[Problem 1] (10 points) Find the inverse and the determinant of a general 3 x 3 matrix A = [a_{jk}] explicitly in terms of the a_{jk} 's.

Sol.)

1) Determinent

A를 다음과 같이 가정하면 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, (1.1)

3x3 matrix A의 determinent는 Section 7.6의 (4)의 정의에 의해,

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \tag{1.3}$$

2) Inverse

Proof) A가 nonsingular라고 가정했을 때, $A=[a_{jk}]$ 의 inverse는 다음과 같이 주어진다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[C_{jk}\right]^T = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

여기서, $C_{jk} = (-1)^{j+k}M_{jk}$ 는 D에서 a_{jk}의 cofactor이다.

이제 식 (1,3), (1.4)를 이용하면,

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{D}\left[C_{jk}\right]^T = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

여기서,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{22}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{33} - a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

[Problem 2] (10 points) Find an eigenbasis of the following matrix and diagonalize the matrix (Show the details).

$$\begin{bmatrix} -2.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -4 & 6 \\ -6 & -6 & 8 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Sol.) (a) eigenvalue

$$Ax = \lambda x \tag{2.2}$$

여기서 λ 는 임의의 상수이며, characteristic matrix는

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{2.3}$$

Characteristic equation $\det(A-\lambda I)=0$ 를 만족하는 λ 값을 구하면, ((2.3)이 $\det(A-\lambda I)=0$ 일 때 nontrivial solution $x \neq 0$ 을 갖는다.)

$\lambda = 2,\ 0.5,\ -1$

(b) eigenbasis

i) $\lambda = 2$ 일 때

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{bmatrix} -4.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -4.5 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \ (\text{2nd row - 1st row}) \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -4.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{1st row - 2nd row} \\ \text{3rd row - 2*(2nd row)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

여기서 eigenbasis는 $[0 \quad 1 \quad 1]^T$

ii) $\lambda = 0.5$ 일 때

$$\begin{aligned} A - 0.5I &= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -4.5 & -4.5 & 6 \\ -6 & -6 & 7.5 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{2nd row - 2/3*(1st row)} \\ \text{3rd row - 2*(1st row)} \end{Bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (\text{3rd row - 2nd row}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

여기서 eigenbasis는 $[1 \quad -1 \quad 0]^T$

iii) $\lambda = -1$ 일 때

$$A + I = \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$=> \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{2nd row - 3*(1st row)} \\ \text{3rd row - 4*(1st row)} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

$$=> \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{2*(1st row)} + \text{3rd row} \\ \text{3rd row - 2nd row} \end{Bmatrix}$$

여기서 eigenbasis는 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$

(c) diagonalization

Eigenvectors X과 그것의 inverse인 X^{-1}을 구하면,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Diagonal matrix는

$$D = XAX^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

가 된다.

[Problem 3] (10 points) Consider the following matrix form of a linear system

$$Ax = b \tag{3.1}$$

where $A \in R^{n \times n}$, $x \in R^n$, $b \in R^n$. Let $\hat{A}$ be the n x n matrix consisting of the first n column vectors of the row echelon form obtained at the end of Gauss elimination. Also, let $\hat{b}$ be the last column vector of the row echelon form. Then, prove by use of elementary matrices that if $\hat{x}$ is the solution of $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, then $\hat{x} = x$.(Strictly speaking, $\hat{x}$ is also the solution of (3.1))

Sol.)

Elementary operation은 3가지가 있는데 다음과 같다.(교재 p292)

(i) Interchange of two rows
(ii) Additon of a constant multiple of one row to another row
(iii) Multiplication of a row by a nonzero constant c

Gauss elimination을 하려면 위 3가지 operation을 수행해야 하는데 elementary matrix로 위 3가지 operation을 수행할 있음을 보이도록 하겠다.

I_n 을 $n \times n$ matrix라고 하자. 그리고 E_i 를 i th 항이 1이고 다른 항은 0이 되는 $1 \times m$ row-vector 라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_i \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n}, \quad I_n \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

I_n 의 i 번째 row와 j 번째 row를 바꿔서 구한 matrix를 E_{ij} 라고 하자.

i 번째 row에 scalar $\alpha \neq 0$ 배만큼 곱하여 구한 matrix를 $E_{i(\alpha)}$ 라고 하자.

j 번째 row에 scalar α 배만큼 곱하고 i 번째 row에 곱하여 구한 matrix를 $E_{\alpha(j)+i}$ 이라고 하자.

그러면, E_{ij} , $E_{i(\alpha)}$, $E_{\alpha(j)+i}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$E_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_j \\ \vdots \\ e_{i+1} \\ e_{j-1} \\ e_i \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad E_{i(\alpha)} \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ \alpha e_i \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{bmatrix}, \quad E_{\alpha(j)+i} \triangleq \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i + \alpha e_j \\ e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{j-1} \\ e_j \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

여기에서 E_{ij}, $E_{i(\alpha)}$, E_{i+j} 가 elementary matrix인데

$$\begin{aligned} E_{ij}E_{ji} &= E_{ij}E_{ji} = I_n \\ E_{i(\alpha)}E_{i(1/\alpha)} &= E_{i(1/\alpha)}E_{i(\alpha)} = I_n \\ E_{i+j}E_{i-j} &= E_{i-j}E_{i+j} = I_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 elementary matrices E_{ij}, $E_{i(\alpha)}$, E_{i+j} 가 nonsingular임을 알 수 있다.

이제 $\hat{x}$ 을

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b} \tag{3.5}$$

의 해라고 하자. 그러면 $\hat{A}$ 와 $\hat{b}$ 는 각각 A 와 b 를 elementary row operation을 하여 나온 결과물이다. 따라서, 앞에서 보였듯이 $n \times n$ matrix $\hat{A}$ 와 n column vector $\hat{b}$ 은 elementary matrix로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{A} &= E_n E_{n-1} \cdots E_1 A \\ \hat{b} &= E_n E_{n-1} \cdots E_1 b \end{aligned} \tag{3.6}$$

이것을 식(3.1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{gathered} Ax = b \\ E_n E_{n-1} \cdots E_1 A\hat{x} = (E_n E_{n-1} \cdots E_1)\hat{b} \end{gathered} \tag{3.7}$$

그런데 식(3.4)에 의해 (3.7)로부터

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{x} &= (E_n E_{n-1} \cdots E_1)^{-1}(E_n E_{n-1} \cdots E_1)\hat{b} \\ &= E_1^{-1} \cdots E_n^{-1} E_n E_{n-1} \cdots E_1 \hat{b} \\ &= \hat{b} \end{aligned} \tag{3.8}$$

따라서, $\hat{x}$ 이 식(3.1)의 solution이 됨을 알 수 있다.

[Problem 4] (10 points) Show that the inverse A^{-1} of an n x n matrix A exist if and only if none of the eingenvalues $\lambda_{1,} \cdots, \lambda_n$ of A is zero, and then A^{-1} has the eigenvalues $1/\lambda_{1,} \cdots, 1/\lambda_n$.

Sol.)
i) if part
A의 characteristic equation으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\det(A-\lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)\cdot(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \tag{4.1}$$

(4.1)에 $\lambda = 0$을 대입하면,

$$\det(A - 0\cdot I) = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \tag{4.2}$$

(4.2)에서 A의 eigenvalue λ_1, λ_2, $\lambda_3, \ldots$ λ_n은 0이 아닌 값을 가지므로,

$$\det(A) \neq 0 \tag{4.3}$$

(4.3)과 Thm.3 (Sec.7.7)에 의해서 A의 rank는 n이므로, Thm.1(Sec.7.8)에 의해서, A의 inverse A^{-1}이 존재한다.

ii) only if part
$n \times n$ matrix A의 inverse A^{-1}이 존재한다고 하자. A의 inverse A^{-1}이 존재하므로, Thm.3(Sec.7.7)에 의해서

$$\det(A) \neq 0 \tag{4.4}$$

(4.4)에 의해서

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \neq 0 \tag{4.5}$$

(4.5)로부터 A의 모든 eigenvalue의 곱이 0이므로,

$$\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6}$$

iii)
A의 eigenvalue λ_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$)와 각각의 eigenvalue에 대응되는 A의 eigenvector x_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$)는 다음 식을 만족한다.

$$Ax_k = \lambda_k x_k,\ x_k \neq 0\ \left(k = 1, 2, 3, \ldots, n\right) \tag{4.7}$$

i), ii)에서 A의 inverse가 존재함을 보였으므로, (4.7)로부터

$$x_k = A^{-1}\lambda_k x_k \tag{4.8}$$

(4.6)으로부터 $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)이므로

$$A^{-1}x_k = \lambda_k^{-1} x_k \tag{4.9}$$

A^{-1}의 eigenvector가 A의 eigenvector와 같고, A^{-1}의 eigenvector에 대응되는 eigenvalue들이 λ_k^{-1} $\left(k = 1, 2, 3, \ldots, n\right)$이므로 A^{-1}의 eigenvalue들은 $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \dfrac{1}{\lambda_3}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n}$이다.

[Problem 5] (10 points) Consider 1st order nonhomogeneous linear ODEs.
(a) Find the general solution of the following equation based on mathematically logical development

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{5.1}$$

Sol.) 식(5.1)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$(py - r)dx + dy = 0 \tag{5.2}$$

위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다(교재 p.23에서 식(12)).

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5.3}$$

따라서, $P(x,y)$ 와 $Q(x,y)$ 은 다음과 같다.

$$P(x,y) \overset{\Delta}{=} py - r,\ Q(x,y) \overset{\Delta}{=} 1 \tag{5.4}$$

식(5.3)에 integration factor F 를 곱해주면,

$$FPdx + FQdy = 0 \tag{5.5}$$

Exactness condition에 따르면,

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \tag{5.6}$$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x \tag{5.7}$$

$F = F(x)$ 라고 두면 식(5.7)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$FP_y = F'Q + FQ_x \tag{5.8}$$

식(5.8)를 양변을 FQ 로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = p(x) \tag{5.9}$$

위 식을 이용하여 $F(x)$ 를 구하면 다음과 같다.(p.24의 Theorem1)

$$\begin{gathered} \frac{1}{F}dF = pdx \\ F(x) = e^{\int pdx} \end{gathered} \tag{5.10}$$

구한 $F(x)$ 를 식(5.5)에 대입하면,

$$\begin{gathered} FPdx + FQdy = 0 \\ e^{\int pdx}(py - r)dx + e^{\int pdx}dy = 0 \\ e^{\int pdx}(pydx + dy) = e^{\int pdx}rdx \end{gathered} \tag{5.11}$$

식(5.11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d(e^{\int pdx}y) = e^{\int pdx}r(x)dx \tag{5.12}$$

식(5.12)의 양변을 적분하면,

$$e^{\int pdx}y = \int e^{\int pdx}r(x)dx + c \tag{5.13}$$

여기에서 c 는 initial condition에 결정되는 상수이다.

$e^{\int pdx}$ 으로 식(5.13) 양변을 나누면 general solution을 구할 수 있다.

$$y(x) = e^{-\int pdx}\left(\int e^{\int pdx}rdx + c\right) \tag{5.14}$$

(b) Find the particular solution of the following equation using the formula obtained in 5(a).

$$y' - (1+3x^{-1})y = x+2, \quad y(1) = e-1. \tag{5.15}$$

Sol.) 식 (5.15)에서 (a)번의 general problem에 적용하면,

$$p = -(1+3x^{-1}) \tag{5.16}$$

$$r = x+2 \tag{5.17}$$

이 된다.

여기서 (5.14)의 결과를 이용하면

$$y = e^x x^3 [\int e^{-x} x^{-3} (x+2) dx + c] \tag{5.18}$$

를 얻을 수 있다.

$$\int e^{-x} x^{-3} dx = -e^{-x} x^{-2} - 2\int e^{-x} x^{-3} dx \tag{5.19}$$

을 이용해서 식(5.18)의 적분을 계산하면,

$$y = ce^x x^3 - x \tag{5.20}$$

을 얻을 수 있다. 초기 조건에서 $y(1) = e-1$ 이므로 $c = 1$ 이 된다.

따라서, 이 문제의 particular solution은

$$y = e^x x^3 - x \tag{5.21}$$

임을 알 수 있다.

[Problem 6] (10 points) Test for the exactness of the following equations. If exact, solve the equations. If not, use an integrating factor to solve the equations.

(a) $2y^{-1}\cos 2x dx = y^{-2}\sin 2x dy$ **(6.1)**

(b) $2xydy = (x^2 + y^2)dx$ **(6.2)**

Sol.)
(a)
식(6.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$2y^{-1}\cos 2x dx - y^{-2}\sin 2x dy = 0 \tag{6.3}$$

위 식은 교재 P.19의 식(1)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{6.4}$$

따라서 $M(x,y)$ 와 $N(x,y)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M(x,y) &\triangleq 2y^{-1}\cos 2x \\ N(x,y) &\triangleq -y^{-2}\sin 2x \end{aligned} \tag{6.5}$$

식(6.4)가 Exact differential equation인지 판별하기 위해서 교재 P.20의 식(5)를 이용해 보면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y^{-2}\cos 2x = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6.6}$$

따라서 식(6.1)은 Exact differential equation이다. 이제 교재 P.21의 식(6)을 이용하여 식(6.1)을 푼다.

$$\begin{aligned} u &= \int M dx + k(y) \\ &= 2y^{-1}\int \cos 2x dx + k(y) \\ &= y^{-1}\sin 2x + k(y) \end{aligned} \tag{6.7}$$

$k(y)$를 구하기 위해 u를 y에 관해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y^{-2}\sin 2x + k' \tag{6.8}$$

식(6.4)에서 $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 이므로 식(6.8)은 아래와 같다.

$$-y^{-2}\sin 2x + k' = -y^{-2}\sin 2x \tag{6.9}$$

위 식(6.9)에서 $k' = 0$ 이므로 k 의 값은 다음과 같다.

$$k = c \text{ (c는 상수)} \tag{6.10}$$

따라서 식(6.1)의 해는 다음과 같다.

$$u = y^{-1}\sin 2x + c \tag{6.11}$$

이 때 c는 Initial condition에 의해 결정되는 상수이다.

(b)
식(6.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \tag{6.12}$$

위 식은 교재 P.23의 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.13}$$

따라서 $P(x,y)$ 와 $Q(x,y)$ 는 다음과 같다.

$$P(x,y) \triangleq (x^2+y^2)$$
$$Q(x,y) \triangleq -2xy \tag{6.14}$$

식(6.13)이 Exact differential equation인지 판별하기 위해서 교재 P.20의 식(5)를 이용해 보면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6.15}$$

따라서 식(6.2)는 Exact differential equation이 아니다. 그러므로 방정식을 풀기에 앞서 Integrating factor를 찾아야 한다. 이를 위해 교재 P.23의 식(16)을 사용한다.

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\ &= -2x^{-1} \end{aligned} \tag{6.16}$$

이렇게 구한 R를 다시 교재 P.24의 식(17)에 대입하면 Integration factor를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \exp\int R(x)dx \\ &= x^{-2} \end{aligned} \tag{6.17}$$

이제 식(6.2)에 F를 곱해주면 식(6.2)는 Exact differential equation이 되고 이를 교재 P.21의 식(6)을 이용하여 푼다.

$$\begin{aligned} u &= \int FPdx + k(y) \\ &= x - x^{-1}y^2 + k(y) \end{aligned} \tag{6.18}$$

$k(y)$를 구하기 위해 u를 y에 관해 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x^{-1}y + k' \tag{6.19}$$

$FQ = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 이므로 다음의 식을 구할 수 있다.

$$-2x^{-1}y + k' = -2x^{-1}y \tag{6.20}$$

위 식(6.20)에서 $k' = 0$ 이므로 k의 값은 다음과 같다.

$$k = c \text{ (c는 상수)} \tag{6.21}$$

따라서 식(6.2)의 해는 다음과 같다.

$$u = x - x^{-1}y^2 + c \tag{6.22}$$

이 때 c는 Initial condition에 의해 결정되는 상수이다.

[Problem 7] (10 points) Consider the following 2^{nd} order ODE

$$(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0 \tag{7.1}$$

(a) Show that $y_1(x) = x + 1$ is a solution of the equation.
(b) Find another solution of the equation using reduction of order (Show the details of your work and do not use any formula in the textbook).
(c) Show that two solutions are linearly independent using their Wronskian.

sol)

(a) 주어진 solution을 각각 x에 대해서 미분, 2계미분을 하면

$$y = x + 1 \tag{7.2}$$

$$y' = 1 \tag{7.3}$$

$$y'' = 0 \tag{7.4}$$

(7.2), (7.3), (7.4)를 (7.1)에 대입하여 정리하면

$$0 + 2(1+x) - 2(1+x) = 0 \tag{7.5}$$

이므로 (7.2)는 (7.1)의 solution이다.

(b) (7.1)에서 y'', y'의 계수를 각각 다음과 같이 쓰자.

$$p(x) \triangleq (1-2x-x^2) \tag{7.6}$$

$$q(x) \triangleq 2(1+x) \tag{7.7}$$

another solution을 y_2라 하고 다음과 같다고 하자.

$$y_2 = u \cdot y_1 \tag{7.8}$$

y_2 의 x에 대한 미분, 2계미분을 구하면

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \tag{7.9}$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \tag{7.10}$$

(7.9), (7.10) 를 (7.1)에 넣고 u, u', u''에 대해서 정리하면

$$p(x)u''y_1 + (2y_1' + q(x)y_1)u' + (p(x)y_1'' + q(x)y' - 2y_1) = 0 \tag{7.11}$$

(7.2), (7.3), (7.4)를 넣고 다시 쓰면

$$p(x)(1+x)u'' + 4u' = 0 \tag{7.12}$$

$U \triangleq u'$라 두면

$$U' + \frac{4U}{p(x)(1+x)} = 0 \tag{7.13}$$

(7.13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dx}{(1-2x-x^2)(1+x)} \tag{7.14}$$

$$\frac{dU}{U} = -(\frac{2+2x}{1-2x-x^2} + \frac{2}{1+x}) = (\frac{2+2x}{x^2+2x-1} - \frac{2}{1+x}) \tag{7.15}$$

U를 구하면

$$ln|U| = ln|x^2+2x-1| - 2 \cdot ln|1+x| \tag{7.16}$$

$$U = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2}{(1+x)^2} = u' \tag{7.17}$$

따라서 U를 적분하여 u를 구하면

$$u = x + \frac{2}{1+x} \tag{7.18}$$

따라서 y_2는 다음과 같다.

$$y_2 = u \cdot y_1 = x^2 + x + 2 \tag{7.19}$$

(c) solution y_1, y_2로 부터 Wroskian을 구하면

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x^2+x+2 \\ 1 & 2x+1 \end{vmatrix} = x^2 + 2x - 1 \quad (7.20)$$

(b)에서 정의한 $p(x)$, $q(x)$가 continous하고

(7.20)을 0이 되게 하는 x값이 존재 하므로

Theorem. 2(Sec2.6)에 의해서 두 solution은 linearly independent하다.