

(Instructor : In-Joong Ha, Professor)

EXAM III

[Problem 1] (20 points) A discrete-time system is implemented as shown in **Fig. 1**. The system S shown below is an LTI system with impulse response $h_p[n]$ which is relaxed at $n = -\infty$.

- (a) Show that the overall system is time invariant.
- (b) If $h_p[n]$ is a low-pass filter, what type of filter does the system in **Fig. 1** implement?

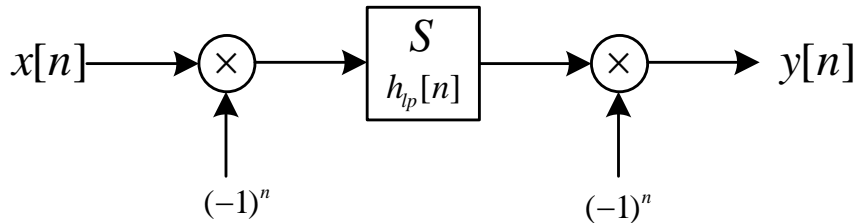


Fig. 1

<sol> (a) S 가 LTI system 이고 impulse response $h_p[n]$ 이 relaxed at $n = -\infty$ 이므로 입력 신호에 대해 convolution 으로 나타낼 수 있고, $(-1)^n = e^{j\pi n}$ 이므로 **Fig. 1** 의 시스템을 나타내면 다음과 같다.

$$y[n] = (x[n]e^{j\pi n} * h_p[n])e^{j\pi n} \tag{1.1}$$

입력이 $x[n]$ 일 때, 출력 $y[n]$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$y[n] = a[n]e^{j\pi n}, \quad (\text{where } a[n] \triangleq (x[n]e^{j\pi n} * h_p[n])) \tag{1.2}$$

$a[n]$ 을 Fourier transform 시켜주면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})H_p(e^{j\omega}) \tag{1.3}$$

한편 **Fig. 1** 에서 입력을 $x[n-n_0]$ 로 주었을 때 출력을 $\bar{y}[n]$ 으로 나타내면, 다음과 같다.

$$\bar{y}[n] = b[n]e^{j\pi n}, \quad (\text{where } b[n] \triangleq (x[n-n_0]e^{j\pi n} * h_p[n])) \tag{1.4}$$

$b[n]$ 을 Fourier transform 시켜주면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} B(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}(x[n-n_0]e^{j\pi n} * h_p[n]) \\ &= X(e^{j(\omega-\pi)})H_p(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \\ &= A(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \end{aligned} \tag{1.5}$$

위 식에서 $b[n] = a[n - n_0]$ 임을 알 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}\bar{y}[n] &= b[n]e^{j\pi n} \\ &= a[n - n_0]e^{j\pi n}\end{aligned}\tag{1.6}$$

임을 알 수 있다. 식(1.2)을 이용하면

$$\bar{y}[n] = y[n - n_0]\tag{1.7}$$

임을 알 수 있다. 따라서 시스템은 time invariant 이다.

(b) 식(1.2)의 양변을 식(1.3)과 frequency shifting property 를 이용하여 Fourier transform 시켜주면 다음과 같다.

$$Y(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega - \pi)})X(e^{j\omega})\tag{1.8}$$

결국, 전체 시스템의 frequency response 는 $H_{lp}(e^{j(\omega - \pi)})$ 와 같다.

문제에서의 가정처럼 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 가 low-pass filter 이면 $H_{lp}(e^{j(\omega - \pi)})$ 는 π 만큼 shifting 된 형태이므로 high-pass filter 이다. (p.498 figure p.6.43 참고)

[Problem 2] (20 points) In this problem, we explore some of the filtering issues involved in the commercial version of a typical system that is used in most modern cassette tape decks to reduce noise. The primary source of noise is the high-frequency hiss in the tape playback process, which, in some part, is due to the friction between the tape and the playback head. Let us assume that the noise hiss that is added to the signal upon playback has the spectrum of **Fig. 2** when measured in decibels, with 0dB equal to the signal level at 100 Hz. The spectrum $S(j\omega)$ of the signal has the shape shown in **Fig. 3**.

The system that we analyze has a filter $H_1(j\omega)$ which conditions the signal $s(t)$ before it is recorded. Upon playback, the hiss $n(t)$ is added to the signal. The system is represented schematically in **Fig. 4**.

Suppose we would like our overall system to have a signal-to-noise ratio of 40dB over the frequency range $50 \text{ Hz} < \omega / 2\pi < 20 \text{ kHz}$.

(a) Determine the transfer characteristic of the filter $H_1(j\omega)$. Sketch the Bode plot of $H_1(j\omega)$.

(b) If we were to listen to the signal $p(t)$, assuming that the playback process does nothing more than add hiss to the signal, how do you think it would sound?

(c) What should the Bode plot and transfer characteristic of the filter $H_2(j\omega)$ be in order for the signal $\hat{s}(t)$ to sound similar to $s(t)$?

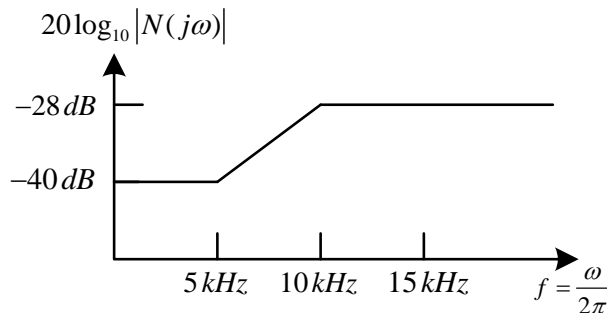


Fig. 2

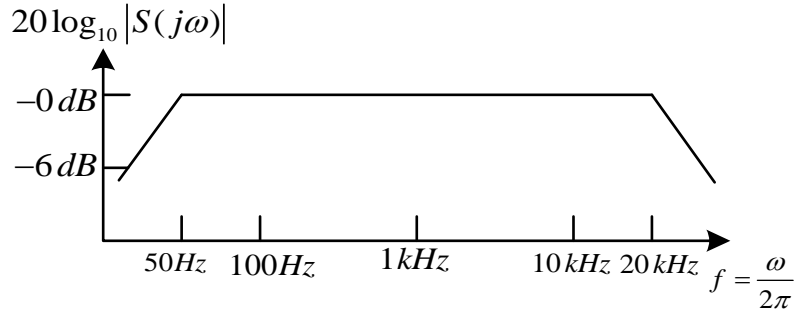


Fig. 3

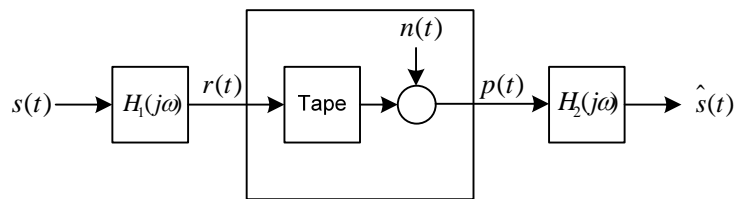


Fig. 4

<sol> (a) Fig. 4 를 참고하면 overall system 은 다음과 같은 식으로 표현 될 수 있다.

$$\hat{S}(j\omega) = (S(j\omega)H_1(j\omega) + N(j\omega))H_2(j\omega) \quad (2.1)$$

50 Hz < $\omega/2\pi$ < 20 kHz 범위에서 overall system 이 SNR(signal-to-noise ratio) 을 40dB 가져야 하므로, 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} SNR &= 20\log_{10} \left| \frac{S(j\omega)H_1(j\omega)H_2(j\omega)}{N(j\omega)H_2(j\omega)} \right| \\ &= 20\log_{10} \left| \frac{S(j\omega)H_1(j\omega)}{N(j\omega)} \right| \\ &= 40dB \quad \left(\text{for } 50 < \frac{\omega}{2\pi} < 20000 \text{ (Hz)} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Fig. 2 를 보면 frequency 가 0~5kHz 범위에서는 -40dB 의 noise 가 더해지고, 10kHz 이상의 범위에서는 -28dB 의 noise 가 더해지는 것을 알 수 있다. 따라서

$$20\log_{10}|H_1(j\omega)| = \begin{cases} 0dB, & \frac{\omega}{2\pi} < 5kHz \\ 40\log_{10}\left(\frac{\omega/2\pi}{5000}\right)dB, & 5kHz \leq \frac{\omega}{2\pi} < 10kHz \\ 12dB, & 10kHz \leq \frac{\omega}{2\pi} \end{cases} \quad (2.3)$$

의 형태가 되도록 $H_1(j\omega)$ 를 디자인하면 된다. 한편, Frequency 가 5kHz 일 때와 10kHz 일 때 magnitude 차이가 12dB 이므로 2 차 필터가 필요함을 알 수 있다. 식(2.3)의 조건을 만족하는 2 차 필터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_1(j\omega) = \frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_0})^2}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^2}$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 5000 \text{ (rad / sec)}, \quad (2.4)$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 10000 \text{ (rad / sec)}$$

$H_1(j\omega)$ 의 Bode plot 을 matlab 을 이용하여 그리면 다음과 같다.

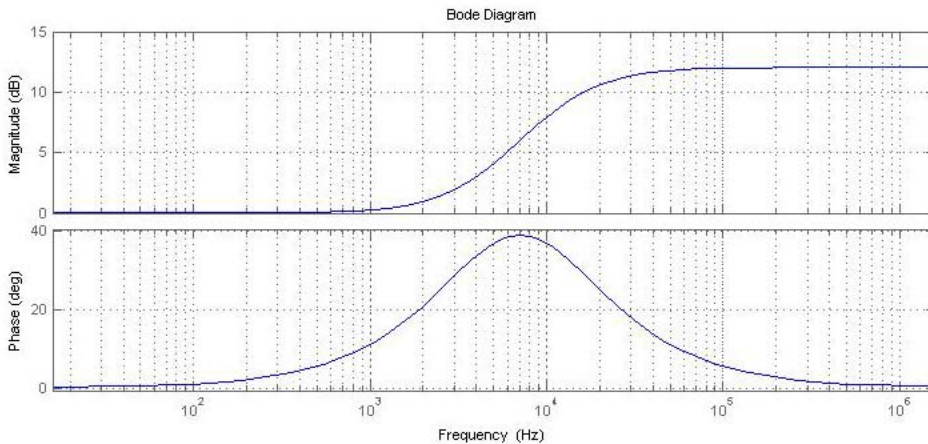


Fig. 2.1

위 그림과 비슷한 형태로 rough 하게 그린 Bode plot 도 정답으로 인정.

(b) 10kHz 이상의 high frequency 대역에서는 입력 신호가 12dB 증폭되어 나타나므로 아주 큰 소리가 들리게 된다.

(c) $s(t)$ 신호가 $\hat{s}(t)$ 에서 비슷한 크기의 신호가 되려면 다음을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned}
20\log_{10}|\hat{S}(j\omega)| &= 20\log_{10}|S(j\omega)H_1(j\omega)H_2(j\omega) + N(j\omega)H_2(j\omega)| \\
&\approx 20\log_{10}|S(j\omega)H_1(j\omega)H_2(j\omega)|, \quad (\text{by 식(2.2),} \\
&\hspace{15em} N(j\omega) \text{ is neglectable}) \\
&= 20\log_{10}|S(j\omega)|
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

위 식을 만족시키는 $H_2(j\omega)$ 는 $H_1(j\omega)$ 의 inverse 와 같고, 식(2.4)를 참고하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
H_2(j\omega) &= \frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^2}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_0})^2} \\
\omega_0 &= 2\pi \cdot 5000 \text{ (rad / sec),} \\
\omega_1 &= 2\pi \cdot 10000 \text{ (rad / sec)}
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

식(2.6)를 matlab 을 이용하여 Bode plot 으로 그리면 아래와 같다.

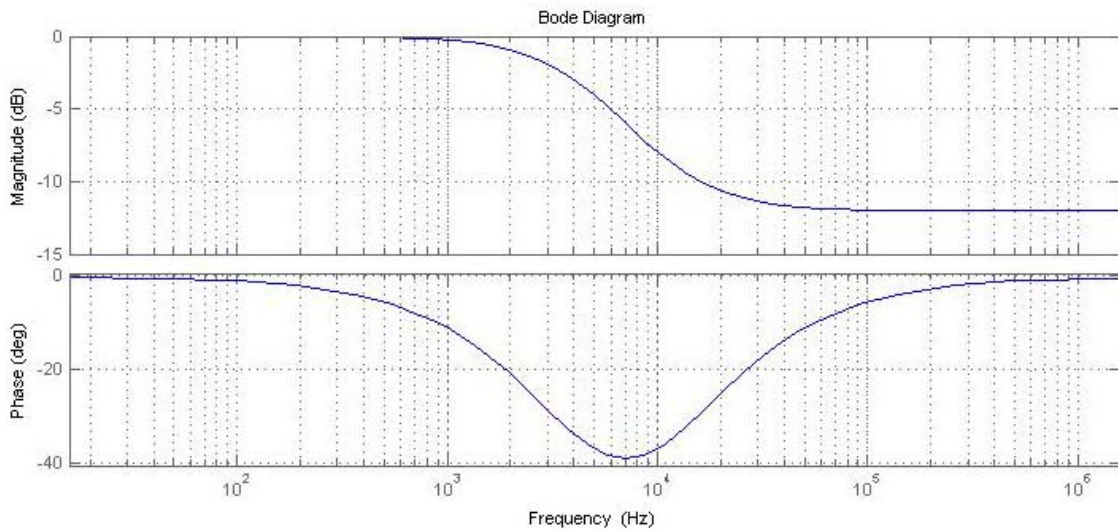


Fig. 2.2

(a) 번과 마찬가지로 rough 하게 그린 Bode plot 도 정답으로 인정.

[Problem 3] (10 points) Show that a discrete-time signal $x[n]$ with bandwidth $\omega_M = \frac{\pi}{3}$ can be recovered from the sampled sequence $x[3k]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ such that

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[3k] \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}(n-3k)\right)}{\frac{\pi}{3}(n-3k)} \right) \quad (3.1)$$

<sol> $X(j\omega)$ 를 그림으로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

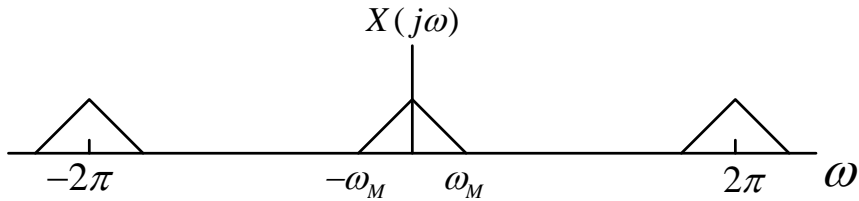


Fig. 2.3

한편, 샘플링된 신호 $x_p[n]$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$x_p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[3k] \delta[n-3k] \quad (3.2)$$

교재 p.546의 식(7.42)를 참고하면 $X_p(e^{j\omega})$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 X(e^{j(\omega-2\pi/3)}) \quad (3.3)$$

위 식으로부터 $\omega_s = \frac{2\pi}{3}$, $N=3$ 임을 알 수 있고, $X_p(e^{j\omega})$ 을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

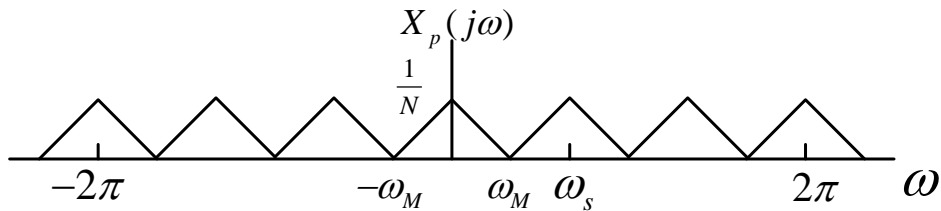


Fig. 2.4

$x[n]$ 을 $x_p[n]$ 으로부터 복구하려면 다음과 같은 ideal low-pass filter가 필요하다.

$$H(j\omega) = \begin{cases} 3, & |\omega| \leq \frac{\pi}{3} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (3.4)$$

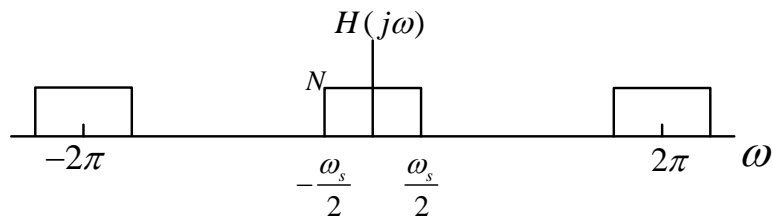


Fig. 2.5

교재 p.549 식(7.44)를 참고하면 $h[n]$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h[n] = \frac{3 \sin(\pi n / 3)}{\pi n} \quad (3.5)$$

결국 $x[n]$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x[n] &= x_p[n] * h[n] \\ &= x_p[n] * \frac{3 \sin(\pi n / 3)}{\pi n} \\ &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[3k] \delta[n - 3k] \right\} * \frac{3 \sin(\pi n / 3)}{\pi n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[3k] \frac{3 \sin(\pi(n - 3k) / 3)}{\pi(n - 3k)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

[Problem 4] (10 points) Let $x[n]$ be a causal sequence (i.e. if $x[n] = 0, n < 0$).

(a) Derive $x[0]$ and $x[1]$ from its z transform $X(z)$.

(b) If $x[0]$ is a nonzero and finite signal, show that there are no poles or zeros of $X(z)$ at $z = \infty$.

(c) Using the result of (a), determine $x[1]$ from

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}, |z| > 2 \quad (4.1)$$

(d) Determine $x[1]$ from (4.1) using the inverse z -transform and compare the result with that of (c).

(solution)

(a) Signal $x[n]$ 의 z -transform 의 정의는 다음과 같다.

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (4.2)$$

주어진 signal 은 causal sequence 이므로 식(4.2)는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= x[0] + x[1]z^{-1} + \dots + x[k]z^{-k} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

식(4.3)에 z 에 대한 극한을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0] \quad (4.4)$$

식(4.3)에서 $x[0]$ 를 좌변으로 이항하고 양변에 z 을 곱하면 다음과 같다.

$$z(X(z) - x[0]) = x[1] + \dots + x[k]z^{-k+1} + x[k+1]z^{-k} \dots \quad (4.5)$$

식(4.5)에 z 에 대한 극한을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(X(z) - x[0]) = x[1] \quad (4.6)$$

$x[0]$ 와 $x[1]$ 은 각각 식(4.4)과 식(4.6)으로 표현 된다.

(b) 문제의 조건에서 $x[0]$ 가 nonzero and finite 이고

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0 &\Leftrightarrow \text{zero at } z = \infty \\ \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \infty &\Leftrightarrow \text{pole at } z = \infty \end{aligned} \quad (4.7)$$

이므로 식(4.4)와 식(4.7)에 의해 infinity 에 위치한 pole 과 zero 는 없다.

(c)식(4.3)을 이용하면 식(4.1)의 $x[0]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x[0] &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

식(4.6)에 식(4.1)과 식(4.7)을 대입하여 $x[1]$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x[1] &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \left[\frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} - 1 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{2z^{-2} - \frac{4}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned} \quad (4.9)$$

(d)식(4.1)을 partial fraction expansion 하면 다음과 같다.

$$X(z) = \frac{\frac{2}{9}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{7}{9}}{1 + 2z^{-1}}, |z| > 2 \quad (4.10)$$

식(4.9)에 Inverse z-transform 을 하면 다음과 같다.

$$x[n] = \frac{2}{9}u[n] + \frac{7}{9}(-2)^n u[n] \quad (4.11)$$

식(4.10)의 $n=1$ 을 대입하면

$$x[1] = -\frac{4}{3} \quad (4.12)$$

식(4.8)과 식(4.11)을 비교해 보면 두 결과는 같다.

[Problem 5] (20 points) The system in **Fig. 5** processes continuous-time signals using a discrete-time filter $h_d[n]$. Suppose that the discrete-time filter $h_d[n]$ satisfies the following equation

$$y_d[n] = -\frac{1}{2}y_d[n-1] + x_d[n] \quad (5.1)$$

Suppose that the input signal $x_c(t)$ is band limited such that $X_c(j\omega) = 0$ for $|\omega| > \frac{\pi}{T}$.

- (a) Determine the frequency response $H_c(j\omega)$ of equivalent overall system with input $x_c(t)$ and output $y_c(t)$.
 (b) Determine the inverse Fourier transform of $H_c(j\omega)$.

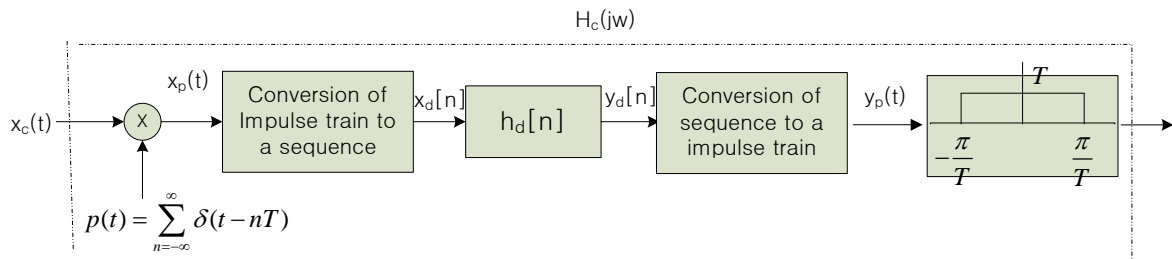


Fig. 5

(solution)

식(5.1)에 주어진 system 을 Fourier transform 하면 다음과 같다.

$$Y_d(e^{j\Omega}) = -\frac{1}{2}e^{-j\Omega}Y_d(e^{j\Omega}) + X_d(e^{j\Omega}) \quad (5.2)$$

식(5.2)의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$H_d(e^{j\Omega}) \triangleq \frac{Y_d(e^{j\Omega})}{X_d(e^{j\Omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad (5.3)$$

Fig.5 에 주어진 전체 system 의 전달함수를 $H_c(j\omega)$ 이라고 하자. 그러면 교재 pp. 540 의 수식(7.25)에 의해 $H_d(e^{j\Omega})$ 와 $H_c(j\omega)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & , |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & , |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases} \quad \text{where } \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (5.4)$$

문제의 조건에서 $X_c(j\omega)$ 는 다음과 같은 성질을 가지므로

$$X_c(j\omega) = 0, |\omega| > \frac{\pi}{T} \quad (5.5)$$

$X_c(j\omega)$ 는 band limited signal 이다. 그러므로 식(5.4)의 구간 생략해도 입/출력 관계는 영향을 받지 않는다.

이제 식(5.4)와 식(5.5)를 이용해 전체 시스템의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega T}} \quad (5.6)$$

(b)식(5.6)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega T})Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) \quad (5.7)$$

식(5.7)을 inverse Fourier transform 을 하면 다음과 같다.

$$y(t) = -\frac{1}{2}y(t-T) + x(t) \quad (5.8)$$

[식(5.4) 유도과정]

주어진 signal $x_c(t)$ 의 Fourier transform $X_c(j\omega)$ 를 다음과 같다고 하자.

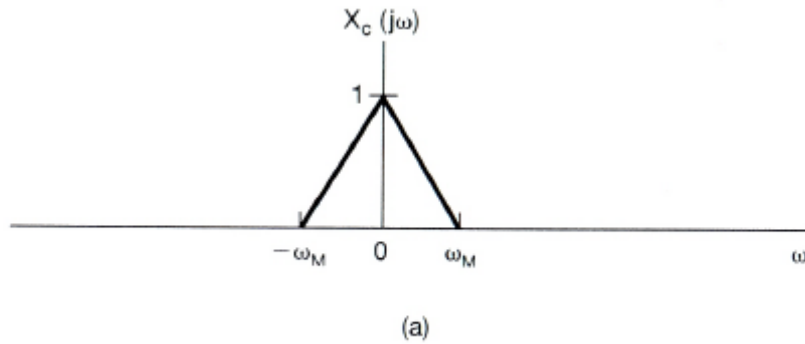


Fig. 5.1

우선 original continuous time signal $x_c(t)$ 와 sampling signal $x_p(t)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) \quad (5.9)$$

식(5.9)를 Fourier transform 하면 $X_p(j\omega)$ 는 다음과 같다

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) \text{ where } \omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (5.10)$$

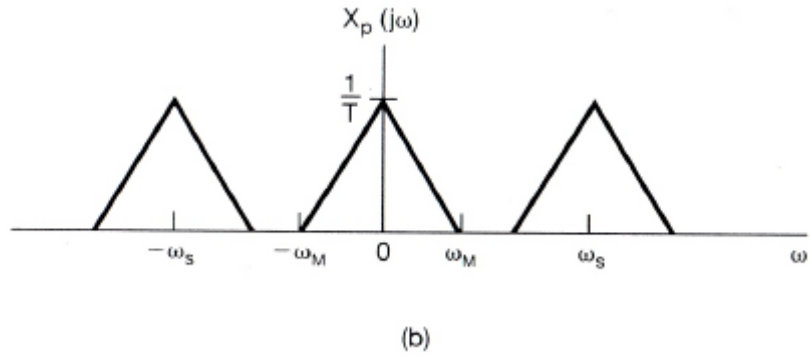


Fig. 5.2

$x_d[n]$ 의 Fourier transform $X_d(e^{j\Omega})$ 와 $X_p(j\omega)$ 의 관계는 다음과 같으므로

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T}) \quad (5.11)$$

식(5.10)과 식(5.11)에 의해 $X_d(e^{j\Omega})$ 는 다음과 같다.

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - 2\pi k)\frac{1}{T}) \quad (5.12)$$

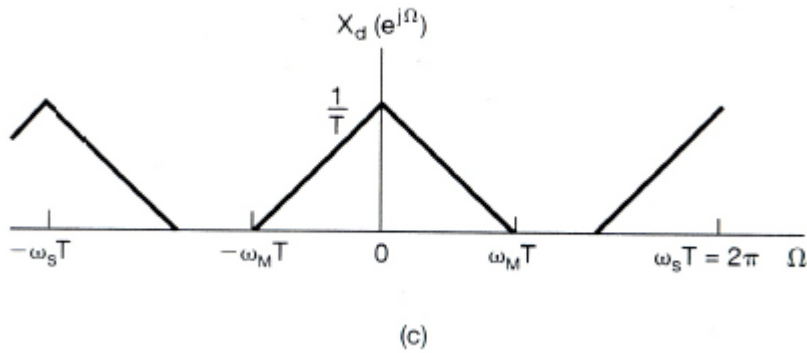


Fig. 5.3

$h_d[n]$ 의 Fourier transform $H_d(e^{j\Omega})$ 를 다음과 같다고 하자.

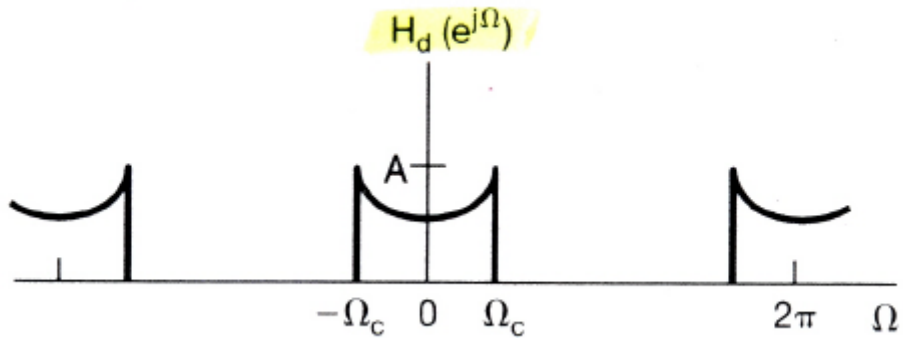


Fig. 5.4

$y_d[n]$ 의 Fourier transform $Y_d(e^{j\Omega})$ 는 다음과 같다.

$$Y_d(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega}) \quad (5.13)$$

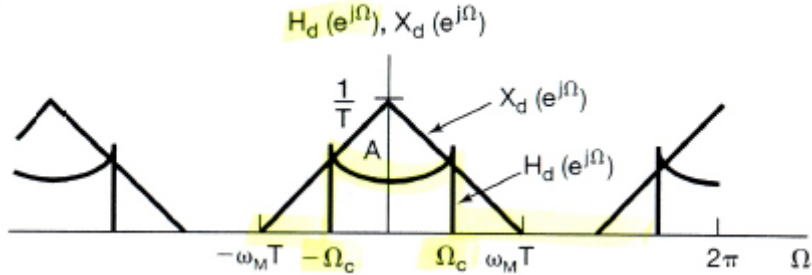


Fig. 5.5

$Y_d(e^{j\Omega})$ 와 $y_p(t)$ 의 Fourier transform $Y_p(j\omega)$ 의 관계는 다음과 같으므로

$$Y_d(e^{j\omega T}) = Y_p(j\omega) \quad (5.14)$$

식(5.13)과 식(5.14)에 의해 $Y_p(j\omega)$ 는 다음과 같다.

$$Y_p(j\omega) = H_d(e^{j\omega T})X_d(e^{j\omega T}) \quad (5.15)$$

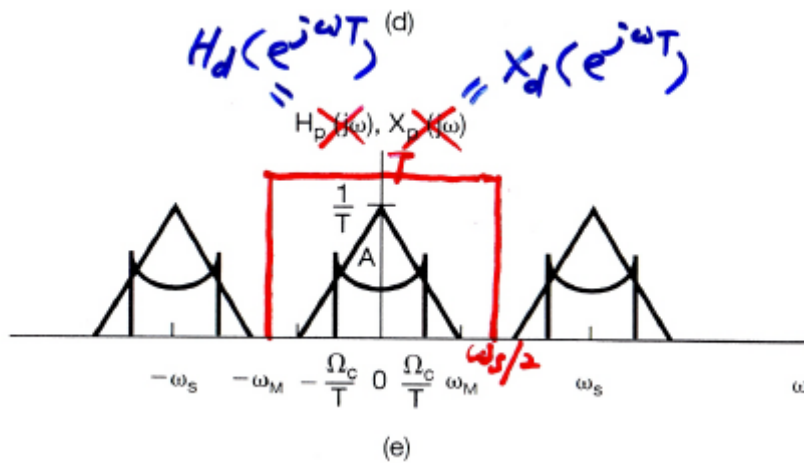


Fig. 5.6

식(5.15)에 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ 인 ideal low pass filter 를 끼우면 $Y_c(j\omega)$ 는 다음과 같다.

$$Y_c(j\omega) = H_d(e^{j\omega T})X_d(e^{j\omega T}), \quad |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \quad (5.16)$$

여기서 $X_d(e^{j\omega T})$ 와 $X_c(j\omega)$ 는 다음 관계를 만족하므로

$$X_d(e^{j\omega T}) = X_c(j\omega), |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \quad (5.17)$$

식(5.16)과 식(5.17)에 의해

$$Y_c(j\omega) = H_d(e^{j\omega T})X_c(j\omega), |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \quad (5.18)$$

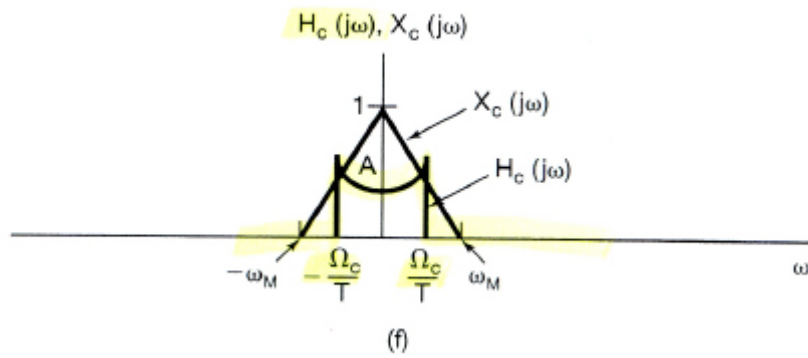


Fig. 5.7

식(5.18)에서 $X_c(j\omega)$ 을 좌변으로 넘기면 $H_c(j\omega)$ 는 식(5.4)와 같다. 이는 Fig.5.4 와 Fig. 5.7 에 잘 나타나 있다.

[Problem 6] (20 points) Consider the following general Nth-order linear constant-coefficient difference equation.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (6.1)$$

- (a) Show that if N and M are positive integers, then the difference equation in (6.1) always represents a causal system S .
- (b) Give the block-diagram representation of the difference equation in (6.1), in which only the delay elements of $x[n]$ are not involved
- (c) Using the result of (b), find the vector-form representation of the difference equation in (6.1) as follows.

$$\begin{aligned} z[n] &= \Phi z[n-1] + \Gamma x[n] \\ y[n] &= H z[n] \end{aligned} \quad (6.2)$$

where Φ, Γ , and H are matrices with appropriate dimensions.

(solution)

(a) 우선 z transform 을 이용해 causality 를 보인다

식(6.1)을 풀어서 쓰면 다음과 같다.

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \quad (6.3)$$

식(6.3)의 양변에 z transform 을 하면 다음과 같다.

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_M z^{-M} X(z) \quad (6.4)$$

식(6.4)를 정리하면 다음과 같다.

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) X(z) \quad (6.5)$$

식(6.5)의 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(z) &\triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})}{(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N})} \\ &= \frac{(b_0 z^{N+M} + b_1 z^{N+M-1} + \dots + b_M z^N)}{(a_0 z^{N+M} + a_1 z^{N+M-1} + \dots + a_N z^M)} \\ &\quad (\text{by multiplying } z^{N+M}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

교재 pp.777 의 정리에 의하면 전달함수 $H(z)$ 의 분모의 차수가 분자의 차수보다 크거나 같을 때 causal 하다. 식(6.6)에서 분자와 분모의 차수가 같으므로 식(6.1)은 causal 하다.

또 다른 방법으로 식(6.1)을 직접 이용하여 causality 를 보인다. 식(6.1)은 input 으로 $x[n]$ 의 과거 값만 들어가므로 식(6.1)은 causal 하다.

(b)식(6.6)의 분자와 분모에 dummy variable $w[n]$ 의 z transform $W(z)$ 를 분자와 분모에 곱하면 다음과 같다.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})W(z)}{(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N})W(z)} \quad (6.7)$$

식(6.7)의 분자와 분모를 분리해 쓰면 다음과 같다.

$$X(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N})W(z) \quad (6.8)$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})W(z) \quad (6.9)$$

식(6.8), 식(6.9)를 각각 inverse z transform 하면 다음과 같다.

$$a_0 w[n] + a_1 w[n-1] + \dots + a_N w[n-N] = x[n] \quad (6.10)$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + \dots + b_M w[n-M] \quad (6.11)$$

식(6.10), 식(6.11) 이용해 Block diagram 그리면 다음과 같다.

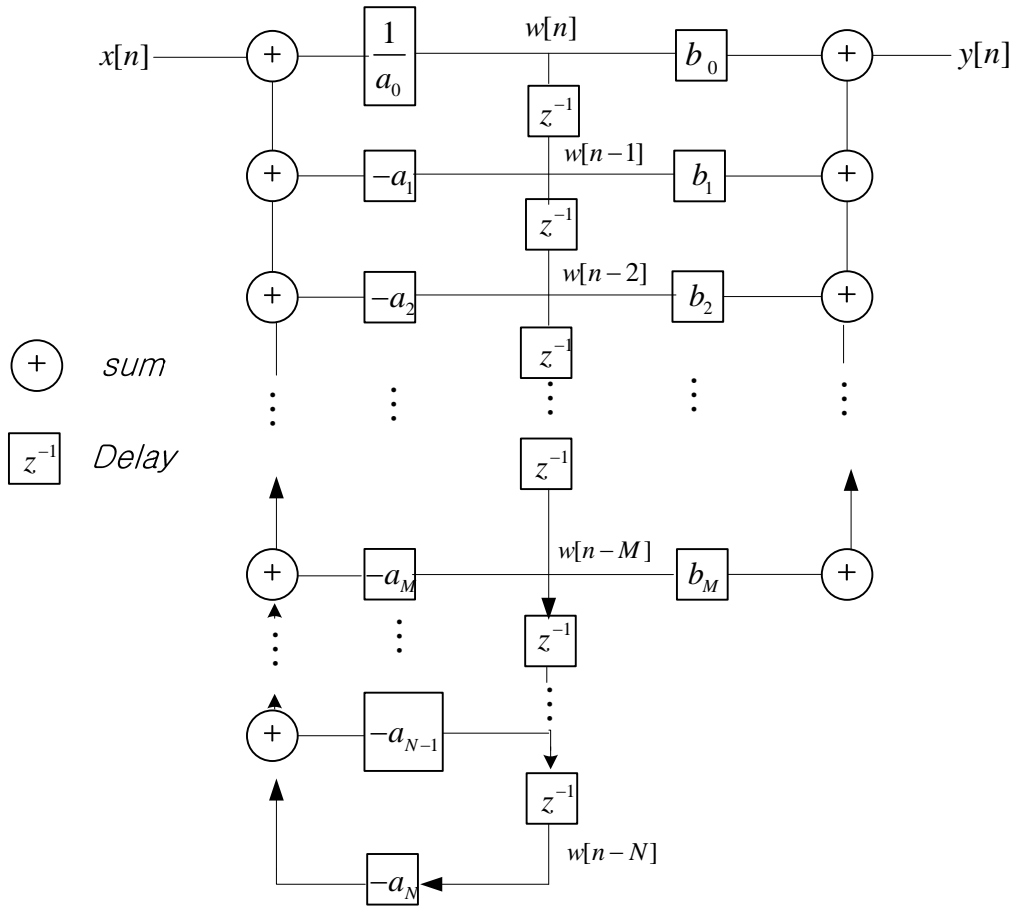


Fig. 6

(c) 식(6.2)의 vector variable $z[n]$ 을 Fig.6 의 dummy variable $w[n]$ 과 $w[n]$ 의 delay $w[n-k]$ 를 이용해 다음과 같이 정의 하자.

$$z[n] \triangleq \begin{bmatrix} z_1[n] \\ z_2[n] \\ \vdots \\ z_N[n] \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} w[n] \\ w[n-1] \\ \vdots \\ w[n-N+1] \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

식(6.10)이용하면 vector variable $z[n]$ 의 element 사이에는 다음 관계가 있다.

$$\begin{bmatrix} z_1[n] \\ z_2[n] \\ z_3[n] \\ \vdots \\ z_N[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} z_1[n-1] - \frac{a_2}{a_0} z_2[n-1] - \frac{a_3}{a_0} z_3[n-1] - \dots - \frac{a_N}{a_0} z_N[n-1] + x[n] \\ z_1[n-1] \\ z_2[n-1] \\ \vdots \\ z_N[n-1] \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

식(6.13)을 식(6.2)의 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} z_1[n] \\ z_2[n] \\ z_3[n] \\ \vdots \\ z_N[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_3}{a_0} & \dots & -\frac{a_N}{a_0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1[n-1] \\ z_2[n-1] \\ z_3[n-1] \\ \vdots \\ z_N[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x[n] \quad (6.14)$$

식(6.11)을 식(6.12)을 이용해 표현하면 다음과 같다.

$$y[n] = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_M \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} z_1[n] \\ z_2[n] \\ z_3[n] \\ \vdots \\ z_N[n] \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

식(6.14)과 식(6.15)에 의해 Φ , Γ , and H matrices 는 다음과 같다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_3}{a_0} & \dots & 0 & -\frac{a_N}{a_0} \\ a_0 & a_0 & a_0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\Gamma = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (6.17)$$

$$H = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_M \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (6.18)$$

여기서 Φ , Γ , and H matrices 는 $z[n]$ 의 정의하는 방법에 따라 여러 형태로 나올 수 있다.