SIGNAL and SYSTEMS

May 24, 2008

(Instructor : In-Joong Ha, Professor)

EXAM II

[Problem 1] (10 Points) Consider the signal $x(t)$ in Fig. 1 below.

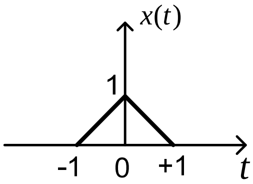
(a) Find the Fourier transform $X(jw)$ of $x(t)$.

(b) Consider the new signal $\tilde{x}(t)$ defined as

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k) \tag{1.1}$$

Find the signal $g(t)$ such that $g(t)$ is not the same as $x(t)$ and

$$\tilde{x}(t) = g(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k) \tag{1.2}$$



<Figure 1>

(solution)

(a)주어진 *triangular pulse* $x(t)$는 *rectangular pulse* $x_1(t)$의 *convolution*으로 나타낼 수 있다.

$$x(t) = x_1(t) * x_1(t)$$
$$where \;\; x_1(t) = \begin{cases} 1 & , -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{1.3}$$

식(1.3)을 *Fourier transform*하면 $x(t)$의 *Fourier transform* $X(jw)$는 다음과 같다.

$$X(jw) = X_1(jw)X_1(jw) \tag{1.4}$$

그리고 $x_1(t)$의 *Fourier transform* $X_1(jw)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_1(jw) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-jwt}dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-jwt}dt \\ &= 2\frac{\sin(w/2)}{w} \end{aligned} \tag{1.5}$$

식(1.4)와 식(1.5)를 이용하면 $X(jw)$는 다음과 같다.

$$X(jw) = [2\frac{\sin(w/2)}{w}]^2 \tag{1.6}$$

(b) 정수의 부분집합 A는 원소의 개수가 $M > 0$이고 대해 집합 B_{kn}을 다음과 같이 정의하고

$$B_{kn} \triangleq \{b \in A \mid k - n \le b \le k + n\} \tag{1.7}$$

다음과 같은 조건을 만족하는 수열$\{c_k\}$을 생각하면

$$\sum_{k \in A} c_k = 1 \tag{1.8}$$

임의의 $T > 0$에 대해 다음이 성립한다.

$$[\sum_{k \in A} c_k \delta(t - kT)] * [\sum_{k=-n}^{n} \delta(t - kT)] = \sum_{k=-n+\min(A)}^{n+\max(A)} (\sum_{r \in B_{kn}} c_r) \delta(t - kT) \tag{1.9}$$

식(1.9)에 n에 대한 극한을 취하면 식(1.8)에 의해 다음이 성립한다.

$$[\sum_{k \in A} c_k \delta(t - kT)] * [\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{1.10}$$

$T = 4$일 때 식(1.10)를 이용하면 식(1.1)은 다음과 같다.

$$\tilde{x}(t) = x(t) * [\sum_{k \in A} c_k \delta(t - 4k)] * [\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4k)] \tag{1.11}$$

식 (1.11)과 식(1.2)을 비교하면 $x(t)$와 $g(t)$는 다음의 관계를 가지고 있다.

$$\begin{aligned} g(t) &= x(t) * [\sum_{k \in A} c_k \delta(t - 4k)] \\ &= \sum_{k \in A} c_k x(t - 4k) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$A = \{\ 0\ \}$일 때 $g(t)$는 $x(t)$와 같으므로 문제에서 구하고자 하는 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t) = \sum_{k \in A} c_k x(t - 4k)\ ,\ A \ne \{0\} \tag{1.13}$$

[Problem 2] Let $x(t_1,t_2)$ be a signal that depends upon two independent variables t_1 and t_2. The two-dimensional Fourier Transform of $x(t_1,t_2)$ is defined as

$$X(jw_1, jw_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1,t_2)e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2 \tag{2.1}$$

(a) Determine the inverse transform of $X(jw_1, jw_2)$

(b) Determine the two-dimensional Fourier Transform of the following signal

$$x(t_1,t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|} & for\ -1 \le t_1 \le 1\ and\ -1 \le t_2 \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{2.2}$$

(solution)

(a)Heuristic approach

Aperiodic signal $x(t_1,t_2)$에 대해 *signal* $x_{T,L}(t_1,t_2)$를 다음과 같이 정의하면

$$x_{T,L}(t_1,t_2) \triangleq \begin{cases} x(t_1,t_2)\ ,\ -\frac{T}{2} \le t_1 \le \frac{T}{2}\ and -\frac{L}{2} \le t_2 \le \frac{L}{2} \\ 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Signal $x_{T,L}(t_1,t_2)$과 *signal* $x(t_1,t_2)$의 관계는 다음과 같다.

$$x(t_1,t_2) = \lim_{T\to\infty}\lim_{L\to\infty} x_{T,L}(t_1,t_2) \tag{2.4}$$

식(2.1)을 이용하면 $x_{T,L}(t_1,t_2)$의 *Fourier transform* $X_{T,L}(jw_1, jw_2)$는 다음과 같다.

$$X_{T,L}(jw_1, jw_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_{T,L}(t_1,t_2)e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2 \tag{2.5}$$

Signal $x_{T,L}(t_1,t_2)$를 t_1, t_2 축에 대해 *periodic expansion* 한 *signal* $\tilde{x}(t_1,t_2)$을 다음과 같이 정의하자

$$\tilde{x}(t_1,t_2) \triangleq \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} x_{T,L}(t_1-pT, t_2-qL) \tag{2.6}$$

$\tilde{x}(t_1,t_2)$는 t_1, t_2 축으로 각각 T, L을 주기로 가지고, 그 *Fourier series expansion*은 다음과 같다.

$$\tilde{x}(t_1,t_2) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}[\frac{1}{TL}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t_1,t_2)e^{-j(pw^1{}_0t_1+qw^2{}_0t_2)}dt_1dt_2]e^{j(pw^1{}_0t_1+qw^2{}_0t_2)} \tag{2.7}$$

식(2.3)과 식(2.5)에 의해 식(2.7)은 다음과 같다.

$$\tilde{x}(t_1,t_2) = \sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{1}{TL}X_{T,L}(jpw^1{}_0, jqw^2{}_0)e^{j(pw^1{}_0t_1+qw^2{}_0t_2)} \tag{2.8}$$

$w^1{}_0$과 $w^2{}_0$를 다음과 같이 정의하고

$$w^1{}_0 \triangleq \frac{2\pi}{T}, w^2{}_0 \triangleq \frac{2\pi}{L} \tag{2.9}$$

식(2.9)를 식(2.8)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{gathered}\tilde{x}(t_1,t_2)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}X_{T,L}(jpw^1{}_0, jqw^2{}_0)e^{j(pw^1{}_0t_1+qw^2{}_0t_2)}w^1{}_0w^2{}_0 \\ where\ w^1{}_0=\frac{2\pi}{T}, w^2{}_0=\frac{2\pi}{L}\end{gathered} \tag{2.10}$$

식(2.10)에서 T, L에 대해 각각 극한을 각각 취하고 order of operation을 바꾸면 식(2.4)에 의해 다음과 같다.

$$x(t_1,t_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(jw_1, jw_2)e^{j(w_1t_1+w_2t_2)}dw_1dw_2 \tag{2.11}$$

식(2.11)이 예상되는 $inverse\,Fourier\ transform$이다.

Rigorous approach

이제 식(2.1)에 식(2.11)을 대입하여 식(2.11)이 $inverse\,Fourier\ transform$ 임을 보인다..

$$\begin{aligned}x(t_1,t_2)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau_1,\tau_2)e^{-j(w_1\tau_1+w_2\tau_2)}d\tau_1d\tau_2]e^{j(w_1t_1+w_2t_2)}dw_1dw_2\\ &=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau_1,\tau_2)[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jw_2(\tau_2-t_2)}e^{-jw_1(\tau_1-t_1)}dw_1dw_2]d\tau_1d\tau_2\\ &=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau_1,\tau_2)[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jw_1(\tau_1-t_1)}dw_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jw_2(\tau_2-t_2)}dw_2]d\tau_1d\tau_2\\ &=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau_1,\tau_2)2\pi\delta(\tau_1-t_1)2\pi\delta(\tau_2-t_2)d\tau_1d\tau_2\\ &=x(t_1,t_2)\end{aligned} \tag{2.12}$$

식(2.12)에서 네 번째 등호는 다음의 식에 의해 성립한다.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jw(\tau-t)}dw&=\lim_{W\to\infty}\int_{-W}^{+W}e^{-jw_1(\tau-t)}dw\\ &=\lim_{W\to\infty}\frac{2\sin(W(\tau-t))}{\tau-t}\\ &=\lim_{W\to\infty}2\pi\frac{W}{\pi}sinc(\frac{W(\tau-t)}{\pi})\\ &=2\pi\delta(\tau-t)\end{aligned} \tag{2.13}$$

식(2.13)의 마지막 등호는 delta function을 sinc function의 극한으로 정의한 다음 식에 의해 성립한다.

$$\lim_{W\to\infty}\frac{W}{\pi}sinc\frac{W(t)}{\pi}=\delta(t) \tag{2.14}$$

그러면 식(2.11)이 식(2.1)의 $inverse\,Fourier\ transform$ 임이 증명되었다.

(b)식(2.2)에 주어진 signal $x(t_1,t_2)$ 의 $Fourier\ transform$ $X(jw_1,jw_2)$ 는 식(2.1)에 의해 다음과 같다.

$$X(jw_1,jw_2)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}e^{-|t_1|-|t_2|}\,e^{-j(w_1t_1+w_2t_2)}dt_1dt_2 \tag{2.15}$$

변수 t_1,t_2 가 서로 $independent$ 하다는 조건에 의해 식(2.12)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}X(jw_1,jw_2)&=(\int_{-1}^{1}e^{-|t_1|}e^{-jw_1t_1}dt_1)(\int_{-1}^{1}e^{-|t_2|}e^{-jw_2t_2}dt_2)\\&=(\frac{1-e^{-1-jw_1}}{1+jw_1}+\frac{1-e^{-1+jw_1}}{1-jw_1})(\frac{1-e^{-1-jw_2}}{1+jw_2}+\frac{1-e^{-1+jw_2}}{1-jw_2})\end{aligned} \tag{2.16}$$

식(2.16)을 전개하면 식(2.2)에 주어진 signal의 2-Dimensional Fourier Transform은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}X(jw_1,jw_2)=&\frac{(1-e^{-1-jw_1})(1-e^{-1-jw_2})}{(1+jw_1)(1+jw_2)}+\frac{(1-e^{-1+jw_1})(1-e^{-1-jw_2})}{(1-jw_1)(1+jw_2)}\\&+\frac{(1-e^{-1-jw_1})(1-e^{-1+jw_2})}{(1+jw_1)(1-jw_2)}+\frac{(1-e^{-1+jw_1})(1-e^{-1+jw_2})}{(1-jw_1)(1-jw_2)}\end{aligned}$$

[Problem 3] (10 Points) Find the discrete-time signal whose Fourier transform is given by

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\left(4\omega+\frac{\pi}{2}\right)} \frac{d}{d\omega}\left[\frac{2}{1+\frac{1}{4}e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}} + \frac{2}{1+\frac{1}{4}e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\right] \tag{3.1}$$

<sol>

시스템을 간단히 하기 위해 $S_1(e^{j\omega})$을 다음과 같이 정의하면 Table 5.2에 의하면

$$S_1(e^{j\omega}) \triangleq \frac{2}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \tag{3.2}$$

이고, Fourier transform하면

$$s_1[n] = 2(-\frac{1}{4})^n u[n] \tag{3.3}$$

과 같다. 식(3.2)와 식(3.3)은 Frequency shifting 에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})}) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{j\frac{\pi}{4}n} s_1[n] \tag{3.4}$$

$$S_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{4})}) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\frac{\pi}{4}n} s_1[n] \tag{3.5}$$

식(3.1)의 미분항 속의 식을 $S(e^{j\omega})$으로 정의하고 $S_1(e^{j\omega})$을 이용하여 나타내면

$$S(e^{j\omega}) \triangleq S_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})}) + S_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{4})}) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} s[n] = (e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}) s_1[n] = 2\cos(\frac{\pi}{4}n) s_1[n] \tag{3.6}$$

와 같다. $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$, $S(e^{j\omega})$을 사용하여 전체 식(3.1)을 표현하면

$$X(e^{j\omega}) = -je^{j4\omega} \frac{d}{d\omega} S(e^{j\omega}) \tag{3.7}$$

과 같이 표현할 수 있고, Table 5.1 의 Differentiation in Frequency property를 이용하여 Fourier transform을 취하면

$$x[n] = -(n-4)s[n-4] \tag{3.8}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식(3.6)과 식(3.8)을 이용하면

$$\begin{aligned} x[n] &= -(n-4)\cdot 2\cos(\frac{\pi}{4}(n-4)) s_1[n-4] \\ &= -(n-4)\cdot 2\cos(\frac{\pi}{4}(n-4))\cdot 2(-\frac{1}{4})^{n-4} u[n-4] \\ &= -4(n-4)\cos(\frac{\pi}{4}(n-4))(-\frac{1}{4})^{n-4} u[n-4] \end{aligned} \tag{3.9}$$

위와 같이 $x[n]$을 구할 수 있다.

[Problem 4] (10 Points) Consider a system built as the cascade interconnection of two LTI systems with frequency responses

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \tag{4.1}$$

and

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{9}e^{-j2\omega}} \tag{4.2}$$

(a) Find the difference equation describing the overall system.

(b) Determine the impulse response of the overall system.

<sol>

(a) 두 개의 시스템이 직렬로 연결되어 있기 때문에 전체 시스템의 frequency response는

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) \\ &= \frac{\left(2 - e^{-j\omega}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{9}e^{-j2\omega}\right)} \\ &= \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{27}e^{-j3\omega}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다. 따라서 Input 과 output의 Fourier transforms은

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{27}e^{-j3\omega}} \tag{4.4}$$

와 같다. 식(4.4)를 다시 쓰면

$$\left(1 + \frac{1}{27}e^{-j3\omega}\right)Y(e^{j\omega}) = \left(2 - e^{-j\omega}\right)X(e^{j\omega}) \tag{4.5}$$

이고, inverse Fourier transform을 취해주면

$$y[n] + \frac{1}{27}y[n-3] = 2x[n] - x[n-1] \tag{4.6}$$

와 같이 difference equation을 구할 수 있다.

(b) 식(4.3)을 inverse transform 하기 위해 분자에 $e^{-j\omega}$ 항을 없애주려고 $H(e^{j\omega})$ 를 바꾸면

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{27}e^{-j3\omega}}$$

$$= \frac{2-e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{j60}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j60}e^{-j\omega}\right)} \tag{4.7}$$

$$= \frac{\frac{5}{3}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{(1+j3\sqrt{3})}{6}}{1-\frac{1}{3}e^{j60}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{(1-j3\sqrt{3})}{6}}{1-\frac{1}{3}e^{-j60}e^{-j\omega}}$$

과 같고, 이것을 가지고 inverse Fourier transform을 취하면

$$h[n] = \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1+j3\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{3}e^{j60}\right)^n u[n] + \frac{1-j3\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{3}e^{-j60}\right)^n u[n] \tag{4.8}$$

을 얻을 수 있다.

[Problem 5] (20 Points) (a) Find the condition under which the formal Fourier transform of the signal

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \tag{5.1}$$

exists. Then, derive its formal Fourier transform.

(b) Show that the Fourier transform of the above signal not satisfying such a condition can be expressed as follows.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \tag{5.2}$$

(c) In Example 5.8 of the textbook, the Fourier transform $X(e^{j\omega})$ of the unit step $x[n] \triangleq u[n]$ is derived in the following steps.

First, the following facts are used.

$$g[n] \triangleq \delta[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = 1 \tag{5.3}$$

,

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m] \tag{5.4}$$

Then, applying the results in (5.1), (5.2) yields

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\ &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Explain which parts in the above arguments are not mathematically logical.

<sol>

(a) $X(e^{j\omega})$ 가 존재하고, $y[n]$ 이 다음과 같은 조건을 만족할 때

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]| < \infty \tag{5.6}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 < \infty \tag{5.7}$$

$y[n]$ 의 Fourier transform은 존재한다.

따라서 식(5.1)을 difference equation 으로 나타내면

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \tag{5.8}$$

과 같고, 이 식의 양변을 Fourier transform 하면 다음과 같다.

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega}) \quad (by \;\; time \;\; shifting \;\; property) \tag{5.9}$$

위 식에서 우변의 $Y(e^{j\omega})$ 항을 좌변으로 옮기고 정리하면

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-e^{-j\omega})} X(e^{j\omega}) \tag{5.10}$$

위와 같이 Formal Fourier transform 을 구할 수 있다.

또한 $s[n] \triangleq \sum_{m=-\infty}^{n} |y[m]|$ 로 두고, 식(5.6)의 조건을 가정하면 $s[n]$은 n이 무한대로 감에 따라 어떤 S 값으로 수렴하는 것을 알고, $y[n]$을 아래와 같이 둘 수 있으므로

$$y[n] = s[n] - s[n-1] \tag{5.11}$$

n을 무한대로 가져가면

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y[n] &= \lim_{n\to\infty} s[n] - \lim_{n\to\infty} s[n-1] \\ &= S - S = 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

임을 얻을 수 있다. 또한 식(5.7)의 조건을 이용하여도 식(5.11)의 결과를 얻을 수 있다. 이를 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j0m} = X(e^{j0}) = 0 \tag{5.13}$$

이 성립하여 DC 성분이 0임을 알 수 있다.

이것은 식(5.2)에서처럼 일반적인 $y[n]$의 Fourier Transform의 형태에서 $X(e^{j0})$이 0인 케이스로 볼 수 있다.

(b) $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] = u[n] * x[n]$의 Fourier transform을 구하기 위해 먼저 unit step function $u[n]$의 Fourier transform을 구해보자.

$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(n) \;\; where \;\; \mathrm{sgn}(n) \triangleq \begin{cases} -1 \;, \; n < 0 \\ \;\;1 \;, \; n \geq 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

식(5.14)의 양변에 Fourier transform을 취하기 위해 식(5.14)의 우변 첫 번째 항의 Fourier transform을 구하면

$$\mathcal{F}\{1\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad (by\ (5.18),\ \ p.367)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k) \tag{5.15}$$

를 얻을 수 있고, 식(5.14)의 우변 두 번째 항의 Fourier transform을 구하면

$$e^{-a|n|}\mathrm{sgn}(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)}} + \frac{1}{1-e^{(a-j\omega)}}$$

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(n)\} = \frac{2}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(n)\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \tag{5.16}$$

를 얻을 수 있다.

식(5.14), 식(5.15), 식(5.16)를 이용하여 $u[n]$의 Fourier transfrom을 구하면

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \tag{5.17}$$

을 얻을 수 있다.

이것을 이용하여 $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] = u[n] * x[n]$의 관계를 이용하여 Fourier transform을 취하면

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]\right\} &= \mathcal{F}\{u[n]*x[n]\} \\
&= \mathcal{F}\{u[n]\}X(e^{j\omega}) \\
&= \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(e^{j\omega})\delta(\omega-2\pi k) \qquad (5.18) \\
&= \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(e^{j2\pi k})\delta(\omega-2\pi k) \qquad (by\ \ (1.69),\ \ p.32) \\
&= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-2\pi k)
\end{aligned}
$$

을 얻을 수 있고 이것은 식(5.2)와 같으므로 증명.

(c) 식(5.2)의 증명을 통해 얻은 결과(식(5.18))를 이용하여 식(5.2)의 증명과정에 있는 결과(식(5.17))을 도출해내는 논리적 오류를 가지고 있다.

[Problem 6] (20 Points) Let $x[n]$ be a signal that is 0 outside the interval $0 \le n \le N_1 - 1$. For $N \ge N_1$, the N-point DFT(discrete Fourier transform) of $x[n]$ is given by

$$\widetilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \ \ k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{6.1}$$

It is convenient to write eq. (6.1) as

$$\widetilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] {W_N}^{nk}, \ \ W_N \triangleq e^{-j2\pi/N} \tag{6.2}$$

Suppose that N is even. Let $f[n] = x[2n]$ represent the even-indexed samples of $x[n]$, and let $g[n] = x[2n+1]$ represent the odd-indexed samples.

(a) Show that $f[n]$ and $g[n]$ are zero outside the interval $0 \le n \le (N/2) - 1$.

(b) Show that the N-point DFT $\widetilde{X}[k]$ of $x[n]$ can be expressed as

$$\begin{aligned}\widetilde{X}[k] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^{nk} + \frac{1}{N} W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^{nk} \\ &= \frac{1}{2}\widetilde{F}[k] + \frac{1}{2} W_N^k \widetilde{G}[k], \quad k = 0,1,\ldots,N-1\end{aligned} \tag{6.3}$$

Where

$$\begin{aligned}\widetilde{F}[k] &\triangleq \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^{nk}, \\ \widetilde{G}[k] &\triangleq \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^{nk}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

(c) Show that, for all k,

$$\begin{aligned}\widetilde{F}[k + \frac{N}{2}] &= \widetilde{F}[k], \\ \widetilde{G}[k + \frac{N}{2}] &= \widetilde{G}[k].\end{aligned} \tag{6.5}$$

Note that $\widetilde{F}[k], \ k = 0,1,\ldots,(N/2)-1$, and $\widetilde{G}[k], \ k = 0,1,\ldots,(N/2)-1$, are the $(N/2)$-point DFTs of $f[n]$ and $g[n]$, respectively. Thus, eq. (6.3) indicates that the length-N DFT of $x[n]$ can be calculated in terms of two DFTs of length $N/2$.

(d) Determine the number of complex multiplications required to compute $\widetilde{X}[k], \ k = 0,1,2,\ldots,N-1$, from eq. (6.3) by first computing $\widetilde{F}[k]$ and $\widetilde{G}[k]$. (Assume that $x[n]$ is complex and that the required values of W_N^{nk} have been pre-computed and stored in a table. For simplicity, do not exploit the fact that, for certain values of n and k, W_N^{nk} is equal to ± 1 or $\pm j$ and hence does not, strictly speaking, require a full complex multiplication. Also, ignore the multiplications by the quantity 1/2 in (6.3)).

<sol>

(a) $x[n]$이 $0 \le n \le N_1 - 1$영역 밖에서는 zero값을 가지므로 $0 \le n \le N-1$영역 밖에서도 zero값을 가진다. $f[n] = x[2n]$ 이므로 $f[0] = x[0], \ f[1] = x[2], \ \ldots, \ f[(N/2)-1] = x[N-2]$ 이고, $0 \le n \le \left(N/2\right) - 1$ 영역 밖에서 zero 값을 가지고, 마찬가지로 $g[n] = x[2n+1]$ 이므로

$g[0]=x[1],\ g[1]=x[3],\ \ldots\ ,\ g[(N/2)-1]=x[N]$ 이고, $0 \le n \le (N/2)-1$ 영역 밖에서 zero 값을 가진다. 결국 $0 \le n \le (N/2)-1$ 밖에서는 $f[n],\ g[n]$ 이 zero 값을 가짐을 알 수 있다.

(b) 식(6.1)을 두 부분으로 나눠서 다시 쓰면

$$\widetilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n]W_N^{2nk}+W_N^k\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1]W_N^{2nk} \tag{6.6}$$

과 같이 쓸 수 있고, $W_N^{2nk}=W_{N/2}^{nk}$, $f[n]=x[2n]$, $g[n]=x[2n+1]$ 이므로 식(6.6)을 다시 쓰면

$$\widetilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk}+W_N^k\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{nk} \tag{6.7}$$

과 같이 쓸 수 있고, 식(6.4)를 이용하면

$$\widetilde{X}[k]=\frac{1}{2}\widetilde{F}[k]+\frac{1}{2}W_N^k\widetilde{G}[k] \tag{6.8}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

(c) 식(6.2)의 정의로부터

$$W_{N/2}^{nN/2}=e^{-j2\pi n}=1 \tag{6.9}$$

임을 알 수 있다. 식(6.5)를 다시 전개하면

$$\begin{aligned}\widetilde{F}[k+N/2]&=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk}W_{N/2}^{nN/2}\\&=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk}, \qquad \text{(by 식(6.9))}\\&=\widetilde{F}[k]\end{aligned} \tag{6.10}$$

를 얻을 수 있고, 비슷한 방법으로

$$\begin{aligned}\widetilde{G}[k+N/2]&=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{nk}W_{N/2}^{nN/2}\\&=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{nk}, \qquad \text{(by 식(6.9))}\\&=\widetilde{G}[k]\end{aligned} \tag{6.11}$$

을 얻을 수 있다.

(d) $\widetilde{F}[k]$ 를 구할 때, 각각의 k 에 대하여 식(6.4)에 따라 $N/2$ 개의 complex multiplications 이 필요하고, 식(6.5)에 따라 k 의 개수가 $N/2$ 개이므로 총 $N^2/4$ 개의 complex multiplications 가 필요하다. 마찬가지로 $\widetilde{G}[k]$ 도 같은 방식으로 구하면 $N^2/4$ 개의 complex multiplications 이 필요하다. 그리고, 식(6.8)을 참고하면 $W_N^k\widetilde{G}[k]$ 항에서 k 마다 한번씩의 complex multiplication이 추가로 필요하므로 N 개의 complex multiplications이 필요하다. 결국 $\widetilde{X}[k]$ 를 구하기 위해서는 총 $N^2/2+N$ 개의 complex multiplications가 필요하다.

\- E N D -