[Problem 3] (10 points) Consider the following matrix form of a linear system

$$Ax = b \tag{3.1}$$

where $A \in R^{n \times n}$, $x \in R^n$, $b \in R^n$. Let $\hat{A}$ be the n x n matrix consisting of the first n column vectors of the row echelon form obtained at the end of Gauss elimination. Also, let $\hat{b}$ be the last column vector of the row echelon form. Then, prove by use of elementary matrices that if $\hat{x}$ is the solution of $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, then $\hat{x} = x$.(Strictly speaking, $\hat{x}$ is also the solution of (3.1))

Sol.)

Elementary operation은 3가지가 있는데 다음과 같다.(교재 p292)

(i) Interchange of two rows
(ii) Additon of a constant multiple of one row to another row
(iii) Multiplication of a row by a nonzero constant c

Gauss elimination을 하려면 위 3가지 operation을 수행해야 하는데 elementary matrix로 위 3가지 operation을 수행할 있음을 보이도록 하겠다.

I_n 을 $n \times n$ matrix라고 하자. 그리고 E_i 를 i th 항이 1이고 다른 항은 0이 되는 $1 \times m$ row-vector 라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_i \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n}, \quad I_n \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

I_n 의 i 번째 row와 j 번째 row를 바꿔서 구한 matrix를 E_{ij} 라고 하자.

i 번째 row에 scalar $\alpha \neq 0$ 배만큼 곱하여 구한 matrix를 $E_{i(\alpha)}$ 라고 하자.

j 번째 row에 scalar α 배만큼 곱하고 i 번째 row에 곱하여 구한 matrix를 $E_{\alpha(j)+i}$ 이라고 하자.

그러면, E_{ij}, $E_{i(\alpha)}$, $E_{\alpha(j)+i}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$E_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_j \\ \vdots \\ e_{i+1} \\ e_{j-1} \\ e_i \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad E_{i(\alpha)} \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ \alpha e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix}, \quad E_{\alpha(j)+i} \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i + \alpha e_j \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{j-1} \\ e_j \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

[Problem 2] Find an eigenbasis and diagonalize(Show the details)

$$\begin{bmatrix} -2.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -4 & 6 \\ -6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

Sol.)

$$|A-\lambda I| = -\lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 1.5\lambda - 1$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0.5,\ \lambda_3 = -1$$

$$A-2I = \begin{bmatrix} -4.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4.5 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = [0\ 1\ 1]^T$$

$$A-0.5I = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -4.5 & -4.5 & 6 \\ -6 & -6 & 7.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = [1\ -1\ 0]^T$$

$$A+I = \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = [2\ 1\ 2]^T$$

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ X^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

여기에서 E_{ij} , $E_{i(\alpha)}$, E_{i+j} 가 elementary matrix인데

$$\begin{aligned} &E_{ij}E_{ji} = E_{ij}E_{ji} = I_n \\ &E_{i(\alpha)}E_{i(1/\alpha)} = E_{i(1/\alpha)}E_{i(\alpha)} = I_n \\ &E_{i+j}E_{i-j} = E_{i-j}E_{i+j} = I_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 elementary matrices E_{ij} , $E_{i(\alpha)}$, E_{i+j} 가 nonsingular임을 알 수 있다.

이제 $\hat{x}$ 을

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b} \tag{3.5}$$

의 해라고 하자. 그러면 $\hat{A}$ 와 $\hat{b}$ 는 각각 A 와 b 를 elementary row operation을 하여 나온 결과물이다. 따라서, 앞에서 보였듯이 $n \times n$ matrix $\hat{A}$ 와 n column vector $\hat{b}$ 은 elementary matrix로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{A} &= E_n E_{n-1} \cdots E_1 A \\ \hat{b} &= E_n E_{n-1} \cdots E_1 b \end{aligned} \tag{3.6}$$

이것을 식(3.1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{gathered} Ax = b \\ E_n E_{n-1} \cdots E_1 A\hat{x} = (E_n E_{n-1} \cdots E_1)\hat{b} \end{gathered} \tag{3.7}$$

그런데 식(3.4)에 의해 (3.7)로부터

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{x} &= (E_n E_{n-1} \cdots E_1)^{-1}(E_n E_{n-1} \cdots E_1)\hat{b} \\ &= E_1^{-1} \cdots E_n^{-1} E_n E_{n-1} \cdots E_1 \hat{b} \\ &= \hat{b} \end{aligned} \tag{3.8}$$

따라서, $\hat{x}$ 이 식(3.1)의 solution이 됨을 알 수 있다.

[problem 6](10 points) Test for the exactness of the following equations. If exact, solve the equations. If not, use an integrating factor to solve the equations.

(a) $2y^{-1}\cos 2x dx = y^{-2}\sin 2x dy$

(b) $2xy dy = (x^2+y^2)dx$

Sol.)

(a)

$$P = 2y^{-1}\cos 2x,\ Q = -y^{-2}\sin 2x$$
$$P_y = -2y^{-2}\cos 2x = Q_x \Rightarrow exact$$
$$u = \int Pdx + k(y) = 2y^{-1}\int \cos 2x dx + k(y)$$
$$= y^{-1}\sin 2x + k(y)$$
$$\frac{du}{dy} = -y^{-2}\sin 2x + k' = Q = -y^{-2}\sin 2x \text{로부터 } k' = 0,\ k = \text{상수}$$
$$u = y^{-1}\sin 2x + c$$

(b)

$$P = x^2+y^2,\ Q = -2xy$$
$$P_y = 2y \neq -2y = Q_y \Rightarrow exact\text{가 아니다}$$
$$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = -\frac{2}{x}$$
$$F(x) = \exp\int -\frac{2}{x}dx = x^{-2}$$
$$u = \int FPdx + k(y) = \int 1 + x^{-2}y^2 dx + k(y)$$
$$= x - \frac{y^2}{x} + k(y)$$
$$\frac{du}{dy} = -\frac{2y}{x} + k' = FQ = -\frac{2y}{x} \text{ 로부터}$$
$$k' = 0,\ k = \text{상수}$$
$$u = x - \frac{y^2}{x} + c$$

[Problem 5] (10 points) Consider 1st order nonhomogeneous linear ODEs.
(a) Find the general solution of the following equation based on mathematically logical development

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{5.1}$$

Sol.) 식(5.1)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$(py - r)dx + dy = 0 \tag{5.2}$$

위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다(교재 p.23에서 식(12)).

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{5.3}$$

따라서, $P(x, y)$ 와 $Q(x, y)$ 은 다음과 같다.

$$P(x, y) \stackrel{\Delta}{=} py - r,\ Q(x, y) \stackrel{\Delta}{=} 1 \tag{5.4}$$

식(5.3)에 integration factor F 를 곱해주면,

$$FPdx + FQdy = 0 \tag{5.5}$$

Exactness condition에 따르면,

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \tag{5.6}$$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x \tag{5.7}$$

$F = F(x)$ 라고 두면 식(5.7)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$FP_y = F'Q + FQ_x \tag{5.8}$$

식(5.8)를 양변을 FQ 로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = p(x) \tag{5.9}$$

위 식을 이용하여 $F(x)$ 를 구하면 다음과 같다.(p.24의 Theorem1)

$$\begin{gathered} \frac{1}{F}dF = pdx \\ F(x) = e^{\int pdx} \end{gathered} \tag{5.10}$$

구한 $F(x)$ 를 식(5.5)에 대입하면,

$$\begin{gathered} FPdx + FQdy = 0 \\ e^{\int pdx}(py - r)dx + e^{\int pdx}dy = 0 \\ e^{\int pdx}(pydx + dy) = e^{\int pdx}rdx \end{gathered} \tag{5.11}$$

식(5.11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d(e^{\int pdx}y) = e^{\int pdx}r(x)dx \tag{5.12}$$

식(5.12)의 양변을 적분하면,

$$e^{\int pdx}y = \int e^{\int pdx}r(x)dx + c \tag{5.13}$$

여기에서 c 는 initial condition에 결정되는 상수이다.

$e^{\int pdx}$ 으로 식(5.13) 양변을 나누면 general solution을 구할 수 있다.

$$y(x) = e^{-\int pdx}\left(\int e^{\int pdx}rdx + c\right) \tag{5.14}$$

(b) Find the particular solution of the following equation using the formula obtained in 5(a).

$y' - (1+3x^{-1})y = x+2, \quad y(1) = e-1$

Sol.)

$$p = -(1+3x^{-1}),\ r = x+2$$
$$h = -x - 3\ln x,\ e^{h} = e^{-x}x^{-3}$$
$$y = e^{x}x^{3}\left[\int e^{-x}x^{-3}(x+2)dx + c\right]$$
$$\int e^{-x}x^{-3}dx = -e^{-x}x^{-2} - 2\int e^{-x}x^{-3}dx$$

이용해서 위의 적분을 계산하면,

$y = cx^{3}e^{x} - x$, 초기조건에서 $c = 1$

[problem 5] (20 points).

a. $b=\frac{1}{4}(1-a)^2$을 보조방정식에 대입하면

$m^2+(a-1)m+\frac{1}{4}(1-a)^2=0$

$\left(m-\frac{1}{2}(1-a)\right)^2$으로부터 첫 번째 해 $y_1=x^{(1-a)/2}$

두 번째 해 y_2는 차수축소법에 의해 $y_2=uy_1$

$x^2\left(u''y_1+2u'y_1'+uy_1''\right)+ax\left(u'y_1+uy_1'\right)+buy_1=0$

식을 정리하면

$u''x^2y_1'+ay_1=(1-a)x^{(1-a)/2}+ax^{(1-a)/2}=x^{(1-a)/2}=y_1$

양변을 y_1으로 나누고, 변수를 분리 하여 적분하면 $(x>0)$

$\frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x}, \ln|u'|=-\ln x, u'=\frac{1}{x}, u=\ln x$를 얻는다.

따라서 $y_2=\ln x y_1$

이에 해당하는 일반해는

$y=(c_1+c_2\ln x)x^{(1-a)/2}$ (c_1, c_2는 임의의 상수)

b. 보조방정식 $m^2-2m+1=0$을 풀면

$m=1$(중근) 이므로

일반해는 $y=(c_1+c_2\ln x)x$

c_1, c_2는 임의의 상수