[Problem 1](10 pts.) Find a general solution and the particular solution (Show the details of your work)

$$y''' - y'' - y' + y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0 \tag{1.1}$$

Sol.)

i) General solution

식(1.1)의 characteristic equation 을 구한다.

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \tag{1.2}$$

식(1.2)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = -1,\ 1\,(\text{중근}) \tag{1.3}$$

homogeneous equation의 general solution을 구한다. 우선, 식(1.3)과 같이 characteristic equation이 중근을 가질 때의 general solution을 구한다. 따라서 m 차의 중근을 가질 때 homogeneous equation의 general solution은 다음과 같다.

$$y = \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k\right) e^{\lambda_i x} \tag{1.11}$$

이 때 $c_k, k = 0, \cdots, (m_i - 1)$ 는 초기조건에 의해 정해지는 상수이다. 따라서 식(1.1)의 general solution은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} \\ &= (c_1 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-x} \end{aligned} \tag{1.12}$$

ii) Particular solution

식(1.12)를 미분하여 다음을 구한다.

$$y' = (c_1 + c_2 + c_2 x) e^x - c_3 e^{-x} \tag{1.13}$$

$$y'' = (c_1 + 2c_2 + c_2 x) e^x + c_3 e^{-x} \tag{1.14}$$

식(1.1)의 조건을 이용하여 c_1, c_2, c_3 를 찾는다.

$$y(0) = c_1 + c_3 = 2 \tag{1.15}$$

$$y'(0) = c_1 + c_2 - c_3 = 1 \tag{1.16}$$

$$y''(0) = c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \tag{1.17}$$

식(1.15), (1.16), (1.17)를 연립하여 풀면 각 상수들을 구할 수 있다.

$$c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 0 \tag{1.18}$$

따라서 식(1.1)의 particular solution 은 다음과 같다.

$$y = (2 - x) e^x \tag{1.19}$$

[Problem 2](10 pts.) Find a general solution. Show the details of your work

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - 2\cos t \\ y_2' = y_1 + y_2 - \cos t + \sin t \end{cases} \tag{2.1}$$

Sol.)

< Method 1 >

식(2.1)은 다음과 같이 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$ 꼴로 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\cos t \\ -\cos t + \sin t \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

i) Homogeneous solution

$\mathbf{A}$ 의 eigenvalue 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = 3, -1 \tag{2.3}$$

이들에 대한 각각의 eigenvector 는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

따라서 식(2.1)의 homogeneous solution 은 다음과 같다.

$$\mathbf{y_h} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \tag{2.5}$$

ii) Particular solution

식(2.1)의 particular solution 을 다음과 같이 둔다.

$$\mathbf{y_p} = \begin{bmatrix} a_1 \cos t + b_1 \sin t \\ a_2 \cos t + b_2 \sin t \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

식(2.6)을 식(2.1)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -a_1 \sin t + b_1 \cos t \\ -a_2 \sin t + b_2 \cos t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (a_1 + 4a_2)\cos t + (b_1 + 4b_2)\sin t - 2\cos t \\ (a_1 + a_2)\cos t + (b_1 + b_2)\sin t - \cos t + \sin t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_1 + 4a_2 - 2)\cos t + (b_1 + 4b_2)\sin t \\ (a_1 + a_2 - 1)\cos t + (b_1 + b_2 + 1)\sin t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

식(2.7)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + 4b_2 & a_1 + 4a_2 - 2 \\ b_1 + b_2 + 1 & a_1 + a_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

위 식을 이용하여 풀면 다음의 상수들을 구할 수 있다.

$$a_1 = 1, b_1 = -1, a_2 = b_2 = 0 \tag{2.9}$$

따라서 식(2.1)의 particular solution 은 다음과 같다.

$$\mathbf{y_p} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

iii) General solution

식(2.5), (2.10)에 따라 식(2.1)의 general solution 은 다음과 같다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{y_h} + \mathbf{y_p}$$
$$= c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}e^{-t} + \begin{bmatrix}\cos t - \sin t\\0\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

< Method 2 >

Method 1이외에 Problem 3의 결과를 이용하여 해를 구할 수도 있다. 우선 homogeneous solution은 Method 1과 동일하다.

$$\mathbf{y_h} = \mathbf{YC}$$
$$= \begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

이제 particular solution을 variation of parameters를 통해 구한다. 우선 $\mathbf{y_p} = \mathbf{YU}$ 라고 정의한다. 이때 식(3.12)부터 (3.14)의 과정을 통해 다음의 U 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{U}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g}$$
$$\mathbf{U(t)} = \int \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{(s)g(s)ds} \tag{2.11}$$

따라서 $\mathbf{y_p}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{y_p}(t) = \mathbf{Y}(t)\int \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds \tag{2.12}$$

우선 $\mathbf{U}'$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t} & 2e^{-3t}\\ -e^{t} & 2e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\cos t\\ -\cos t + \sin t\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2e^{-3t}\cos t + e^{-3t}\sin t\\ e^{t}\sin t\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

식(2.13)을 적분하여 구한 $\mathbf{U}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t}(\cos t - \sin t)\\ e^{t}(\sin t - \cos t)\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

식(2.14)를 식(2.12)에 대입하면 아래의 $\mathbf{y_p}$ 를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{y_p} = \begin{bmatrix}\cos t - \sin t\\ 0\end{bmatrix} \tag{2.15}$$

따라서 식(2.1)의 general solution은 다음과 같다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{YC} + \mathbf{Y}\int \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{(s)g(s)ds}$$
$$= \begin{bmatrix}2e^{3t} & -2e^{-t}\\ e^{3t} & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\cos t - \sin t\\ 0\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

[Problem 3](10 pts.) Consider the following time-invariant linear system of ODEs :

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)\,,\;\; y(t_0) = y_0 \tag{3.1}$$

where $y(t) \in R^n$ and $g(t) \in R^n$. Assume that the components of $A(t)$ and $g(t)$ are continuous in t. Now, suppose that we have found n linearly independent solutions, say, $y^{(k)}(t), k = 1, 2, \cdots, n$, of (3.1) with $g(t) = 0$. Then, describe the solution of **(3.1)** explicitly by the method of variation of parameters.

Proof)

i) Homogeneous part : $g(t) = 0$

이 경우에 (3.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y'(t) = A(t)y(t) \tag{3.2}$$

그리고 (3.2)의 해 $y_h(t)$는 다음과 같은 형태로 표시할 수 있다.

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y^{(k)}(t) \tag{3.3}$$

여기서 $Y(t) \in R^{nxn}$ 과 $C \in R^n$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$Y \triangleq [y^{(1)}(t)\;\; y^{(2)}(t) \cdots y^{(n)}(t)] \tag{3.4}$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T \tag{3.5}$$

그러면 (3.3)의 $y_h(t)$ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$y_h(t) = Y(t)C \tag{3.6}$$

여기서 $W(y^{(1)}, \cdots, y^{(n)})$는 $y^{(k)}$ $k = 1, \cdots, n$ 의 Wronskian 이라면,

$$W(y^{(1)}(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = \det\left|Y(t)\right| \neq 0, \; {}^\forall t \in R$$

이므로,

$$Y(t)\text{는 invertible 하다.} \tag{3.7}$$

ii) Nonhomogeneous part: $g(t) \neq 0$

Nonhomogeneous part 의 해 $y_p(t)$를 다음과 같은 형태로 표현하면,

$$y_p(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) y^{(k)}(t) \tag{3.8}$$

그리고 Y 와 U 를 아래와 같이 정의하면,

$$Y \triangleq [y^1(t)\;\; y^2(t) \cdots y^n(t)] \tag{3.9}$$

$$U(t) = [u_1(t)\;\; u_2(t) \cdots u_n(t)]^T \tag{3.10}$$

$y_p(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_p(t) = U(t)Y(t) \tag{3.11}$$

편의를 위해 아래에서는 argument ‘t’를 생략하기로 한다.
이를 (3.1)에 대입하면,

$$Y'U + YU' = AYU + g \tag{3.12}$$

여기서

$$\begin{aligned}[y'^{(1)}\;\; y'^{(2)} \cdots y'^{(n)}] &= [Ay^{(1)}\;\; Ay^{(2)} \cdots Ay^{(n)}] \\ &= A[y^{(1)}\;\; y^{(2)} \cdots y^{(n)}]\end{aligned} \tag{3.13}$$

이므로, (3.12)로부터

$$YU' = g \tag{3.14}$$

가 성립한다. (3.7)에 의해 (3.14)로부터

$$U' = Y^{-1}g \tag{3.15}$$

가 성립하므로 U 는 아래와 같이 표현된다.

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)ds \tag{3.16}$$

(3.11)에 (3.16)의 U 를 대입하면, 결국 $y_p(t)$ 는 아래와 같이 결정된다.

$$y_p(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)ds \tag{3.17}$$

iii) General solution

$y_h(t)$ 는 (3.2)를 만족하고 $y_p(t)$ 는 (3.1)의 particular solution 이므로

$$y(t) = Y(t)C + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)g(s)ds \tag{3.18}$$

는 (3.1)을 만족한다. 이제 C 가

$$C = [Y(t_0)^{-1}]y_0 \tag{3.19}$$

일 때 (3.18)은 다음과 같이 되어 initial condition 을 만족한다.

$$y(t_0) = Y(t_0)C + Y(t_0)\int_{t_0}^{t_0} Y^{-1}(s)g(s)ds = y_0 \tag{3.20}$$

따라서 (3.1)의 해는 uniqueness 에 의해 (3.19)와 (3.20)로 주어진다.

[Problem 4] (10 pts.) Find all critical points of the following nonlinear system and also discuss their stability.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + b \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + x_1(\alpha - \beta x_1 x_2) \end{cases} \tag{4.1}$$

where all the coefficients are positive

Sol.)

식 (4.1)을 다음과 같이 둘 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.2}$$

여기서,

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.3}$$

$$f(x) \triangleq \begin{bmatrix} -ax_1 + b \\ -cx_2 + x_1(\alpha - \beta x_1 x_2) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

critical point를 $\overline{x}$ 라 두면, critical point의 정의에 따라 다음과 같이 두고,

$$f(\overline{x}) \triangleq \begin{bmatrix} -a\overline{x}_1 + b \\ -c\overline{x}_2 + \overline{x}_1(\alpha - \beta \overline{x}_1 \overline{x}_2) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

위 식을 풀면, critical point는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{b}{a} & \dfrac{\alpha b/a}{\beta b^2/a^2 + c} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.6}$$

이제, critical point를 원점으로 옮기기 위하여, $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} z &\triangleq x - \overline{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 - \dfrac{b}{a} & x_2 - \dfrac{\alpha b/a}{\beta b^2/a^2 + c} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.3)과 (4.7)로부터

$$x \triangleq \begin{bmatrix} z_1 + \dfrac{b}{a} & z_2 + \dfrac{\alpha b/a}{\beta b^2/a^2 + c} \end{bmatrix}^T \tag{4.8}$$

(4.8)을 (4.2)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= F(z) = f(z + \overline{x}) \\ &= \begin{bmatrix} -az_1 \\ -cz_2 + \alpha z_1 - \dfrac{b^2\beta}{a^2} z_2 - \dfrac{2b\beta}{a^2} z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2 - \dfrac{2\alpha\beta b^2}{a^2\left(\dfrac{\beta b^2}{a^2} + c\right)} z_1^2 - \dfrac{\alpha\beta b}{a\left(\dfrac{\beta b^2}{a^2} + c\right)} z_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

이제, 비선형 시스템 (4.1)의 critical point의 type을 구하도록 한다.

먼저 (4.9)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{z} = F(z)$$

$$= \begin{bmatrix} -a & 0 \\ \alpha & -c - \dfrac{b^2\beta}{a^2} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{2b\beta}{a^2} z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2 - \dfrac{2\alpha\beta b^2}{a^2\left(\dfrac{\beta b^2}{a^2} + c\right)} z_1^2 - \dfrac{\alpha\beta b}{a\left(\dfrac{\beta b^2}{a^2} + c\right)} z_1^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.10)}$$

혹은,

$$\dot{z} = Az + h(z) \quad \textbf{(4.11)}$$

여기서,

$$\lim_{\|z\| \to 0} \frac{\|h(z)\|}{\|z\|} = \lim_{(z_1, z_2) \to 0} \frac{\left| -\dfrac{2b\beta}{a^2} z_1 z_2 - \beta z_1^2 z_2 - \dfrac{2\alpha\beta b^2}{a^2\left(\beta b^2/a^2 + c\right)} z_1^2 - \dfrac{\alpha\beta b}{a\left(\beta b^2/a^2 + c\right)} z_1^2 \right|}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \quad \textbf{(4.12)}$$

$$= 0$$

임을 알 수 있으므로, (4.10)은 원점 근방에서 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\dot{z} = Az \quad \textbf{(4.13)}$$

이제, 행렬 A 의 eigenvalue는 다음과 같으며,

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = -c - \frac{b^2\beta}{a^2} \quad \textbf{(4.14)}$$

a, b, c, β 는 positive이므로, 위의 eigenvalue는 모두 real, negative이다. 따라서, 위의 선형화된 시스템의 critical point는 asymptotically stable node이다. 또한, $F(z)$ 는 z 에 대한 다항식이므로 원점 근방에서 continuous이고, continuous partial derivative를 가진다. 그리고,

$$\det(A) = a\left(c + \frac{b^2\beta}{a^2}\right) \neq 0 \quad \textbf{(4.15)}$$

이므로, 교재 Section 4.5의 Theorem 1에 의하여, (4.1)의 critical point도 asymptotically stable node임을 알 수 있다.

Method 2)

Section 4.5 의 Theorem 1'로부터 다음의 선형화된 시스템을 얻을 수 있다.

$$\dot{z} = Az \quad \textbf{(4.16)}$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial F_1(z)}{\partial z_1}\right|_{z=(0,0)} & \left.\dfrac{\partial F_1(z)}{\partial z_2}\right|_{z=(0,0)} \\ \left.\dfrac{\partial F_2(z)}{\partial z_1}\right|_{z=(0,0)} & \left.\dfrac{\partial F_2(z)}{\partial z_2}\right|_{z=(0,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ \alpha & -c - \dfrac{b^2\beta}{a^2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.17)}$$

위 행렬 A 의 eigenvalue는 다음과 같으며,

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = -c - \frac{b^2 \beta}{a^2} \qquad \textbf{(4.18)}$$

a, b, c, β 는 positive이므로, 위의 eigenvalue는 모두 real, negative이다. 따라서, Method 1에서와 마찬가지의 과정을 통해, 주어진 비선형 시스템 (4.1)의 critical point는 asymptotically stable node임을 알 수 있다.

[Problem 5](10 pts.) Consider the 2nd order linear ODE

$$x^2 y'' - 2xy' + (2+x)y = 0 \tag{5.1}$$

Using Frobenius method, we want to find series solutions near the origin

(a) Find two solutions $r_1 \ge r_2$ of the indicial equation for the above ODE.

(b) Using r_1, find one solution of the ODE(you must explicitly write down the recurrence formula and at least three non zero terms of the series solution).

(c) Explain why you cannot generate the second independent series solution using r_2.

Sol)

(5.1) 을 다시 쓰면

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{(2+x)}{x^2} y = 0 \tag{5.2}$$

(5.2) 와 Theorem 5.4.1 에서 (1)식과 비교하면 다음을 얻을 수 있다.

$$b(x) = -2, \ \ c(x) = x + 2 \tag{5.3}$$

$b(x)$ 와 $c(x)$ 는 $x = 0$ 에서 analytic 하므로 Frobenius method 를 쓸 수 있다.

(a)

Indicial equation은 p.184에 식(4)로 주어지고 식 (5.3)을 대입하면 다음과 같다.

$$r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0 \quad , \quad r^2 - 3r + 2 = 0 \tag{5.4}$$

r 에 대한 해를 구하면

$$r_1 = 2 \ \ , \ \ r_2 = 1 \tag{5.5}$$

(b)

Theorem 5.4.2 의 Case 3. Root Differing by an Interger 에 해당되므로,
p.185 의 (9), (10)과 같은 형태의 solution 을 가진다.
첫 번째 solution 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_1(x) = x^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{5.6}$$

(5.6) 을 (5.1) 에 대입 하면,

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+2)(m+1) - 2(m+2) \right] a_m x^{m+2} + \left(x+2 \right) \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\{ (m+2)(m+1) - 2(m+2) + 2 \} a_m + a_{m-1} \right] x^{m+2} = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

recurrence relation은 다음과 같이 주어진다.

$$a_m = \frac{-1}{m(m+1)} a_{m-1} \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{5.8}$$

$a_0 = 1$ 로 잡으면

$$a_m = \frac{-1}{m(m+1)} \frac{-1}{(m-1)m} \cdots \frac{-1}{2 \cdot 3} \frac{-1}{1 \cdot 2} = \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \tag{5.9}$$

(5.9) 를 (5.6)에 대입하면

$$y_1(x) = x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} x^m = x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \cdots \right) \tag{5.10}$$

y_1 의 수렴반경 R

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \left| a_{m+1} / a_m \right|} = \infty \tag{5.11}$$

(c)

r_2 로 다음과 같은 solution을 쓸 수 있다고 하자.

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m \tag{5.12}$$

그러면

$$y_2' = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r_2) d_m x^{m + r_2 - 1} \tag{5.13}$$

$$y_2'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m + r_2)(m + r_2 - 1) d_m x^{m + r_2 - 2} \tag{5.14}$$

$r_2 = 1$, (5.13) , (5.14)을 (5.1)에 대입해서 정리하면,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\{ (m + r_2)(m + r_2 - 1) - 2(m + r_2) + 2 \} d_m + d_{m-1} \right] x^{m + r_2} = 0 \tag{5.15}$$

$$m(m-1) d_m + d_{m-1} = 0 \tag{5.16}$$

$d_0 = \varepsilon$ ($\varepsilon \neq 0$)라 할 때 이것을 (5.16)에 대입하여 d_m 을 구하면,

$$y_2 = 0 \tag{5.17}$$

Trivial solution이 되므로 r_2 로 independent한 solution을 구할 수 없다.

[Problem 6] (10 pts.) Find a general solution using a power series method. Show the details of your work.

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0 \tag{6.1}$$

Sol)

Solution이 다음과 같다고 하자.

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{6.2}$$

그러면

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1} \tag{6.4}$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} \tag{6.5}$$

(6.3), (6.4)를 (6.1)에 대입하면,

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} - 4\sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^m + (4x^2 - 2)\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \tag{6.5}$$

(6.5)를 다시 쓰면,

$$2a_2 + 6a_3 x - 4a_1 x - 2(a_0 + a_1 x) + \sum_{m=2}^{\infty} \{(m+1)(m+2)a_{m+2} - 4ma_m + 4a_{m-2} - 2a_m\} = 0 \tag{6.6}$$

(6.6)으로부터

$$a_2 = a_0 \quad , \quad a_3 = a_1 \tag{6.7}$$

$$a_{m+2} = \frac{(4m+2)a_m - 4a_{m-2}}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \geq 2 \tag{6.8}$$

1) 짝수 항 일 때($b_k = a_{2k}$, $k = 0,1,2,3\ldots$)

(6.7)과 (6.8) 로부터

$$b_1 = b_0 \tag{6.9}$$

$$b_{k+1} = \frac{(8k+2)b_k - 4b_{k-1}}{(2k+1)(2k+2)}, \qquad k \geq 1 \tag{6.10}$$

(6.9), (6.10) 으로 부터 recurrence formula는 다음과 같다.

$$b_k = \frac{1}{k!} b_0 \tag{6.11}$$

2) 홀수 항 일 때($c_k = a_{2k+1}$, $k = 0,1,2,3\ldots$)

(6.7)과 (6.8) 로부터

$$c_1 = c_0 \tag{6.12}$$

$$c_{k+1} = \frac{(8k+6)c_k - 4c_{k-1}}{(2k+2)(2k+3)}, \qquad k \ge 1 \tag{6.13}$$

(6.12), (6.13)으로부터 recurrence formula는 다음과 같다.

$$c_k = \frac{1}{k!}c_0 \tag{6.14}$$

따라서 general solution은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots) + a_1(x^1 + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \cdots) \\ &= (a_0 + a_1 x)(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots) = (a_0 + a_1 x)e^{x^2} \end{aligned} \tag{6.15}$$

y 의 수렴 반경 R 은

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}|b_{m+1}/b_m|} = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}|c_{m+1}/c_m|} = \infty \tag{6.16}$$

a_0, a_1 은 초기조건에 의해 결정되는 상수들이다.

[Problem 7] (10 pts.) Calculate the inverse Laplace transform

$$L^{-1}\left\{\left(1-e^{-s}/s\right)^{2}\right\} \quad \textbf{(7.1)}$$

Sol.) 교재 p.235의 Theorem 1을 이용하여 식(7.1)을 inverse Laplace transform하면 다음과 같다.

$$L^{-1}\left\{\left(1-e^{-s}/s\right)^{2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{2}}-\frac{2e^{-s}}{s^{2}}+\frac{e^{-2s}}{s^{2}}\right\}=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2) \quad \textbf{(7.2)}$$

[Problem 8] (10 pts.) Suppose that g is piecewise continuous on $[0, b]$ for every $b \rangle 0$, and that there are real numbers $M, k,$ and a such that $|g(t)| \le Me^{kt}$ for $t \ge a$. Then, show that

$$L\{\int_a^t g(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}L\{g(t)\} - \frac{1}{s}\int_0^a g(\tau)d\tau \qquad \textbf{(8.1)}$$

Sol)

$f(t)$를 다음과 같이 정의하자

$$f(t) \triangleq \int_a^t g(\tau)d\tau, \quad \forall t \ge 0 \qquad \textbf{(8.2)}$$

그러면

$$f'(t) = g(t) \qquad \textbf{(8.3)}$$

이다. 그리고 $g(t)$가 piecewise continous 하므로

$f(t)$는 continous 하다. **(8.4)**

1) $t \ge a$일 때

$$|f(t)| = \left|\int_a^t g(\tau)d\tau\right| \le \int_a^t |g(\tau)|d\tau \le \int_a^t Me^{k\tau}d\tau = \frac{M}{k}e^{kt}[1 - e^{-k(t-a)}] \le \frac{M}{k}e^{kt} \qquad \textbf{(8.5)}$$

2) $a > t \ge 0$ 일 때 (8.4)에 의해 다음을 만족하는 $M_g > 0$가 존재한다.

$$|f(t)| \le M_g \qquad \textbf{(8.6)}$$

따라서, (8.5)와 (8.6)에 의해서 다음을 만족하는 $\bar{M}, \bar{k} > 0$ 가 존재한다.

$$|f(t)| \le \bar{M}e^{\bar{k}t}, \quad \forall t \ge 0 \qquad \textbf{(8.7)}$$

그러므로 $f(t)$는 6.2절의 Theorem 1의 전제조건을 모두 만족한다.

따라서

$$L\{g(t)\} = L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \qquad \textbf{(8.8)}$$

이므로 (8.1)이 성립한다.

[Problem 9] (10 pts.) Solve the following integral equation (Hint : Use the Laplace transform).

$$\int_0^t y(t-x)e^{-x}dx - \int_0^t y(x)dx = t^{10}e^{-t} \qquad \textbf{(9.1)}$$

Sol)

식(9.1)에서 $f(t) = y(t), g(t) = e^{-t}$ 라 하면,

$$\int_0^t y(t-x)e^{-x}dx = (f*g)(t) \qquad \textbf{(9.2)}$$

첫째 항을 Laplace Transform하면 Convolution Theorem에 의해

$$\begin{aligned} L\{\int_0^t y(t-x)e^{-x}dx\} &= L\{f(t)\}L\{g(t)\} \\ &= \frac{Y(s)}{s+1} \end{aligned} \qquad \textbf{(9.3)}$$

가 된다.

Section 6.2 의 Theorem3 의 integral Theorem 은 다음과 같다.

$$L\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s) \qquad \textbf{(9.4)}$$

둘째 항을 Laplace transform하면

$$L\{\int_0^t y(x)dx\} = Y(s)\frac{1}{s} \qquad \textbf{(9.5)}$$

을 얻을 수 있다.

셋째 항을 구하기 위한 Table 6.1의 (4)식과 Section 6.1의 Theorem2(s-Shifting)은 다음과 같다.

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \textbf{(9.6)}$$

$$L(e^{at}) = F(s-a) \quad (where\,\mathrm{Re}(s-a) > k, {}^{\forall}k) \qquad \textbf{(9.7)}$$

식(9.1)의 셋째 항에 Laplace Transform을 적용하면,

$$L\{\int_0^t y(t-x)e^{-x}dx\} = Y(s)\frac{1}{s+1} \qquad \textbf{(9.8)}$$

$$L\{t^{10}e^{-t}\} = 10!\frac{1}{(s+1)^{11}} \qquad \textbf{(9.9)}$$

따라서 식 (9.3), (9.5), (9.9)에 의해 식 (9.1)의 Laplace Transform한 형태는 다음과 같이 된다.

$$Y(s)\frac{1}{s+1} - Y(s)\frac{1}{s} = 10!\frac{1}{(s+1)^{11}} \qquad \textbf{(9.10)}$$

이 때 $Y(s)$ 는 다음과 같이 된다.

$$Y(s) = -10!\frac{s}{(s+1)^{10}} = -10!\frac{(s+1-1)}{(s+1)^{10}} = \frac{10!}{(s+1)^{10}} - \frac{10!}{(s+1)^{9}} \tag{9.11}$$

식(9.11)에 inverse Laplace transform 을 하면 (9.8), (9.9)에 의해 다음과 같이 해를 얻을 수 있다.

$$L^{-1}\{Y(s)\} = 10L^{-1}\{\frac{9!}{(s+1)^{10}}\} - 90L^{-1}\{\frac{8!}{(s+1)^{9}}\} = 10t^{9}e^{-t} - 90t^{8}e^{-t} \tag{9.12}$$

[Problem 10] (10 pts.) Solve the following problems using the Laplace transform. Show the details of your work.

$$\begin{cases} y_1' + y_2' = 2\sinh t \\ y_2' + y_3' = e^t \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \tag{10.1}$$

where $y_1(0)=1,\ y_2(0)=1,\ y_3(0)=0$

Sol)

(10.1) 식에 각각 Laplace Transform 을 적용하기 위해 Section 6.2 의 Theorem1 를 이용한다.

$$\begin{cases} L\{y_1'\} = sY_1 - y_1(0) \\ L\{y_2'\} = sY_2 - y_2(0) \\ L\{y_3'\} = sY_3 - y_3(0) \end{cases} \tag{10.2}$$

또한 Section 6.1 의 Table 6.1 을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$L\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \tag{10.3}$$

$$L\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1} \tag{10.4}$$

$$L\{2\sinh t\} = L\{e^t - e^{-t}\} = \frac{2}{s^2-1} \tag{10.5}$$

이를 정리하여 식 (10.1)의 Laplace Transform된 형태를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} sY_1 - y_1(0) + sY_2 - y_2(0) = sY_1 + sY_2 - 2 = \dfrac{2}{s^2-1} \\ sY_2 - y_2(0) + sY_3 - y_3(0) = sY_2 + sY_3 - 1 = \dfrac{1}{s-1} \\ sY_3 - y_3(0) + sY_1 - y_1(0) = sY_3 + sY_1 - 1 = \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \tag{10.6}$$

을 얻을 수 있다.

이 때 Y_1, Y_2, Y_3 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Y_1 = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s-1} \tag{10.7}$$

$$Y_2 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s-1)} - \frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s+1} \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= \frac{3}{2}\frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2s(s+1)} - \frac{1}{s(s^2-1)} \\ &= \frac{2s}{s(s^2-1)} = \frac{2}{s^2-1} \end{aligned} \tag{10.9}$$

여기에 inverse Laplace transform 을 하면 다음과 같이 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} y_1(t) = e^t \\ y_2(t) = e^{-t} \\ y_3(t) = 2\sinh t \end{cases} \tag{10.10}$$

식(10.6)는 initial condition을 만족하므로 식 (10.1)의 solution이라 할 수 있다.