[Problem 1] (20 points) (1)Prove that time-invariant linear discrete-time systems satisfy the following property :

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n]=(x[n]*h_2[n])*h_1[n] \tag{1.1}$$

where x[n] is the input, while $h_k[n]$ is the impulse response of the time-invariant linear discrete-time system $H_k,\ \ k=1,2$. (2) Also, give an illustrative example showing that the property in (1.1) does not hold if even one of the two systems $H_k,\ \ k=1,2$ is not linear.

Solution

1. DIRECT METHOD

식(1.1)의 좌변과 우변이 같음을 보임으로써 증명할 수 있다.

먼저, 식(1.1)의 좌변을 전개한다. $w_1[n]$을 다음과 같이 정의하면

$$w_1[n] \triangleq x[n]*h_1[n] \tag{1.2}$$

식(1.1)의 좌변은 다음과 같이 전개시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}(x[n]*h_1[n])*h_2[n] &= w_1[n]*h_2[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_1[k]h_2[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]h_1[k-l]h_2[n-k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]h_1[m]h_2[n-m-l] \qquad (letting\ \ m \triangleq k-l)\end{aligned} \tag{1.3}$$

한편, 식(1.1)의 우변을 전개한다. $w_2[n]$을 다음과 같이 정의하면

$$w_2[n] \triangleq x[n]*h_2[n] \tag{1.4}$$

식(1.1)의 우변은 다음과 같이 전개시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}(x[n]*h_2[n])*h_1[n] &= w_2[n]*h_1[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_2[k]h_1[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]h_2[k-l]h_1[n-k] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]h_2[n-m-l]h_1[m] \qquad (letting\ \ m \triangleq n-k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]h_1[m]h_2[n-m-l]\end{aligned} \tag{1.5}$$

결국 식(1.3)와 식(1.5)은 동일하므로 식(1.1)을 만족한다.

2. INDIRECT METHOD

LTI system 의 성질을 이용하여 식(1.1)의 좌변과 우변이 같음을 증명한다.

$$
\begin{aligned}
(x[n]*h_1[n])*h_2[n] &= x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) && (by\ \ associative\ \ property) \\
&= x[n]*(h_2[n]*h_1[n]) && (by\ \ commutative\ \ property) \\
&= (x[n]*h_2[n])*h_1[n] && (by\ \ associative\ \ property)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

식(1.6)을 통하여 식(1.1)을 만족함을 알 수 있다.

(2) non linear response $h_1[n]$, linear response $h_2[n]$을 다음과 같이 예를 들자.

$$
\begin{aligned}
x[n]*h_1[n] &= |x[n]|^2 \\
x[n]*h_2[n] &= a\cdot x[n]+b\cdot x[n-1]
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

먼저, 식(1.1)의 좌변은

$$
\begin{aligned}
(x[n]*h_1[n])*h_2[n] &= |x[n]|^2 * h_2[n] \\
&= a\cdot|x[n]|^2 + b\cdot|x[n-1]|^2
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

식(1.8)과 같이 나타낼 수 있고, 식(1.1)의 우변은

$$
\begin{aligned}
(x[n]*h_2[n])*h_1[n] &= (a\cdot x[n]+b\cdot x[n-1])*h_1[n] \\
&= |a\cdot x[n]+b\cdot x[n-1]|^2 \\
&= a^2\cdot|x[n]|^2 + b^2\cdot|x[n-1]|^2 + ab\cdot x[n]\cdot x[n-1]
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

식(1.9)와 같이 나타낼 수 있다.

결국 식(1.8)과 식(1.9)를 비교하면 서로 다름을 알 수 있다.

[Problem 2] (30 points) (1) Strictly speaking, the following general Nth-order linear constant-coefficient ODE cannot be used to represent a causal system S. Explain why.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \tag{2.1}$$

(2) Show that the system represented by (2.1) is linear and time-invariant.
(3) Find the general Nth-order linear constant-coefficient ODE which can represent legally a causal system but which gives the same input-output transfer function as the above ODE.
(4) Give the block diagram representation of the Nth-order linear constant-coefficient ODE you have found in (3).

Solution)
(1)

입력 신호 $x(t)$ 의 임의의 시각 $t = a$ 에서 k^{th} 도함수가 정의되려면

(i) 시각 $t = a$ 에서 $x^{(k-1)}(t)$ 가 정의 되어야 한다.
(ii) 식(2.2)가 정의 되어야 한다.

$$x^{(k)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{x^{(k-1)}(a+h) - x^{(k-1)}(a)}{h} \tag{2.2}$$

식(2.2)는

$$\lim_{h \to +0} \frac{x^{(k-1)}(a-h) - x^{(k-1)}(a)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{x^{(k-1)}(a+h) - x^{(k-1)}(a)}{h} \tag{2.3}$$

임을 뜻한다.

식(2.3) 의 우변의 식을 보면 현재 시각 t 보다 미래의 값을 요구한다($s = t$ 에서 미분이 정의되려면 t 근방에서 $x(s)$ 가 정의되어야 한다).
따라서 입력으로 미분이 들어가 있는 시스템은 엄밀하게 말해 $noncausal$ 시스템이다.

식(2.1)에서 $M = 0$ 이면 $causal$ 시스템 이고, $M \geq 1$ 이면 입력의 미분값이 시스템에 들어가게 되므로 $noncausal$ 시스템이다.

(2)

(i) linear 임을 보인다.

입력이 $x(t) = x_1(t)$, $x(t) = x_2(t)$ 일 때의 출력을 각각 $y(t) = y_1(t)$, $y(t) = y_2(t)$ 이라 하면 식(2.1)에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k {y_1}^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^{M} b_k {x_1}^{(k)}(t) \quad , t \geq t_0 \\ \sum_{k=0}^{N} a_k {y_2}^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^{M} b_k {x_2}^{(k)}(t) \quad , t \geq t_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

임의의 $complex\ number\ \alpha, \beta$ 에 대해 다음과 같은 입력 $\bar{x}(t)$ 을 생각하고

$$\bar{x}(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \tag{2.5}$$

$x(t) = \bar{x}(t)$ 일 때의 출력을 $y(t) = \bar{y}(t)$ 라고 하면 식(2.1)에 의해 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \bar{y}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^{(k)}(t) \ , \ t \geq t_0 \tag{2.6}$$

시스템의 *Linearity* 는 *zero state response* 일 경우에만 따질 수 있다. 따라서 식(2.4), 식(2.6)의 *initial condition* 은 다음과 같다.

$$y_1^{(k)}(t_0) = y_2^{(k)}(t_0) = \bar{y}^{(k)}(t_0) = 0 \ , \ k = 0,1, \ldots, (N-1) \tag{2.7}$$

두 출력의 차이를 $\tilde{y}(t)$ 라는 변수로 두자.

$$\tilde{y}(t) \triangleq \bar{y}(t) - (\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) \tag{2.8}$$

그러면 $\tilde{y}(t)$ 의 *initial condition* 은 식(2.7)에 의해 다음과 같다.

$$\tilde{y}^{(k)}(t_0) = 0 \ , \ k = 0,1,2,\ldots,(N-1) \tag{2.9}$$

식(2.8)을 식(2.1)에 대입해 전개하면

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} a_k \tilde{y}^{(k)}(t) &= \sum_{k=0}^{N} a_k \{\bar{y}^{(k)}(t) - (\alpha y_1(t) + \beta y_2(t))\} \ , \ t \geq t_0 \\
&= \sum_{k=0}^{N} a_k \bar{y}^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k (\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)) \ , \ t \geq t_0 \ \ (by\ (2.4)\ (2.5)) \\
&= \sum_{k=0}^{M} b_k (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^{(k)}(t) - \alpha \sum_{k=0}^{M} b_k x_1^{(k)}(t) - \beta \sum_{k=0}^{M} b_k x_2^{(k)}(t) \ , \ t \geq t_0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

식(2.9)와 *Uniqueness theorem* 에 의해서 식(2.10)의 유일한 해는

$$\tilde{y}(t) = 0 \ , \ t \geq t_0$$

즉

$$\bar{y}(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \ , \ t \geq t_0$$

주어진 시스템은 식(2.5)에 대한 *zero state response* 가 *superposition property* 를 만족하므로 *Linearity* 가 성립한다.

(ii) Time invariant 함을 보인다.

$t \geq 0$ 에서 입력 $x(t) = r(t)u(t)$ 에 대한 출력 $y(t)$ 는 식(2.1)에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k r^{(k)}(t) \ \ , t \geq 0 \\
&y^{(k)}(0) = K_k \ , \ k = 0,1,2,\ldots,(N-1)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

t_0 *time shift* 입력 $\bar{x}(t)=r(t-t_0)u(t-t_0)$ 에 대한 출력 $\bar{y}(t)$ 는 식(2.1)에 의해 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \bar{y}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k r^{(k)}(t-t_0)\ ,\ t \ge t_0$$
$$\bar{y}^{(k)}(t_0) = K_k\ ,\ k=0,1,2,...,(N-1) \quad (2.12)$$

식(2.12)의 변수 t 와 출력 $\bar{y}(t)$ 를 각각 다음의 $\tilde{t}$ 와 $\hat{y}(t)$ 로 치환하면

$$\tilde{t} \triangleq t-t_0$$
$$\hat{y}(\tilde{t}) \triangleq \bar{y}(\tilde{t}+t_0) \quad (2.13)$$

식(2.12)는 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \hat{y}^{(k)}(\tilde{t}) = \sum_{k=0}^{M} b_k r^{(k)}(\tilde{t})\quad ,\tilde{t} \ge 0$$
$$\hat{y}^{(k)}(0) = K_k\ ,\ k=0,1,2,...,(N-1) \quad (2.14)$$

$t=\tilde{t}$ 두고 식(2.11)과 식(2.14)을 비교하면

$$\hat{y}(t) = y(t)\ \ ,\ t \ge 0 \quad (2.15)$$

식(2.13)과 식(2.15)에 의하면 *original* 출력 $y(t)$ 와 *time shift* 출력 $\bar{y}(t)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\bar{y}(t) = y(t-t_0)\ \ ,\ t \ge t_0 \quad (2.16)$$

식(2.16)에 의하면 주어진 시스템은 입력의 *time shift* t_0 에 대해 출력의 *time shift* t_0 가 같으므로 *time invariant* 하다.

(3)

입력 $x(t)$, 출력 $y(t)$, *impluse response* $h(t)$ 의 *Laplace transform* 을 각각 $X(s), Y(s), H(s)$ 라 하자. 시스템 입출력 전달함수 $H(s)$ 는 입력 X(s)와 *zero state response* Y(s)의 비율로 정의된다.

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (2.17)$$

식(2.1)의 전달함수를 구하기 위해 양변에 *Laplace transform* 을 하면 다음과 같다

$$(\alpha_N s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + ... + \alpha_0)Y(s) = (\beta_M s^M + \beta_{M-1}s^{M-1} + ... + \beta_0)X(s) \quad (2.18)$$

식(2.18)에서 시스템의 *Transfer function* $H(s)$ 를 구하면

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\beta_M s^M + \beta_{M-1}s^{M-1} + ... + \beta_0}{\alpha_N s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + ... + \alpha_0} \quad (2.19)$$

여기서 *dummy variable* $z(t)$ 를 도입하여 이의 *Laplace transform* 을 $Z(s)$ 라하고 식(2.19)의 분모와 분자에 곱하면 다음과 같다.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(\beta_M s^M + \beta_{M-1} s^{M-1} + ... + \beta_0) Z(s)}{(\alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + ... + \alpha_0) Z(s)} \tag{2.20}$$

식(2.20)에서 분모와 분자를 분리해 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X(s) &= (\alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + ... + \alpha_0) Z(s) \\ Y(s) &= (\beta_M s^M + \beta_{M-1} s^{M-1} + ... + \beta_0) Z(s) \end{aligned} \tag{2.21}$$

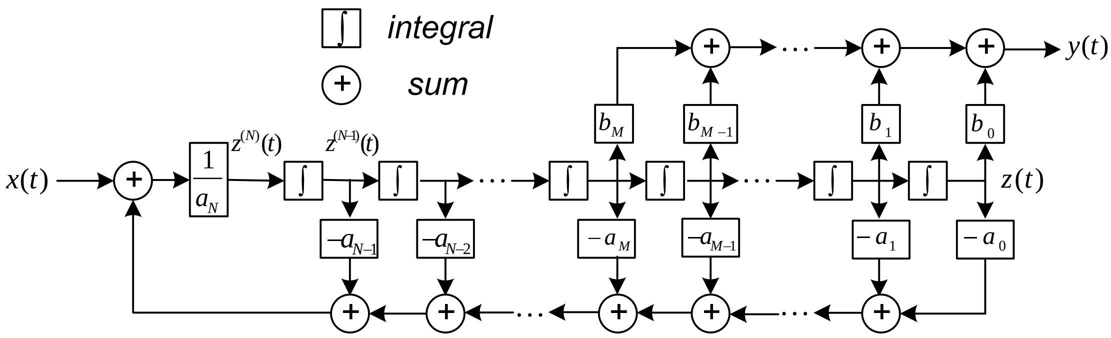
식(2.21)에서 입력 $x(t)$ 와 출력 $y(t)$ 에 대해 각각 *Inverse Laplace transform* 하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k z^{(k)}(t) &= x(t) \\ y(t) &= \sum_{k=0}^{M} b_k z^{(k)}(t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

식(2.22)는 *Laplace transform* 이 식(2.21)과 같고 *Transfer function* 은 식(2.19)와 같으므로, 식(2.1)과 같은 I/O *transfer function* 을 갖는 시스템이다.

식(2.22)에서 $N < M$ 이면 출력 $y(t)$ 에는 입력 $x(t)$ 의 미분이 들어가게 되므로 *noncausal* 이다. 따라서 $N \geq M$ 일 때 주어진 시스템은 *causal* 하다.

이것의 *block diagram* 을 그리면 다음과 같다.



[Problem 3] (10 points) Consider an LTI system S relaxed at $t = -\infty$ and an input signal $x(t) = 4e^{-2t}u(t-3)$. If

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \tag{3.1}$$

and

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow -2y(t) + 3e^{-3t}u(t) \tag{3.2}$$

then determine the impulse response h(t) of S.

Solution

$x(t)$의 미분을 구하기 위하여 $x(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있고

$$\begin{aligned} &x(t) = v(t)w(t), \\ &v(t) = 4e^{-2t}, \quad w(t) = u(t-3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Leibnitz's theorem에 따라 $x(t)$의 미분은

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}w(t) + v(t)\frac{dw(t)}{dt} \tag{3.4}$$

식(3.4)와 같이 쓸 수 있다. 한편 $u(t)$는

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

식(3.5)와 같이 쓸 수 있다. 따라서 식(3.4)와 식(3.5)를 이용하여 $x(t)$를 시간에 따라 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -8e^{-2t}u(t-3) + 4e^{-2t}\delta(t-3) \\ &= -2x(t) + 4e^{-6}\delta(t-3) \qquad (\because x(t) = 4e^{-2t}u(t-3)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

이다. 식(3.6)이 system S의 input으로 들어가면 식(3.1)과 식(3.5)로부터

$$-2x(t) + 4e^{-6}\delta(t-3) \quad \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \quad -2y(t) + 4e^{-6}h(t-3) \tag{3.7}$$

식(3.7)이 유도되고, output을 식(3.2)와 비교하면

$$4e^{-6}h(t-3) = 3e^{-3t}u(t) \tag{3.8}$$

식(3.8)을 얻을 수 있고 결과적으로 h(t)는

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{3}{4e^{-6}}e^{-3(t+3)}u(t+3) \\ &= \frac{3}{4}e^{-3(t+1)}u(t+3) \end{aligned} \tag{3.9}$$

식(3.9)와 같이 구할 수 있다.

[Problem 4] (10 Points) Suppose we are given the following information about a signal x[n] where N is the period of signal and the Fourier series coefficient of the signal is denoted by a_k.

조건 1. x[n] is a real and odd signal.
조건 2. N = 7
조건 3. $-2a_8 = a_{12}$
조건 4. $|a_{15}|^2 = 1$
조건 5. $\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}|x[n]|^2 = 10$

Specify two different signals that satisfy these conditions.

Solution)

조건 1과 교재 p. 221 에 의해서

$$a_k = -a_{-k} \tag{4.1}$$

$$\mathrm{Re}[a_k] = 0 \tag{4.2}$$

조건 2와 교재 p. 221 에 의해서

$$a_{7n+k} = a_k, \quad (n = 1, 2, 3....) \tag{4.3}$$

식 (4.2)와 식(4.3) 그리고 조건 3,4에 의해서

$$a_8 = a_1,\ a_{15} = a_1,\ a_{12} = a_{-2} \tag{4.4}$$

조건 5에 의해서

$$\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}|x[n]|^2 = \sum_{k\in<N>}|a_k|^2 = \sum_{k=-3}^{3}|a_k|^2 = 10 \qquad (By\ \ Parseval's\ \ relation) \tag{4.5}$$

식 (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5)를 이용하면

$$a_0 = -a_0$$
$$a_1 = \pm j$$
$$a_{-2} = -a_2 = \pm 2j$$
$$|a_{-3}|^2 + |a_3|^2 = 0$$

얻어진다.

$\therefore a_0 = 0$, $a_1 = \pm j$, $a_{-1} = \mp j$, $a_2 = \pm 2j$, $a_{-2} = \mp 2j$, $a_3 = 0$, $a_{-3} = 0$ (복호동순)

(i) $a_1 = -j$ 일 때 x[n]

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k \in <n>} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \\
&= +\frac{1}{j} e^{j\frac{2\pi}{7}n} - \frac{1}{j} e^{-j\frac{2\pi}{7}n} + \frac{2}{j} e^{j\frac{4\pi}{7}n} - \frac{2}{j} e^{-j\frac{4\pi}{7}n} \qquad (4.6) \\
&= 2\sin(\frac{2\pi}{7}n) + 4\sin(\frac{4\pi}{7}n)
\end{aligned}
$$

(ii) $a_1 = +j$ 일 때 x[n]

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k = <n>} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \\
&= -\frac{1}{j} e^{j\frac{2\pi}{7}n} + \frac{1}{j} e^{-j\frac{2\pi}{7}n} - \frac{2}{j} e^{j\frac{4\pi}{7}n} + \frac{2}{j} e^{-j\frac{4\pi}{7}n} \qquad (4.7) \\
&= -2\sin(\frac{2\pi}{7}n) - 4\sin(\frac{4\pi}{7}n)
\end{aligned}
$$

식(4.6) (4.7) 에 의해 주어진 문제의 조건을 신호 x[n]은 다음과 같다.

$$x[n] = -2\sin(\frac{2\pi}{7}n) - 4\sin(\frac{4\pi}{7}n)$$

또는

$$x[n] = 2\sin(\frac{2\pi}{7}n) + 4\sin(\frac{4\pi}{7}n)$$

[Problem 5] (30 Points) Consider a discrete-time LTI system S with the following impulse response

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 2 \\ -1 & -2 \le n \le -1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{5.1}$$

Suppose that the input to the system S is the periodic signal given by

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\delta(n-4k) \tag{5.2}$$

with period T = 4.

(a) Determine the Fourier-series coefficients of the output $y[n]$.

(b) The signal $x_{(m)}[n]$ is defined as

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}], & n = \pm m,\ \pm 2m,\ \pm 3m, \ldots \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{5.3}$$

is obtained by scaling the signal x[n] in time. Let a_k be the Fourier series coefficient of the signal x[n], and b_k be the Fourier series coefficient of the time scaling signal $x_{(m)}[n]$. Derive the relation between a_k and b_k.

(c) Suppose that the input x[n] to the discrete-time LTI system S is changed into $x_{(5)}[n]$. Determine Fourier-series coefficients of output $y[n]$.

Solution)

(a)

시스템의 impulse response 가 h[n]인 discrete-time LTI system S에 입력 x[n]을 가하면 출력 y[n]은 다음과 같이 표시된다. (교재 p.228)

$$y[n] = \sum_{k \in <N>} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{5.4}$$

(a_k is the Fourier-series coefficient of x[n] and $H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})$ is the frequency response of the impulse response)

식(5.2)의 입력 x[n]의 Fourier-series coefficient는

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{k \in <N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k \in <4>} 2\delta[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.5}$$

식(5.1)의 Impulse response h[n]의 frequency response는

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=-2}^{2} h[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \qquad (\because N=4)$$

$$= -e^{2j\frac{2\pi}{4}} - e^{j\frac{2\pi}{4}} + 1 + e^{j\frac{2\pi}{4}} + e^{2j\frac{2\pi}{4}} \tag{5.6}$$

$$= 1 - e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

출력 y[n]의 Fourier-series coefficient를 b_k 라고 하면 (5.4) (5.5) (5.6)의 결과를 사용하면

$$b_k = a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) = \frac{1}{2}[1 - e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}] \tag{5.7}$$

(b)

식(5.3)의 입력 $x_{(m)}[n]$ 의 Fourier-series coefficient를 구하면

$$a_{(m)k} = \frac{1}{mN}\sum_{n=0}^{mN-1} x_{(m)}[n]e^{-j\frac{2\pi k}{mN}n}$$

$$= \frac{1}{mN}\sum_{k=0}^{N-1} x_{(m)}[mk]e^{-j\frac{2\pi k}{N}k} \qquad (let\ \ n = mk)$$

$$= \frac{1}{mN}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j\frac{2\pi k}{N}k} \qquad (\because x_{(\mathrm{m})}[mk] = x[\tfrac{mk}{m}]) \tag{5.8}$$

$$= \frac{a_k}{m}$$

(c)

식 (5.7)과 (5.8)에 의해 scaling input $x_{(5)}[n]$ 의 출력 y[n]의 Fourier-series coefficient b_k 는

$$b_k = (\frac{1}{5}a_k)H(e^{jkw_0}) = \frac{1}{10}[1 - e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}}]$$