1. (a), (b) $L(x,\lambda)=x^Tx+\lambda^T(Ax-b)$

$g(\lambda)=\inf L(x,\lambda)$, $x=-\frac{1}{2}A^T\lambda$일 때 최소이므로

$g(\lambda)=-\frac{1}{4}\lambda^TAA^T\lambda-\lambda^Tb$

dual problem

maximize : $g(\lambda)=-\frac{1}{4}\lambda^TAA^T\lambda-\lambda^Tb$

subject to : $\lambda \geqq 0$

(c) strong duality 성립

(d) unique 하다

(e) primal problem은 1000개, dual은 10개의 변수가 필요하므로 좀 더 계산이 쉬워진다.

2. (a) $x<0$이면 concave이고, $x>0$이면 convex이므로 convex가 아니다.
(b) $\{x\in \mathrm{dom}\, f | f(x)<f(0)\}$에 의해 concave
$\{x\in \mathrm{dom}\, f | f(x)\geqq f(0)\}$에서 convex
이므로 정의에 의해 quasi convex이다.
(c) minimize c^Tx
subject to $Ax\leqq b$, $Hx=g$, $L-c^Tx\leqq 0$, $c^Tx-M\leqq 0$

3. maximize $U(r)=\sum_{i=1}^{n}\log r_i$

subject to $P=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}a_it_i(e^{bTr_i/t_i}-1)\leqq P_{\max}$, $r\geqq 0$, $t\geqq 1$, $1^Tt=T$

이는 convex problem이므로 KKT는 다음과 같다.

$\frac{1}{r_i}-\lambda a_ibe^{r_i}+v_i=0$

$-\frac{\lambda}{T}(a_ie^{bTr_i/t_i}-a_it_i\frac{bTr_i}{t_i^2}e^{bTr_i/t_i}-a_i)-\mu_i+\tau_i=0$

$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}a_it_i(e^{bTr_i/t_i}-1)\leqq P_{\max}$

$r\geqq 0$, $t\geqq \varepsilon\cdot 1$, $1^T\cdot t=T$, $v^Tr=0$, $\mu^T(\varepsilon\cdot 1-t)=0$, $\lambda\geqq 0$, $v\geqq 0$, $\mu\geqq 0$

4. $Xs=y$
$\nabla(trX-\log detX)+v^Ts=0$

5. gradient method:
starting point 가 주어졌다고 가정 ($\Delta x=-\nabla f(x)$)

$\nabla g(x) = \nabla\phi(f(x))\nabla f(x)$. $\therefore \Delta x = -\nabla\phi(f(x))\nabla f(x)$

ϕ는 increasing convex, f는 convex 이므로 $\Delta x < 0$.

적절한 step인 t를 정하여 $x = x + t\Delta x$로 하여 조건이 만족할 때까지 반복한다.

Newton method:

$\Delta x = -\nabla^2 f(x)^{-1}\nabla f(x)$

$(\phi(f(x)))'' = \nabla^2\phi(f(x))(\nabla f(x))^2 + \nabla\phi(f(x))\nabla^2 f(x)$

$\therefore \Delta x = -\left(\nabla^2\phi(f(x))(\nabla f(x))^2 + \nabla\phi(f(x))\nabla^2 f(x)\right)^{-1}\nabla\phi(f(x))\nabla f(x)$

$\lambda^2 = -(\nabla\phi(f(x))\nabla f(x))^T\left(\nabla^2\phi(f(x))(\nabla f(x))^2 + \nabla\phi(f(x))\nabla^2 f(x)\right)\nabla\phi(f(x))\nabla f(x)$

이 때 $\dfrac{\lambda^2}{2} \leqq \varepsilon$을 만족하면 끝낸다.

적당한 t를 결정한 후 $x = x + t\Delta x$하여 반복한다.