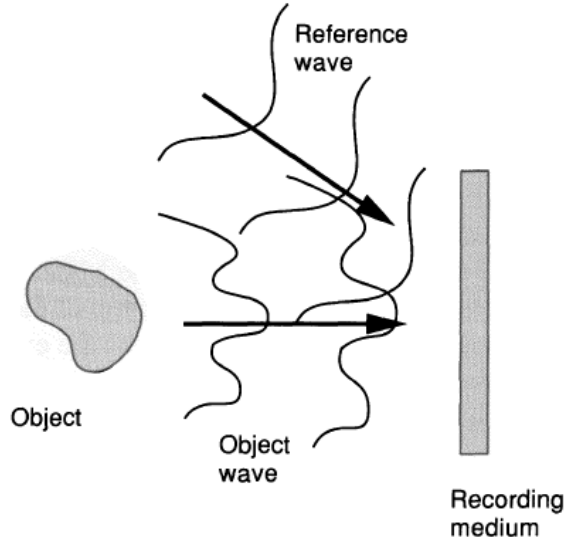


1. (20 점) Thin amplitude hologram 을 가정하고, hologram writing/reading 원리를 수식을 사용하여 설명하시오. 또한 다음의 의미를 설명하시오: virtual image, real image, orthoscopic image, pseudoscopic image



Off-axis thin amplitude hologram 을 가정하면 기록 (writing) 과정은 위와 같다. 이 때, Reference wave 와 object wave 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$a(x, y) = |a(x, y)| \exp[-j\phi(x, y)]$$

$$A(x, y) = |A(x, y)| \exp[-j\psi(x, y)]$$

이 때, 두 wave 가 간섭해서 생기는 간섭 무늬에 따른 intensity 는 아래와 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathcal{I}(x, y) = |A(x, y)|^2 + |a(x, y)|^2 + 2|A(x, y)||a(x, y)| \cos[\psi(x, y) - \phi(x, y)].$$

이 때, recording medium 의 굴절률은 조사되는 빛의 intensity 에 비례한다고 알려져 있다. 그렇기에 최종적으로 writing 된 recording medium 의 transparency 는 아래와 같다.

$$t_A(x, y) = t_b + \beta' (|a|^2 + A^*a + Aa^*)$$

이러한 recording medium 에 다시 reference wave 를 조사시켜 object wave 를 reconstruction 시키는 과정을 hologram 을 reading 한다 할 수 있는데, 이는 아래 수식으로 나타낼 수 있다.

$$B(x, y)t_A(x, y) = t_bB + \beta'aa^*B + \beta'A^*Ba + \beta'ABa^*$$

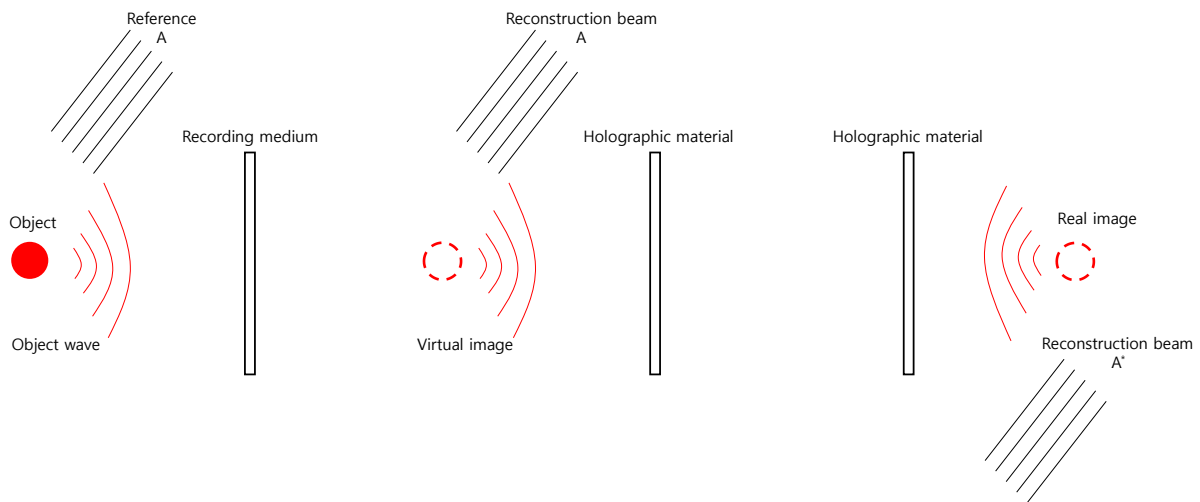
$$= U_1 + U_2 + U_3 + U_4.$$

여기서 $B(x,y)$ 는 위에서 언급한 reference 광과 일치하는 광을 의미한다. 그렇게 되면 세 번째 term 인 U_3 와 U_4 는 아래와 같이 나타내어 진다.

$$U_3(x, y) = \beta'|A|^2a(x, y).$$

$$U_4(x, y) = \beta'|A|^2a^*(x, y).$$

이 때, U_3 가 object wave 가 복원된 term 이라 할 수 있으며, U_4 의 경우에는 $a(x,y)$ 의 conjugate 꼴로 나타내어 지며, original wave 가 역전되어서 복원된 것으로 볼 수 있다.



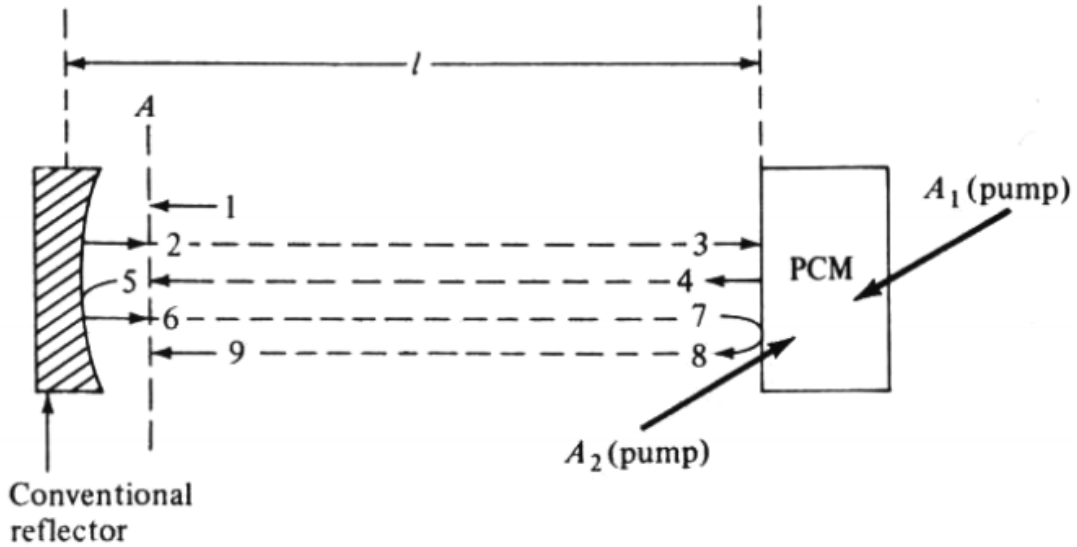
이 때, object wave 를 복원한 U_3 의 경우, object wavefront 가 실제 object 의 위치로부터 발산하는 것처럼 보이기 때문에, virtual image 를 형성한다고 일컫는다. 그에 반대로 phase conjugate term 인 U_4 의 경우 실제로 공간상에 빛을 focusing 시키는 것과 같이 상을 만들기 때문에, real image 를 형성한다고 일컫는다. 각각 orthoscopic image 와 pseudoscopic image 는 깊이가 실제 object 를 관측하는 방향을 기준으로 제대로 관측되는 image 와 깊이가 역전된 image 를 이야기 하는데, U_3 의 경우에는 object 에서 발산하는 완벽한 깊이를 나타내는 wavefront 를 재생하지만, U_4 의 경우에는 phase conjugate 됨으로써 파면(깊이)이 역전되어 관측자에게 관찰되는 pseudoscopic image 를 재생한다.

채점 기준

- Thin amplitude hologram 의 reading/writing 의 원리를 수식으로 잘 표현하였는가 (10 점)

- Virtual image, real image, orthoscopic image, pseudoscopic image 를 각각 잘 설명하였는가 (각 2.5 점)

2. (15 점) 다음 그림이 설명하고자 하는 바를 수식들을 사용하여 설명하시오.



PCR (phase conjugate reflector)를 이용한 optical resonator 이다.

그림의 A 면에 처음 입사하는 1 번 빛의 phase 를 ϕ_1 이라 하면 conventional reflector 에 반사되어 나온 2 번 빛의 phase ϕ_2 는 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_2 = \phi_1 + \phi_R$$

이 때, ϕ_R 은 conventional mirror 의 곡면반사에 의해 변조되는 phase 값을 의미한다. 같은 원리로 PCM 에 입사하는 3 번 빛의 phase 는 아래와 같이 나타낼 수 있는데,

$$\phi_3 = \phi_2 + \phi_l(m, n) = \phi_1 + \phi_R + \phi_l(m, n)$$

$\phi_l(m, n)$ 은 l 만큼의 거리를 진행하기 때문에 변조되는 phase 값을 의미한다. 이렇게 진행해온 빛은 PCM 에 의해 phase conjugate 되어 반사되어 빛 4 를 형성하게 되는데 이때의 phase ϕ_4 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_4 = -\phi_3 + \alpha = -(\phi_1 + \phi_R + \phi_l(m, n)) + \alpha$$

PCM 에 의해 입사한 빛의 phase 인 ϕ_3 은 conjugate 되게 되고, PCM 내부에서 추가적인 α 만큼의 phase 변화가 생기게 된다. 이와 같은 방식으로 conventional reflector 와 l 만큼의 propagation, 그리고 PCM 에 의해 변조되는 phase 들은 두번의 왕복에 의해 ϕ_1 의 phase 를 회복하게 된다. 이로 인해 resonator 로써 동작할 수 있다. 아래에 resonator 로서의 전체 과정을 수식으로 나타내었다.

$$\phi_2 = \phi_1 + \phi_R$$

$$\phi_3 = \phi_2 + \phi_l(m, n) = \phi_1 + \phi_R + \phi_l(m, n)$$

$$\phi_4 = -\phi_3 + \alpha = -(\phi_1 + \phi_R + \phi_l(m, n)) + \alpha$$

$$\phi_5 = \phi_4 + \phi_l(m, n) = -\phi_1 - \phi_R + \alpha$$

$$\phi_6 = \phi_5 + \phi_R = -\phi_1 + \alpha$$

$$\phi_7 = \phi_6 + \phi_l(m, n) = -\phi_1 + \alpha + \phi_l(m, n)$$

$$\phi_8 = -\phi_7 + \alpha = \phi_1 - \phi_l(m, n)$$

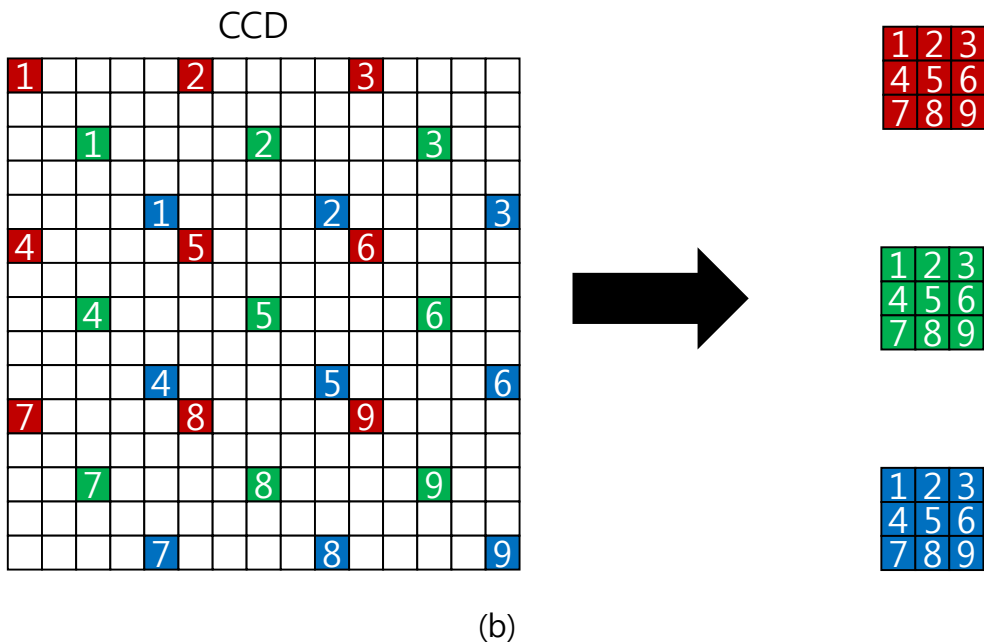
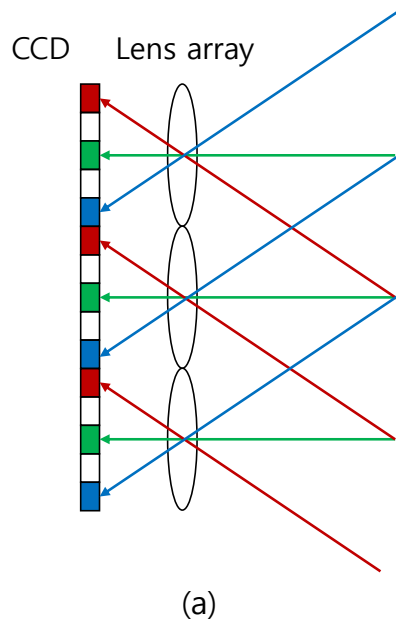
$$\phi_9 = \phi_8 + \phi_l(m, n) = \phi_1$$

채점기준

- 그림이 PCM 을 이용하여 resonator 를 구성한다는 점을 잘 설명한 경우 (5 점)
- ϕ_9 이 ϕ_1 이 되는 과정을 수식으로 모두 서술하였을 경우 (5 점)
- ϕ_R , $\phi_l(m,n)$ 과 같은 수식에서의 변수들의 의미를 잘 설명하였을 경우 (5 점)

3. (15 점) Light field imaging (integral imaging)에서 한 번 찍은 영상 (single-shot image)으로부터 방향별 영상과 깊이별로 포커싱 (focusing)된 영상을 만들어 내는 방법을 설명하시오.

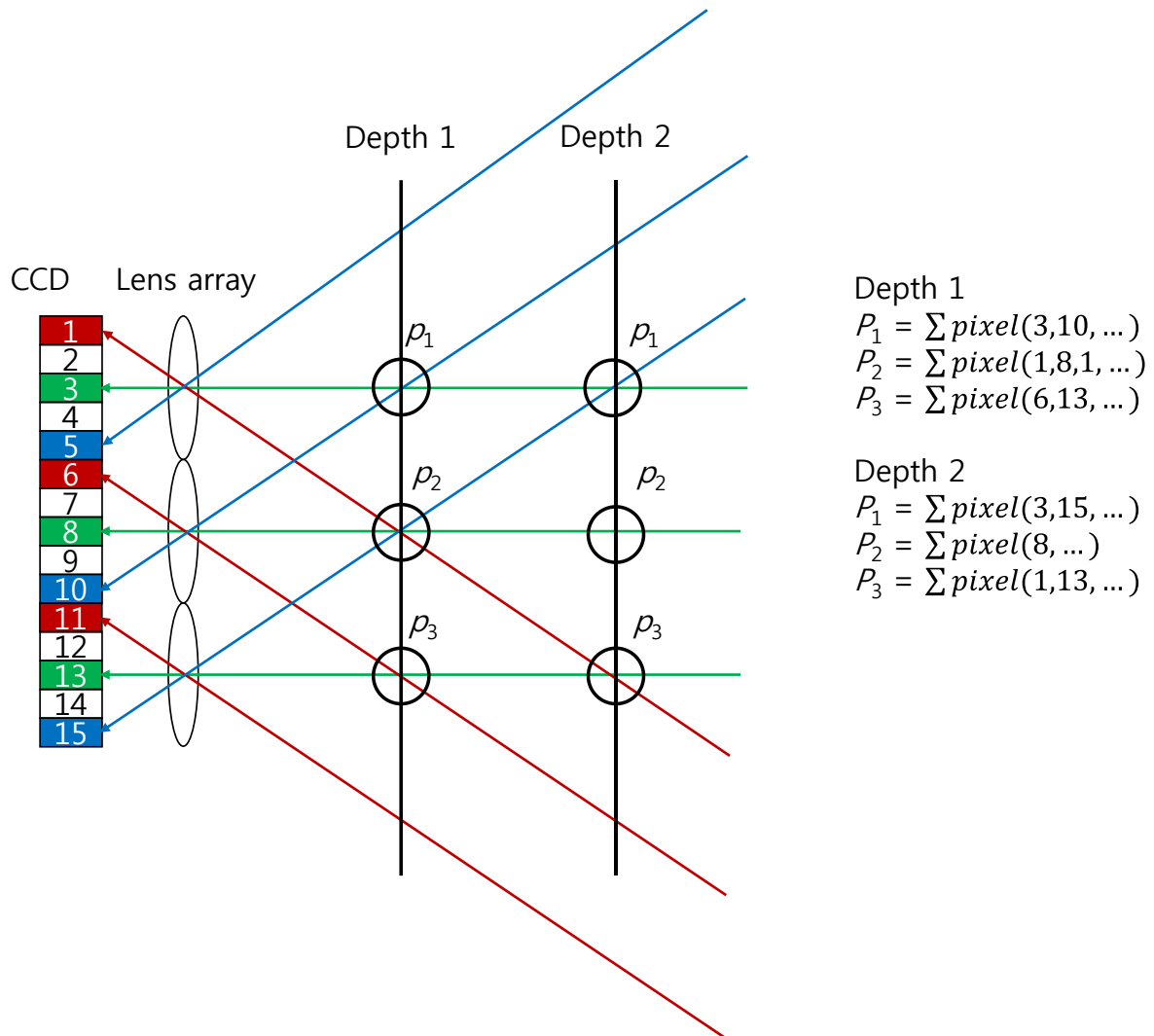
Light field imaging (integral imaging) 의 방향 별 영상 추출



Light field imaging (integral imaging)에서의 방향별 성분 추출 방법은 위와 같다. 렌즈 어레이에 의해서 CCD 에 얻어진 영상은 그림 (a)와 같이 픽셀 별로 각각 다른

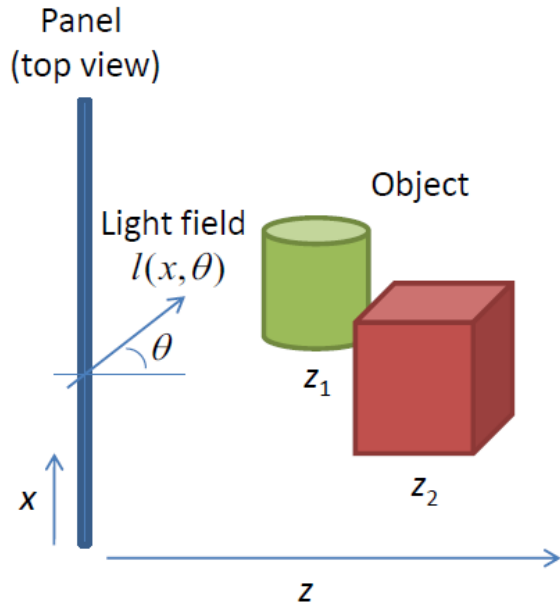
방향 별 성분을 가지고 있다. 이를 이용하여 그림 (b)와 같이 같은 방향 별 성분을 가지는 픽셀들을 모아 순차적으로 배열하면 방향별 영상을 추출할 수 있다.

Light field imaging (integral imaging) 의 refocusing 영상 추출



Light field imaging (integral imaging) 에서의 영상 refocusing 원리는 위 그림과 같다. 렌즈 어레이에 의해 얻어진 CCD 에서의 영상은 위에서 설명한 바와 같이 방향별 성분을 가지고 있는데, 이를 이용하여 각 깊이에서의 공간상의 픽셀을 나타낼 수 있다. 예를 들어 그림에서의 depth 1 에서의 공간방향의 성분인 p_1, p_2, p_3 는 오른쪽 수식과 같이 CCD 의 픽셀의 합으로 나타낼 수 있다. 이를 이용하여 다른 깊이 방향에서의 p_1, p_2, p_3 또한 CCD 의 다른 pixel 의 조합으로 나타낼 수 있기 때문에, refocusing 영상을 추출할 수 있다.

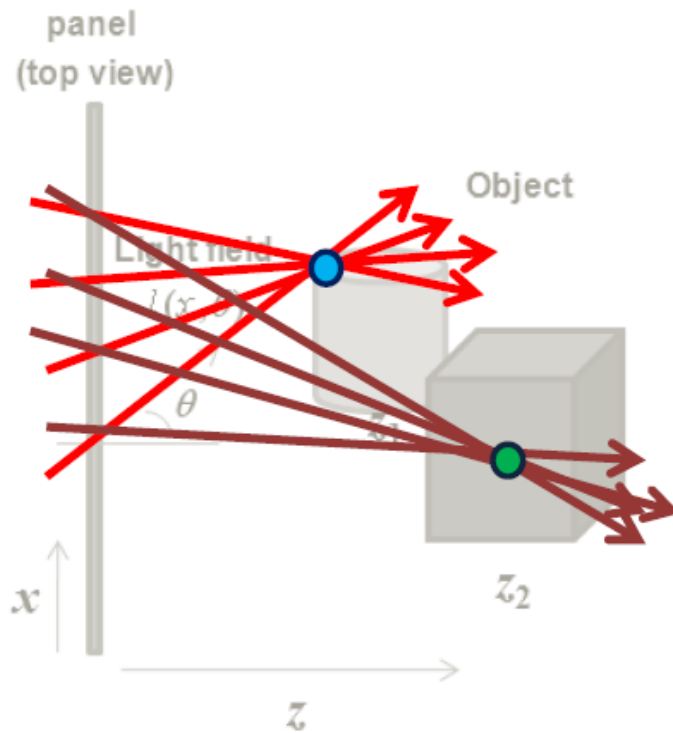
또 다른 방법으로는, light field 를 Fourier transform 을 통해 Fourier domain 에서 분석하는 방법을 이용할 수 있는데, 기본 과정은 아래와 같다.



$$l(x, \theta) = f(x + \theta z)$$

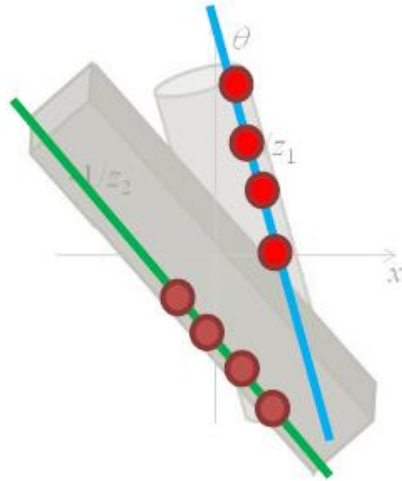
Light field Object function

Panel 에서 나오는 각각의 light field 를 위 그림과 같이 나타낼 수 있는데, 각각의 rays 들을 $l(x, \theta)$ 라 나타낼 수 있다. 이 때, 각 깊이 방향에서의 두 점을 나타내면 아래 그림과 같다.

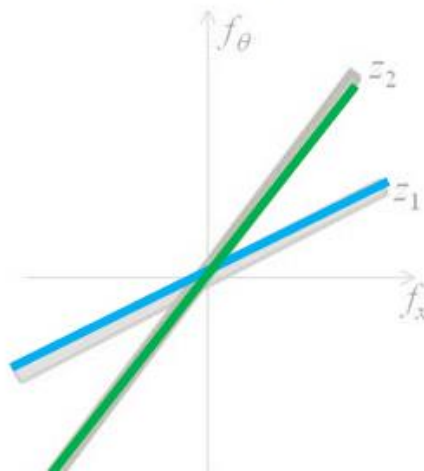


이 때, 각 파란 점을 구성하는 ray 들과 초록 점을 구성하는 ray 들을 (θ, x) domain 에 나타내면 아래 그림과 같다. 이렇게 나타낸 light field 들을 Fourier transform 을 하면 아래 식과 같이 나타나게 되고, 아래 그림과 같이 표현 할 수 있다.

Light field in spatio-angular domain



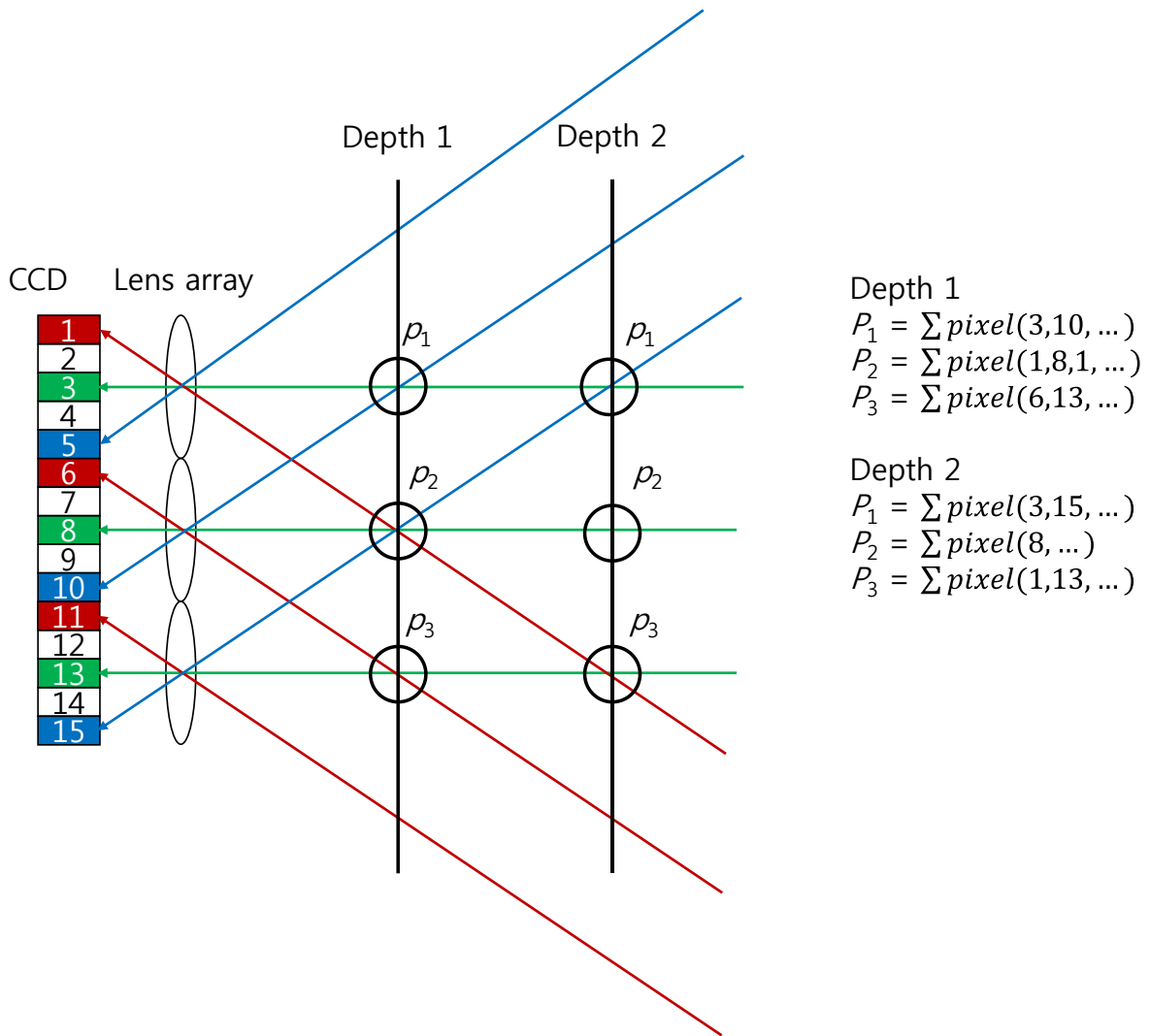
Light field in spatio-angular frequency domain



Fourier Transform of Light field

$$L(f_x, f_\theta) = \iint f(x + \theta z) e^{-j2\pi(f_x x + f_\theta \theta)} dx d\theta$$

$$= F(f_x) \delta(f_x z - f_\theta)$$



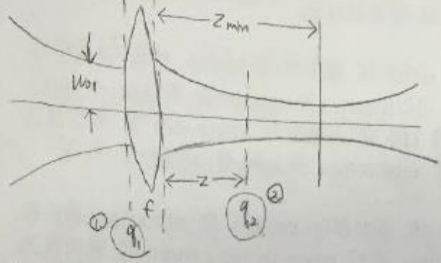
이 때의 depth refocusing 은 다음과 같은 과정을 따른다. 우선 위의 CCD 에 캡처된 각각의 pixel 들은 lens array 및 CCD 의 성능에 의해 light field 를 이루는 기본 성분인 θ 와 x 가 정해진다. 이 때, 위에서 설명한 ray 기반의 Summation 으로 나타내어진 depth 1 의 p_1, p_2, p_3 는 (θ, x) domain 에서 같은 기울기를 가지고 다른 y -절편을 가지는 그래프로 나타나게 된다. 이를 합해주게 되면, depth 1 에 focusing 이 된 영상을 얻을 수 있으며, depth 2 의 경우에는 같은 방식으로 기울기만 달라짐을 쉽게 알 수 있다. 이렇듯 각각 다른 기울기의 그래프의 summation 이 다른 깊이의 refocusing 을 나타냄을 아는 것이 중요하다.

채점 기준

- Light field imaging (integral imaging) 의 기본원리에 대해 서술이 되어 있는가 (5 점)
- Light field imaging (integral imaging) 의 방향별 성분 추출 원리를 제대로 설명했는가 (5 점)

- Light field imaging (integral imaging) 의 refocusing 원리를 제대로 설명했는가 (5 점)

4. A Gaussian laser beam with a beam waist W_{01} is incident on the lens with focal length f . The wavelength of light is λ . Find the distance Z_{\min} from the lens to the beam waist behind the lens as shown in the following figure.



각 위치에서의 ABCD Law를 적용한 complex parameter (q)를 사용하자.

① $\frac{1}{q_1(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} = \frac{1}{\infty} - j \frac{\lambda_0}{\pi W_{01}^2 n} = -j \frac{\lambda_0}{\pi W_{01}^2 n} = \frac{1}{j Z_{01}}, \quad q_1(z) = j Z_{01}, \quad (Z_{01} = \frac{\pi W_{01}^2 n}{\lambda_0})$

② $q_2(z) = \frac{A q_1(z) + B}{C q_1(z) + D} = \frac{(1 - \frac{z}{f}) q_1(z) + z}{-\frac{1}{f} q_1(z) + 1}$

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{q_2(z)} = \frac{-\frac{1}{f} j Z_{01} + z}{(1 - \frac{z}{f}) j Z_{01} + z} = \frac{1}{(1 - \frac{z}{f})^2 + (\frac{z}{Z_{01}})^2} \cdot \left[\frac{z}{Z_{01}^2} - \frac{1}{f} (1 - \frac{z}{f}) + j \left(\frac{1}{Z_{01}} (1 - \frac{z}{f}) - \frac{1}{f} \cdot \frac{z}{Z_{01}} \right) \right]$

$= \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$

Z_{\min} 위치는 $R = \infty$ 인 경우이므로, $\frac{1}{R(z)} = \frac{-\frac{1}{f} + z(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{Z_{01}^2})}{(1 - \frac{z}{f})^2 + (\frac{z}{Z_{01}})^2} = 0, \quad Z_{\min} = \frac{f}{1 + (\frac{f}{Z_{01}})^2}$

$\therefore Z_{\min} = \frac{f}{1 + (\frac{f}{Z_{01}})^2}$

5. (15 점) Zernike polynomials 가 무엇이고 어디에 이용되는지 설명하시오.
 수학적으로 Zernike polynomial 이란 unit disk 에서 직교하는 함수들의 집합을 의미한다. 이를 식으로 나타내면 아래와 같다.

$$Z_n^m(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \cos(m \varphi)$$

$$Z_n^{-m}(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \sin(m \varphi),$$

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}$$

각각, 짝수와 홀수차의 Zernike polynomials 이다. 위의 정의와 같이 각각 radial part 와 angular part 는 아래와 같이 직교하게 된다.

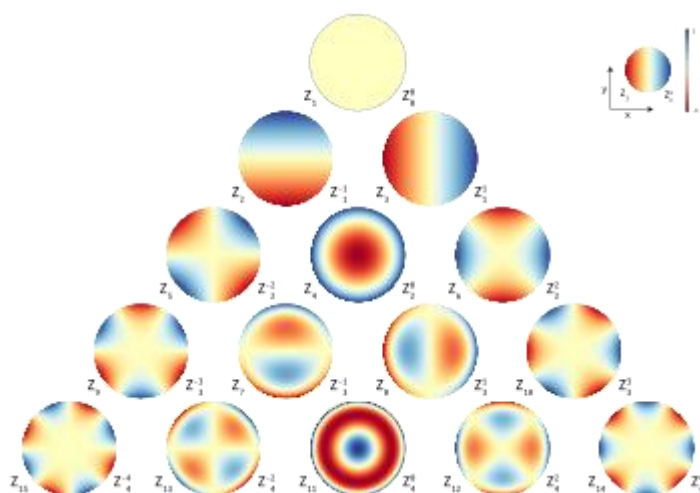
$$\int_0^1 \rho \sqrt{2n+2} R_n^m(\rho) \sqrt{2n'+2} R_{n'}^{m'}(\rho) d\rho = \delta_{n,n'}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = \epsilon_m \pi \delta_{|m|,|m'|},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = (-1)^{m+m'} \pi \delta_{|m|,|m'|}; \quad m \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = 0,$$

이렇게 나타내어진 Zernike polynomials 들의 초기 몇 개의 항들을 나타내면 아래와 같다.



| Z_j | Classical name |
|---|----------------------------------|
| 1 | Piston |
| $2\rho \cos \theta$ | Tip (lateral position) (X-Tilt) |
| $2\rho \sin \theta$ | Tilt (lateral position) (Y-Tilt) |
| $\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$ | Defocus (longitudinal position) |
| $\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$ | Oblique astigmatism |
| $\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$ | Vertical astigmatism |
| $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$ | Vertical coma |
| $\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$ | Horizontal coma |
| $\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$ | Vertical trefoil |
| $\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$ | Oblique trefoil |
| $\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ | Primary spherical |
| $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$ | Vertical secondary astigmatism |
| $\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$ | Oblique secondary astigmatism |
| $\sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$ | Vertical quadrafoil |
| $\sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$ | Oblique quadrafoil |

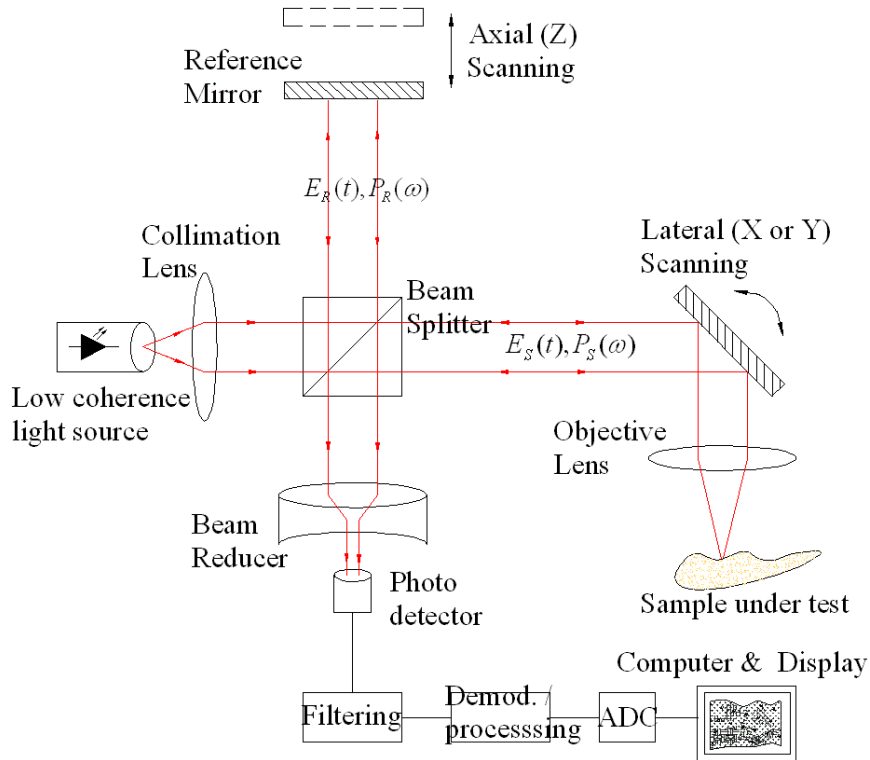
이러한 Zernike polynomials 는 광학계에서의 수차 (aberration)을 나타내는데 Zernike polynomials 의 각각의 다항식이 하나의 수차들을 의미한다. 그렇기에 Zernike polynomials 의 합으로 고차 및 다양한 왜곡된 wavefront 들을 표현 할 수 있다.

채점 기준

- Zernike polynomials 의 수학적 정의 및 수식을 서술하였는가 (5 점)
- Zernike polynomials 가 광학계의 수차를 표현하며 이의 합으로 고차원의 수차를 표현함을 서술하였는가 (10 점)

6. (15 점) Optical Coherence Tomography 의 원리를 설명하시오.

Optical Coherence Tomography (OCT) 는 간섭계 (interferometry) 의 원리를 이용하여 살아있는 (*in vivo*) 시료의 가로 (lateral) 방향뿐 아니라 깊이 (axial) 방향의 정보를 tomography 의 원리를 이용하여 얻어내는 방법이다. OCT 의 기본 원리는 아래 그림과 같은데,



일반적인 Michelson type 간섭계의 형태를 통해 예를 들기 쉬운데, Beam splitter 를 통해 분리된 빛은 시료에 의해 반사되는 빛과 Reference mirror 에 의해 반사되는 빛으로 나뉘게 된다. 이때 Coherence 한 광원을 사용하게 되면, 시료에서 반된 빛은 Beam splitter 를 통해 photo detector 에서 간섭을 일으키게 된다. OCT 에서는 이러한 간섭 패턴을 분석해서 후처리 과정을 통해 영상을 얻어내는데, 시료단에 달려있는 mirror 를 scanning 함으로써 가로방향 영상을 얻어낼 수 있다. 또한 reference mirror 의 위치를 변경시키는 방법 (piezo 등을 이용)을 통해 OPD(optical path difference)를 조정하여 시료의 다른 깊이 방향의 정보를 얻어 낼 수 있다. 이 때, 원하는 깊이 방향의 정보만이 간섭되게 하기 위해서, 짧은 coherence length 를 가지는 low coherence light source 를 사용해야 한다.

채점기준

- 간섭계를 사용한 OCT 의 기본 원리를 설명하였는가 (10 점)

- 깊이 (axial) 방향 정보 획득을 위해 low coherence light 를 사용하는 이유를 설명하였는가 (5 점)