

**SEOUL NATIONAL UNIVERSITY
SCHOOL OF MECHANICAL AND AEROSPACE ENGINEERING**

SYSTEM ANALYSIS

Spring 2008

Midterm Exam SOLUTION
Closed book, closed note

Date: April 22, 2008 (tu)
10:30~11:45AM

Student ID #: _____ Name: _____

[1] (15 points) Describe followings:

(1) Linear Dynamic Systems

system: A combination of components working together to perform a specific objective

Component: single functioning unit

dynamic systems: $y(t)$ depends on all the inputs $u(\tau)$ $\tau \leq t$,

linear superposition

(2) Mathematical model

Mathematical model:

-Differential equations describing (dynamic) behavior of a system

-Transfer function

-state equation

dynamic systems: differential equations

Static systems: algebraic equation

Compromise : Accuracy versus simplicity

Problem No (points)	Points
1(15)	
2(10)	
3(10)	
4(15)	
5(20)	
6(10)	
Total(80)	

(3) Design and analysis

- **Analysis :** the investigation of the performance of a system whose mathematical model is known.
 1. Derive mathematical model.
 2. Parameter variations – a number of solutions.
 3. Interprets and applies the result to the basic task.
- **Design :** (system design)
 - the process of finding a system that accomplishes a given task.

[2] (10 points) Solve following differential equation using Laplace Transformation.

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 4y = 1$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 2$$

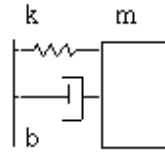
Sol)

$$Y(s) = \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s+1-1}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(\sqrt{3}t)e^{-t} + \frac{7}{4\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t)e^{-t}$$

- 과정과 답이 다 맞으면 10 점
- $Y(s)$ 까지만 정확히 구했으면 5 점
- 계산과정에서 오류가 있으면 -3 점
- Cos 함수나 Sin 함수, Exponential 함수 형태는 맞고 계수가 틀리면 계산 오류로 적용.
- 함수형태 자체가 틀리면 오답. 즉, $Y(s)$ 만 맞았을 때 5 점
- 식 전개가 되었고 $Y(s)$ 까지 구했는데 $Y(s)$ 가 틀렸으면 2 점.
- 틀린 $Y(s)$ 로 $y(t)$ 까지 구했어도 2 점.

[3] (10 points) Consider following mechanical system:



$m=10\text{kg}, k=10\text{ N/m}.$

(1) What is the natural frequency and damping ratio when $b=16\text{ Ns/m}$? (5 점)

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1\text{ rad/sec}, \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}} = 0.8$$

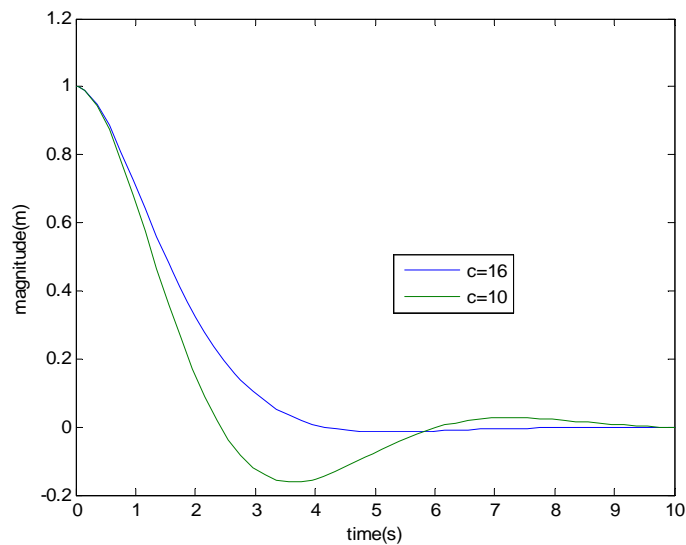
- 운동 방정식만 맞았으면 1 점.
- 고유 진동수 2 점.
- Damping ratio 3 점.
- 공식이 맞고 계산이 틀리면 -1 점 씩.

(2) “Sketch” and compare the time responses of the system when $b=16\text{ Ns/m}$ and $b=10\text{ Ns/m}$. (5 점)

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}} = 0.8 \text{ (for } b = 16), \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}} = 0.5 \text{ (for } b = 10)$$

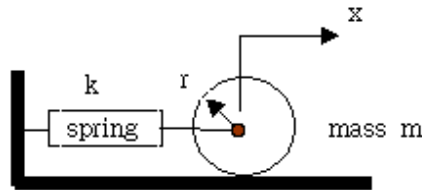
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 0.6 \quad \omega_d = 0.866$$

$$\tau = 1.25 \quad \tau = 2$$



- 그래프 맞게 그리고 설명이 맞으면 5 점
- 그래프 맞게 그리고 설명 없으면 3 점
- 설명은 맞는 데 그래프가 틀리면, 3 점
- 그 외 시스템의 특성을 나타내는 몇 가지 계수를 맞게 구했으면 2 점 (계수를 이용해서 시스템에 대해 설명 했으면 설명이 맞은 걸로 보고 3 점)
- 설명의 일부만 맞고 그래프 틀리면 1 점.
- 설명의 일부만 맞고 그래프 맞으면 4 점

[4] (15 points) Consider a system shown in Figure below. The radius and mass of the cylinder are r and m , respectively. The stiffness of the spring is k . The displacement of the cylinder is defined as x . Assume no slip condition between the cylinder and floor.



(1) Obtain the equation of motion of the cylinder. (5 점)

Sol)

에너지 보존 법칙

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const \quad x = r\theta \text{ 을 대입하고 시간에 대해 미분하면}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

- 답이 맞으면 5 점. 부분 점수 없음.
- 단, 식 전개 시 단순 계산 실수 -1 점.

(2) Obtain state equation of this system. (5 점)

Sol)

$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$ 라고 놓고 풀어보면,

state variable : $x_1 = x, x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2k}{3m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 부분 점수 없음
- 다만 (1) 에서 틀린 운동방정식을 구하여 (2)에서 맞게 구했으면 3 점

(3) Compute natural frequency and sketch the motion of the cylinder, i.e., sketch the time response of the displacement of the cylinder for the following initial conditions:

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

$$\frac{3}{2}m[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + kX(s) = 0 \quad \text{sketch 는 시간에 따른 } x(t)\text{를 그리면 됨.}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{2k}{3m}}\right)^2}, \quad x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3m}}\right)t$$

- 고유진동수 맞으면 1 점, 틀리면 부분 점수 없음.
- X(s) 맞게 구했으면 1 점
- x(t) 맞게 구했으면 2 점 (라플라스 변환을 이용하지 않고 구했으면 3 점으로 인정)
- 그래프 맞게 그렸으면 1 점
- X(s) 나 x(t) 를 잘못 구했으면 부분점수 없음
- (1)에서 잘못 구한 운동 방정식으로 맞게 풀었으면 3 점 (고유 진동수 포함)

[5] (20 points) Consider a quarter car vehicle suspension model shown in the Figure.

(1) Assuming that z_s , z_u , and z_r are displacements of sprung mass, unsprung mass, and road from a reference, respectively, obtain a state equation with following definitions:

$$x = [z_s - z_u, \dot{z}_s, z_u - z_r, \dot{z}_u]^T$$

$$y = [\ddot{z}_s, z_s - z_u, z_u - z_r]^T$$

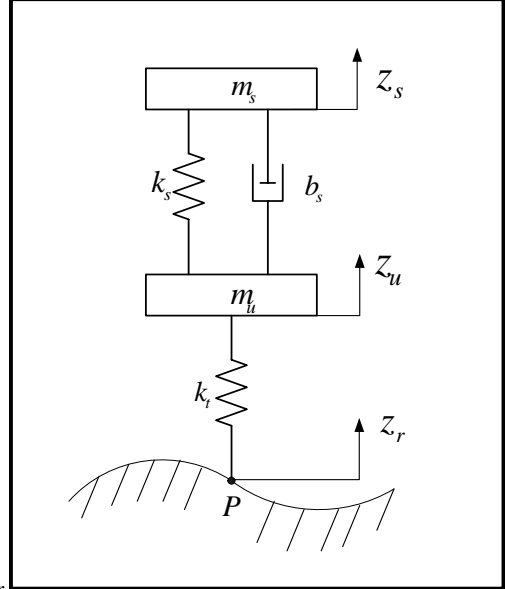
운동 방정식

$$m_u \ddot{z}_u = k_s (z_s - z_u) + b_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_t (z_r - z_u)$$

$$m_s \ddot{z}_s = -k_s (z_s - z_u) - b_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & 0 & \frac{b_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{b_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & -\frac{b_s}{m_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{z}_r$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & 0 & \frac{b_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$



- 정답 10 점
- 운동 방정식까지만 맞게 풀고 답이 안 나왔으면 3 점
- 운동방정식 맞고 중간계산 틀린 상태에서 state equation 까지 다 구했으면 5 점
- 틀린 운동방정식으로 state equation 까지 구했으면 3 점
- 운동방정식 틀리고 state equation 까지 구하지 못했으면 1 점

(2) Assume that an actuator is placed between sprung and unsprung masses. In this case, the road displacement is considered as a disturbance, d , to the system and the actuator force is considered as a control input, u , to the system. Obtain a state equation of following form:

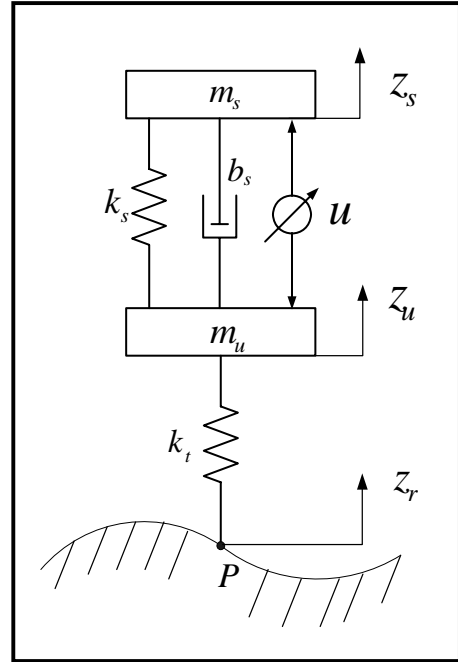
$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d$$

$$y = Cx + D_u u + D_d d$$

운동 방정식

$$m_u \ddot{z}_u = k_s(z_s - z_u) + b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_t(z_r - z_u) - u$$

$$m_s \ddot{z}_s = -k_s(z_s - z_u) - b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + u$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & 0 & \frac{b_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{b_s}{m_u} & -\frac{k_t}{m_u} & -\frac{b_s}{m_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{z}_r$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & 0 & \frac{b_s}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- 정답 10 점
- 운동 방정식까지만 맞게 풀고 답이 안 나왔으면 3 점
- 운동방정식 맞고 중간계산 틀린 상태에서 state equation 까지 다 구했으면 5 점
- 틀린 운동방정식으로 state equation 까지 구했으면 3 점
- 운동방정식 틀리고 state equation 까지 구하지 못했으면 1 점

[6] (10 points) For the matlab m-file given below, sketch the result.

```
clear;
clc;
num=[7];
den=[10 15 60];
t=0 : 0.01 : 10;;
step(num,den,t)
grid on;
title(' step response ', 'fontsize',15);
xlabel(' t sec ', 'fontsize',15); ylabel(' y(t) ', 'fontsize',15);
```

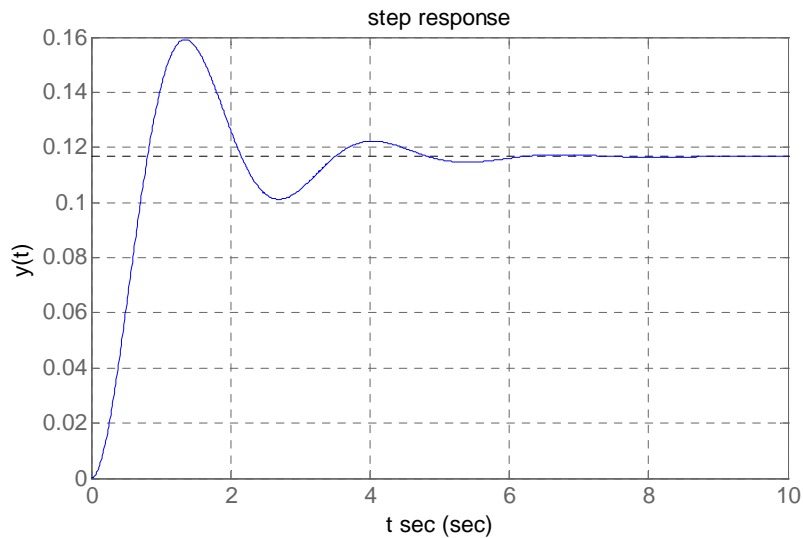


$$X(s) = \frac{1}{10s^2 + 15s + 60} \frac{7}{s}$$

이를 Laplace 역변환 하면

$$x(t) = \frac{7}{60} - \frac{7}{60} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \cos\left(\frac{1}{4}\sqrt{87}t\right) - \frac{7}{1740} \sqrt{87} \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \sin\left(\frac{1}{4}\sqrt{87}t\right)$$

이를 그리면



- 정답 10 점(7/60 으로 수렴하는 지 확인)
- X(s)는 맞으나 x(t)가 틀리면 3 점
- x(t)는 맞지만 그래프가 틀리면 5 점
- x(t) 는 맞고 그래프는 맞지만 라벨이나 타이틀, grid 없거나 틀린 경우 7 점