * \sin(998.75t))$,

Forced response은 $V_f(t) = 20$

--[채점기준]---

식을 제대로 세우면 +1점, 초기값을 제대로 구하면 +1점, complete response를 제대로 구하면 +3점, natural response를 제대로 언급하면 +1점, Forced response를 제대로 언급하면 +1점 /총 7점

(d) R=0 이므로 미분방정식이 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{V_c}{LC} = \frac{1}{C}\frac{dI_s}{dt}$$

$$I_s(t) = u(t)\text{이므로, } \frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{V_c}{LC} = \frac{1}{C}\frac{du(t)}{dt}$$

t>0일 때, $\frac{d^2\mathrm{V_c}}{dt^2}+\frac{\mathrm{V_c}}{\mathrm{LC}}=\frac{1}{C}\frac{du(t)}{dt}=0$ ---(1점)

위 미분 방정식의 해는 $\mathrm{V_c(t)} = \mathrm{Acos}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\mathrm{t}\right)+\mathrm{Bsin}(\frac{1}{\sqrt{LC}}\mathrm{t})$ ---(1점)

초기값 $\mathrm{I_L(0)} = 0,\ \mathrm{V_c(0)} = 0$ 임은 자명하고,

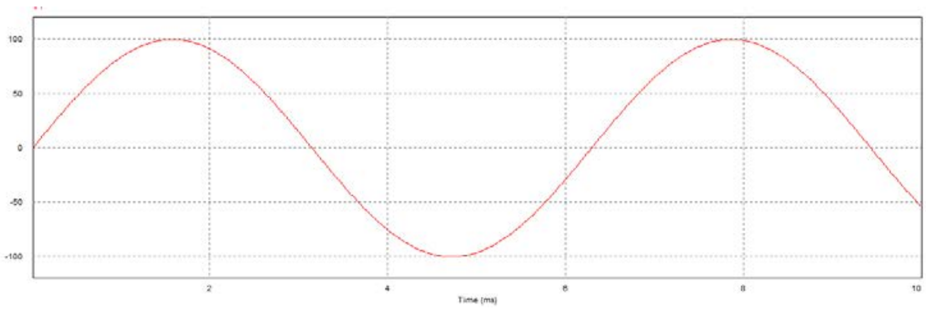
$\frac{d^2\mathrm{V_c}}{dt^2}+\frac{\mathrm{V_c}}{\mathrm{LC}}=\frac{1}{C}\frac{du(t)}{dt}=0$ 를 한번 적분하여 $\frac{\mathrm{dV_c}}{dt}+\frac{1}{\mathrm{C}}\int\frac{\mathrm{V_c}}{\mathrm{L}}dt=\frac{\mathrm{dV_c}}{dt}+\frac{1}{\mathrm{C}}I_L=\frac{1}{C}\int\frac{du(t)}{dt}\mathrm{dt}=\frac{1}{\mathrm{C}}$

$(\because \frac{du(t)}{dt} = \delta(\mathrm{t})\ \&\ \int\frac{du(t)}{dt}\mathrm{dt} = 1)$

$\therefore \frac{\mathrm{dV_c}}{dt}(0) = \frac{1}{C}$ ---(2점)

$\mathrm{V_c}(0) = 0$, $\frac{\mathrm{dV_c}}{dt}(0) = \frac{1}{C}$ 두 초기값을 이용하면, A=0, B=$\sqrt{\frac{L}{C}}$=100

$\therefore\ \mathrm{V_c(t)} = 100\sin(1000\mathrm{t})$ ---(2점)



---[채점기준]---

미분방정식을 올바르게 세웠으면 +1점

미분방정식의 해의 꼴을 올바르게 찾았으면 +1점

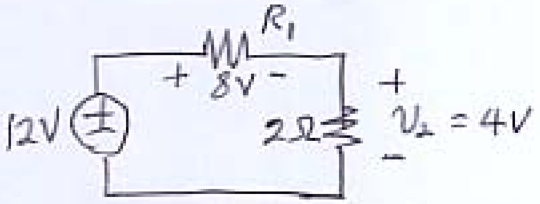
초기값을 올바르게 찾은 경우 각각 +1점 (총 +2점)

답을 정확하게 구한 경우 +2점

/총 6점

(a) Considering $v_L(\infty) = 4V$ and the ckt at $t=\infty$,

ckt at $t=\infty$,



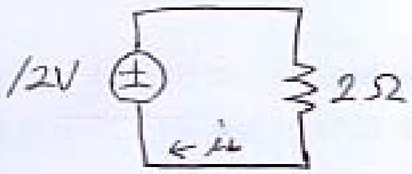
$R_1 : R_2 = 8 : 4$

$\boxed{\Rightarrow R_1 = 4\Omega}$

(b) Assuming steady-state at $t=0^-$,

$i_L(0^-) = i_L(0^+)$

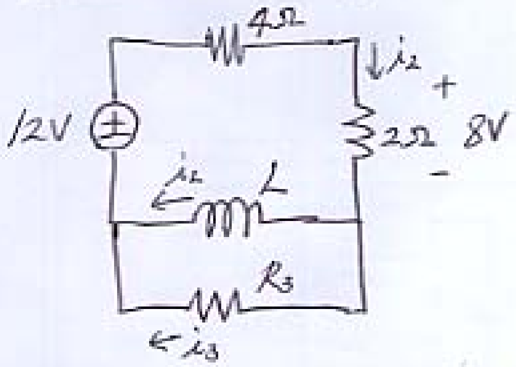
ckt at $t=0^-$



$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+) = 6A}$

(c) at $t=0^+$

ckt at $t=0^+$,



$v_2(0^+) = 8V$.

$\Rightarrow i_2(0^+) = 4A$.

Since $i_L(0^+) = 6A$,

$i_3(0^+) = -2A$.

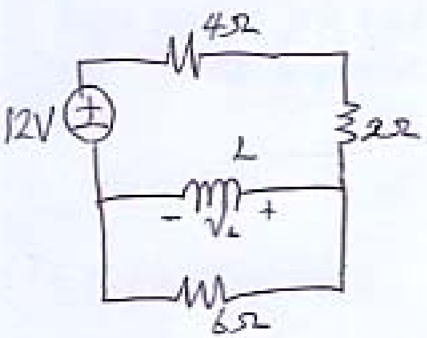
$\Rightarrow$ KVL on the most-outer loop of the ckt

$12 - 4\cdot 4 - 2\cdot 4 - (R_3)\cdot(-2) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow R_3 = 6\Omega}$

(d) for $t>0$

ckt at $t>0$



Since $v_2(t) = 4 + 4e^{-t}$ [V]

$\Rightarrow i_2(t) = 2 + 2e^{-t}$ [A]

$\rightarrow$ KVL on the upper loop of the ckt

$12 - i_2(4+2) - v_L(t) = 0$.

$v_L(t) = -12e^{-t}$ [V]

$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)\,d\tau$ (inductor equation)

(continued)

(Continued)

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t -12e^{-\tau}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{L}\left[12e^{-t} - 12\right] + C$$

$$= \frac{12}{L}(e^{-t} - 1) + C$$

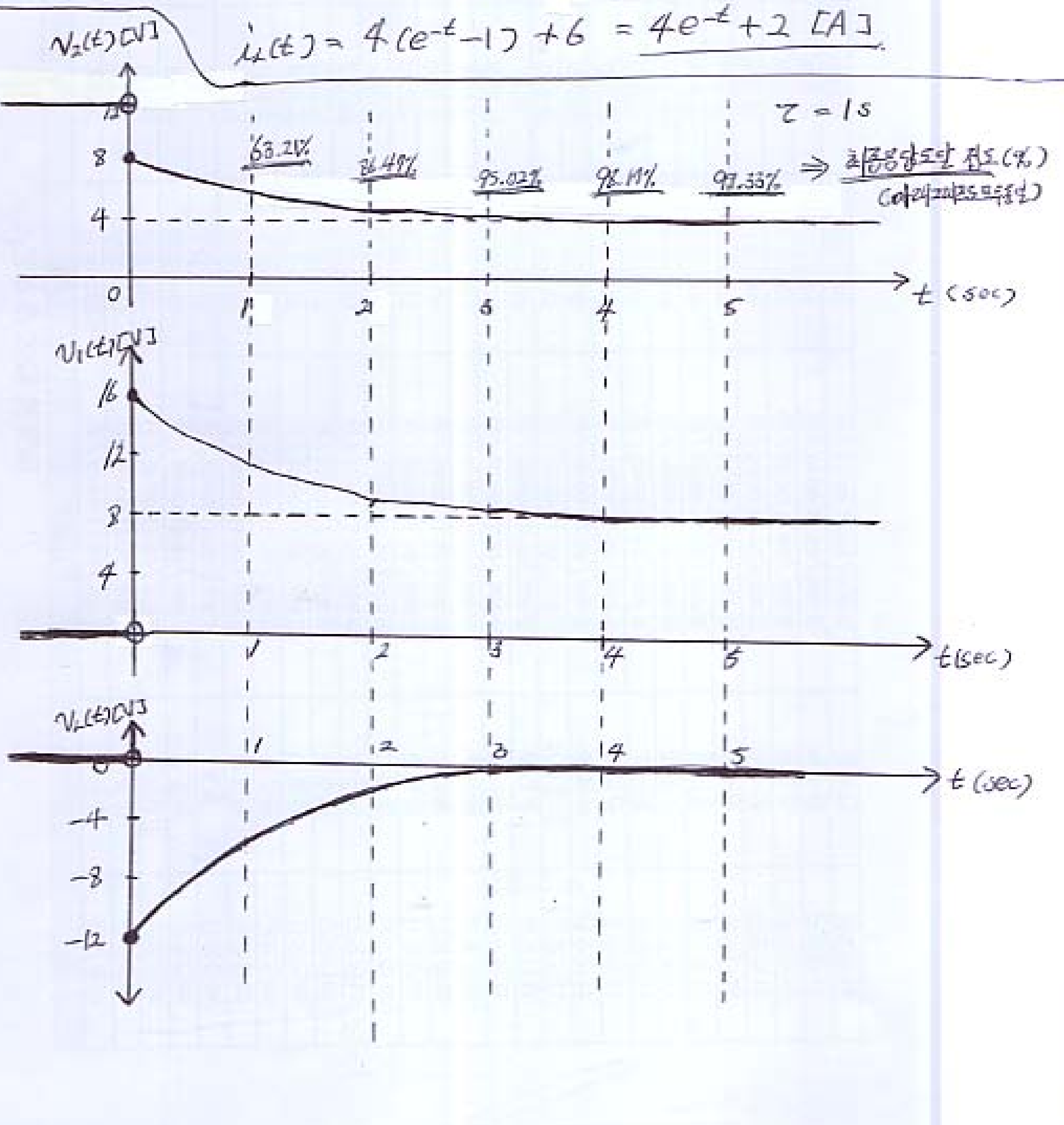
But $i_L(0^+) = 6A. \Rightarrow i_L(t) = \frac{12}{L}(e^{-t}-1) + 6.$

$i_L(\infty) = 2A \Rightarrow i_L(t) = -\frac{12}{L} + 6 = 2A$

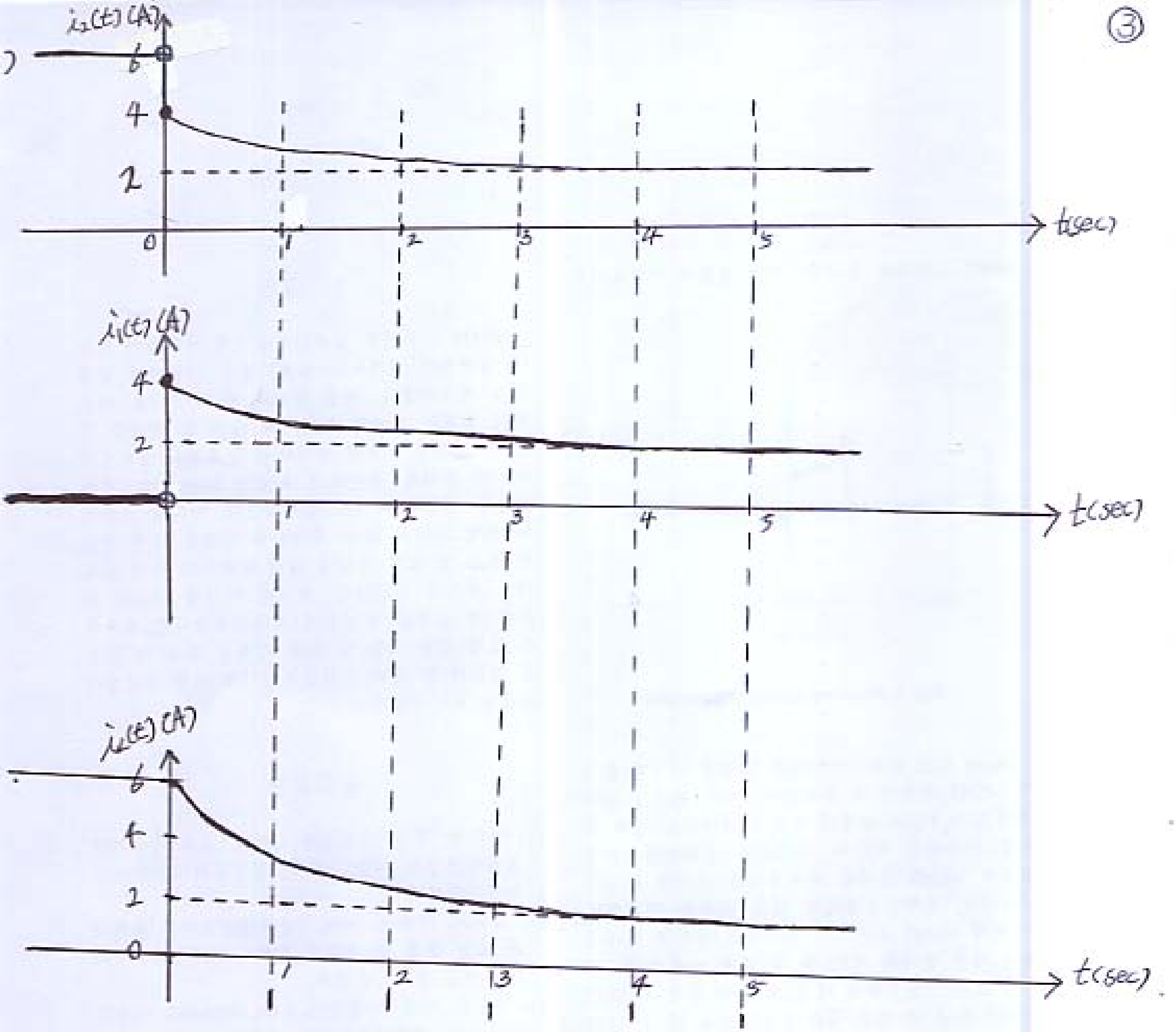
$$\Rightarrow \boxed{L = 3\,[H]}$$

$$i_L(t) = 4(e^{-t}-1) + 6 = \underline{4e^{-t} + 2\ [A]}$$

(e)



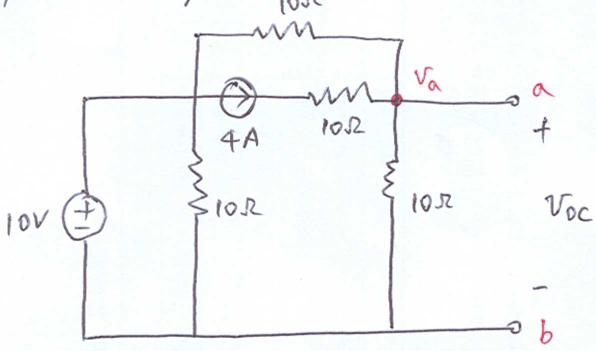
(f)



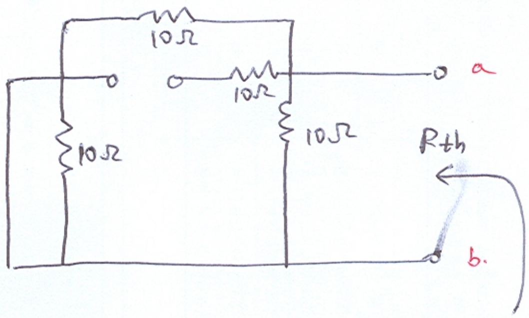
4번

2. (A) Element X 의 양 끝 단자에서 10Ω 쪽의 테브난 등가회로를 구해보면

open circuit voltage



equivalent resistance



node a 에서 KCL 적용

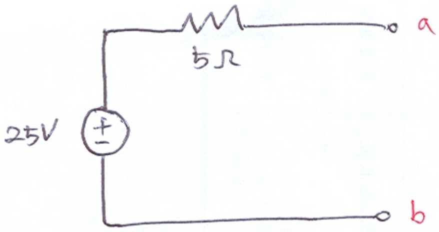
$$4 + \frac{10 - v_a}{10} = \frac{v_a - 0}{10}$$

$$40 + 10 - v_a = v_a$$

$$2v_a = 50 \rightarrow v_a = 25\ [V] = v_{oc}.$$

$R_{th} = 10\Omega \,//\, 10\Omega = 5\Omega$

따라서 등가회로는 아래와 같이 표현할 수 있다.



문제의 $v-t$ 그래프에서 $v(\infty)$ 값을 볼 때 주어진 소자를 Capacitor 로 볼 수 있다.

RC 회로에서 $v(t)$ 값은

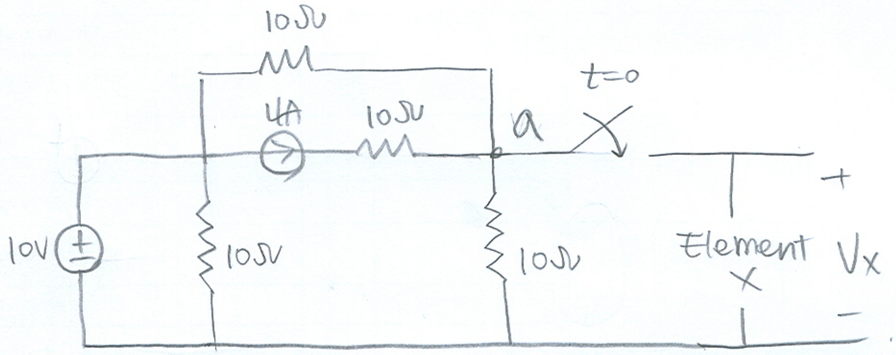
$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$ 이고, 그래프 상에서 $v(\infty) = 25\ [V]$, $v(0) = 0\ [V]$

임을 알 수 있다. 따라서

$v(t) = 25(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 가 되고 $t = 1\tau$ 가 되는지점이 1ms 임을 알 수 있다.

$$\tau = R_{th}C \rightarrow C = \frac{\tau}{R_{th}} = \frac{1ms}{5\Omega} = \underline{0.2mF}$$

(A).



그래프의 개형을 통해. element X가 capacitor 임을 알면

a node 에 대해 KCL 을 적용하면

$$\frac{10-V_x}{10} + 4 = \frac{V_x}{10} + C\frac{dV_x}{dt}$$

$$25 - V_x = 5C\frac{dV_x}{dt} \qquad \frac{1}{25-V_x}dV_x = \frac{1}{5C}dt$$

$$-\ln(25-V_x) = -\frac{1}{5C}t + R$$

$$\therefore V_x = 25 + Ae^{-\frac{1}{5C}t}$$

그런데. $t=0^-$ 에서 $V_x = 0V$ 이었으므로. $V_x(0^-) = V_x(0^+) = 0$

을 대입하면 $A = -25$

$$\therefore V_x = 25 - 25e^{-\frac{1}{5C}t}$$

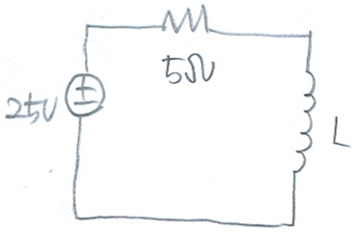
$t = 1ms$ 일 때 V_x 가 $15.8V$ 이므로 대입하면

$\therefore\ C \simeq 0.2mF$

- element X가 capacitor —— 4점.
- element X의 value ——— 6점.

(B).

Thevenin 등가회로를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.



i). $0 \le i_{Lx} \le 3A$ 일 경우 $L = 5mH$.

$i_{Lx}(0^-) = i_{Lx}(0^+) = 0$ 이므로

$i_{Lx}(t) = 5 - 5e^{-1000t}$

$i_{Lx} = 3A$ 일 때의 시간은 $3 = 5 - 5e^{-1000t}$ $\therefore t = \frac{1}{1000}\ln\frac{5}{2}$

해당하는 시간은 $0 \le t \le \frac{1}{1000}\ln\frac{5}{2}$

ii) $3A < i_{Lx}$ 일 경우 $L = 10mH$ 이고 $t > \frac{1}{1000}\ln\frac{5}{2}$

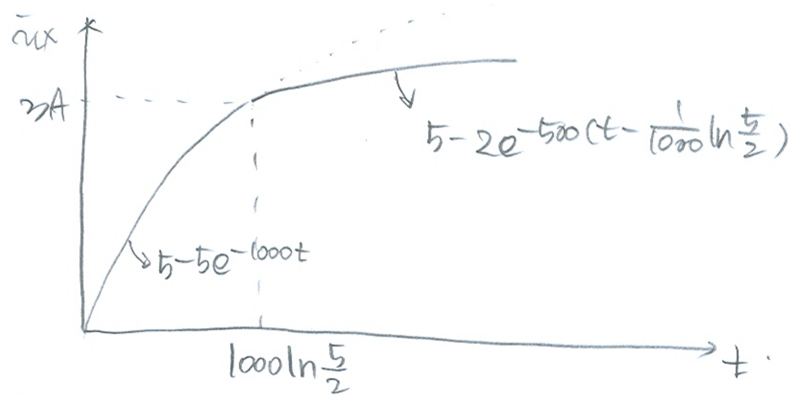
$t' = t - \frac{1}{1000}\ln\frac{5}{2}$로 두면 $t' > 0$ 에서

$i_{Lx}(0^-) = i_{Lx}(0^+) = 3A$

$\therefore i_{Lx}(t') = 5 - 2e^{-500t'}$.

$i_{Lx}(t) = 5 - 2e^{-500(t - \frac{1}{1000}\ln\frac{5}{2})}$

그래프를 그리면



$V_{Lx} = L\dfrac{di_{Lx}}{dt}$ 이므로

i) $0 \le t \le \dfrac{1}{1000}\ln\dfrac{5}{2}$ $\quad V_{Lx} = 25e^{-1000t}$

ii) $\dfrac{1}{1000}\ln\dfrac{5}{2} < t$ $\quad V_{Lx} = 10e^{-500\left(t-\frac{1}{1000}\ln\frac{5}{2}\right)}$

그래프를 그리면