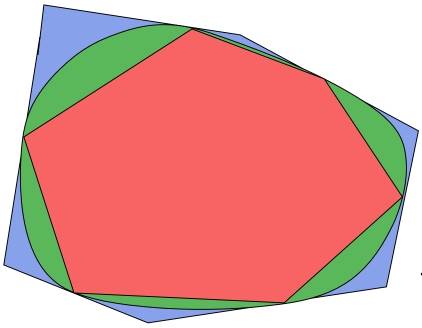
중간고사 답안

1



위의 그림과 같이 C는 녹색으로 된 부분이라 하면 P_{inner}는 붉은색 부분, P_{outer}는 푸른색 부분이다. P_{inner}는 C에 내접하고 P_{outer}는 외접하므로 $P_{inner} \subset C \subset P_{outer}$이 성립한다.

2. $\frac{d^2}{dx^2}\log\phi(x) = \frac{\phi(x)\phi''(x) - \{\phi'(x)\}^2}{\{\phi(x)\}^2}$이고, 분모는 항상 양이므로 분자의 부호만 조사하면 된다.

$\phi'(x) = \int_0^\infty u^x f(u)\log u du$, $\phi''(x) = \int_0^\infty u^x f(u)(\log u)^2 du$

$\phi(x)\phi''(x) - \phi'(x)^2$
$= \int_0^\infty u^x f(u) du \int_0^\infty w^x f(w)(\log w)^2 dw - \int_0^\infty u^x f(u)\log u du \int_0^\infty w^x f(w)\log w dw$
$= \int_0^\infty \int_0^\infty u^x w^x f(u) f(w) du > 0$

따라서 $\phi(x)$는 log-convex이다.

$\phi(x) = \Gamma(x+1)$, $f(u) = e^{-u}$이라 하면, $\int_0^\infty f(u)du = 1$이므로 PDF가 될 수 있다. 따라서 앞의 정리에 의해 $\Gamma(x)$도 log-convex이다.

3. minimize $\sum_{i,j=1}^{x} c_{ij}x_{ij}$

subject to

$\forall_{i,j} \quad 0 \leqq l_{ij} \leqq x_{ij} \leqq y_{ij}$

$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} + b_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$

$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$

4. minimize $\max\left\{\frac{c_i^T x + d_i}{e_i^T x + f_i}\right\}$

subject to $Bx \prec h$, $An = b$

이 때, $c_i = G_i x_i$, $d_i = \sigma_i$, $e_i = G_{ii}$, $f_i = 0$

5.

$\left\| \begin{bmatrix} 2x \\ y-z \end{bmatrix} \right\|_2 \leqq y+z$ (단, y, $z \geqq 0$)

$4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+(y-z)^2 \leqq (y+z)^2$. $\therefore x^T x \leqq yz$

(a) maximize $\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i^T x - b_i}\right)^{-1}$

subject to $\overline{a_i}^T x - \| P_i^T x \|_2 \geqq b_i$ where $i=1, 2, \cdots, m$

(b) maximize $\left(\prod_{i=1}^{m} (a_i^T x - b_i)\right)^{1/m}$

subject to $a_i^T x - b_i \geqq 0$