

1. (20점) Bohr 및 de Broglie의 원자모델을 가정하고 다음 물음에 답하시오.

(a) 전자의 속력과 궤도 반경과의 관계를 구하시오 (6점)

(b) n번째 궤도의 전자의 파장은 첫 번째 궤도의 전자의 파장의 몇 배인가? (14점)

(다음의 두 가지 풀이 모두 정답으로 인정)

① (구심력) = (전자-원자핵 사이의 전기력) 으로부터, 다음과 같이 궤도를 도는 전자의 속력과 궤도 반경과의 고전적인 관계를 구할 수 있다.

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{m_e v^2}{r} \rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \dots \textcircled{1}$$

(a)

이제 전자의 ‘양자화된’ 파장을 구하기 위해 보어의 양자조건을 물질파의 형태로 써 보면, 다음과 같다.

$$2\pi r_n = n\lambda_n = n \frac{h}{m_e v_n} \dots \textcircled{2}$$

(a)에서 유도한 속도에 대한 관계식 ①을 ②의 우변에 대입한 뒤 양자화된 반지름에 대해 정리하면,

$$r_n = \frac{nh}{2\pi m_e} \cdot \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}}{e} \rightarrow r_n = 4\pi\epsilon_0 m_e \left(\frac{nh}{2\pi m_e e} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_e e^2} \dots \textcircled{3}$$

이제 ③에서 나타난 양자화된 반지름의 표현을 식 ②에 다시 대입하여 파장에 대해 정리하면, 양자화된 파장에 대한 표현을 얻게 된다.

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{2\epsilon_0 h^2}{m_e e^2} n \dots \textcircled{4}$$

④에 따라서, 우리는 n번째 궤도 전자의 파장이 첫 번째 궤도 전자의 파장보다 n배 더 길다는 것을 확인할 수 있다.

(b)

② 보어의 양자조건을 물질파의 형태로 표현해 보면, 다음과 같다.

$$2\pi r_n = n\lambda_n = n \frac{h}{m_e v_n}$$

이에 따라 전자의 양자화된 반지름을 속력에 대해 표현해 보면 다음과 같다.

$$v_n = \frac{nh}{2\pi r_n m_e} \dots \textcircled{1}$$

(a)

이제 궤도를 도는 전자의 속력과 궤도 반경과의 고전적인 관계를 (구심력) = (전자-원자핵 사이의 전기력) 으로부터 구하면, 이는 다음과 같다.

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{m_e v^2}{r} \rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \dots \textcircled{2}$$

이제 ①의 식을 ②의 우변에 대입하여 정리하면, 다음과 같이 양자화된 반지름에 대한 표현을 얻게 된다.

$$r_n = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_e e^2} \dots \textcircled{3}$$

마지막으로 ③에서 나타난 양자화된 반지름의 표현을 보어의 양자조건 식에 다시 대입하여 파장에 대해 정리하면, 양자화된 파장에 대한 표현을 얻게 된다.

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_e e^2} = \frac{2\epsilon_0 h^2}{m_e e^2} n \dots \textcircled{4}$$

④에 따라서, 우리는 n번째 궤도 전자의 파장이 첫 번째 궤도 전자의 파장보다 n배 더 길다는 것을 확인할 수 있다.

----- (b)

채점기준:

(a)

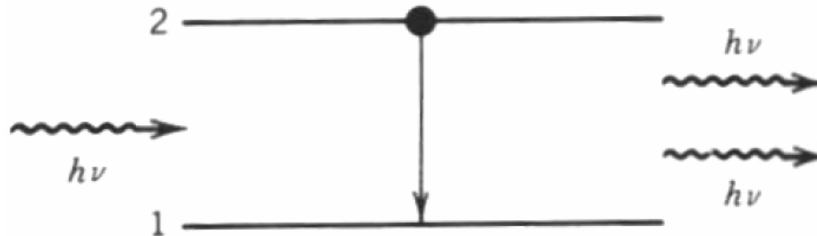
- 올바른 식으로부터 올바른 답을 유도한 경우: 6점
- 계산 실수로 인해 답은 틀렸으나 맞는 설명과 중간 과정을 보인 경우: 3점

(b)

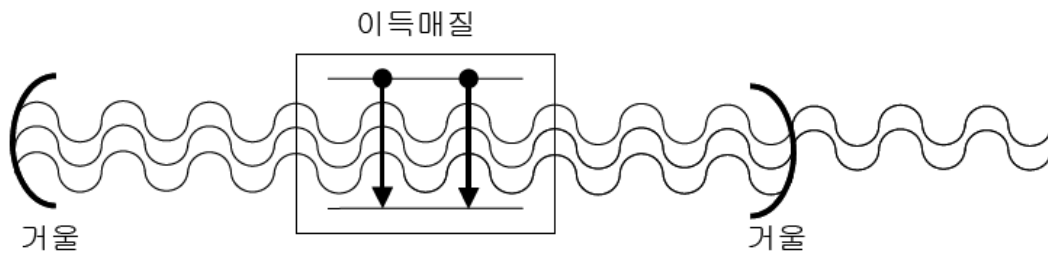
- 중간 계산과정: ②~④ 각각의 step 당 각각 4점씩
(만약 중간에 step이 생략되었다 하더라도 그 이후 단계와 정답이 맞으면 인정)
- ‘n번째 궤도 전자의 파장이 첫 번째 궤도 전자의 파장보다 n배 길다’는 서술: 2점

2. (15점) Laser의 원리와 특징을 설명하시오. (원리: 10점, 특징: 5점)

LASER는 Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation의 약어로, 말 그대로 유도 방출 현상을 사용한 일종의 ‘광원 증폭(기)’을 의미한다. 이를 자세히 설명하기 위해 우선 유도 방출 현상에 대해서 살펴보자.



위의 그림과 같은 두 레벨의 에너지 준위를 가진 원자를 생각해 보자. 이 때 원자가 높은 에너지 준위로 여기(Excited)되었을 경우, 일반적으로 이 원자는 에너지를 광자의 형태로 방출하고 더 안정한 바닥 상태로 존재하려고 한다. 이 때, 만일 다음과 같이 에너지가 정확하게 원자의 에너지 준위간 간격인 광자가 존재할 경우, 이 광자는 원자가 에너지를 방출하고 바닥 상태로 전이하는 것을 ‘유도’한다(Stimulated Emission). 이렇게 함으로써 같은 위상과 에너지(=주파수)를 지닌 ‘쌍둥이 광자’가 발생하게 되는데, 이러한 현상을 유도 방출[①]이라고 부른다. Laser는 이를 이용하여 아래의 그림과 같이 꾸민다.



우선 이득 매질을 가운데에 두고, 에너지를 공급함으로써 다수의 원자가 높은 에너지 준위로 여기 되어 있도록 한다(이를 ‘pumping’ 이라고 한다)[②]. 이후 어떤 원자에서 발생한 임의의 방출에 따라 빛이 발생하게 되면, 이는 다른 원자의 유도 방출을 이끌어내게 된다. 이 때 양 옆에 거울을 두게 되면, 이렇게 생성된 광자가 다시 이득 매질로 피드백 됨으로써 양쪽 거울에서의 경계조건을 만족시키며 왕복하는 빛을 계속적으로 이끌어내 빛의 증폭을 이끌어내게 된다[③]. 이렇게 해서 나오는 빛을 Laser라고 하며, 이 빛은 자연광에 비해 다음과 같은 장점을 가진다.

- (1) 단색성 : 단일 파장의 빛만 나오므로 단색광이다.
- (2) 가간섭성 : 일반적인 빛은 간섭 가능한 거리가 수십 cm 정도인 데 반해, 레이저는 훨씬 긴 거리에서도 간섭된다. 이는 방출되는 빛의 파장과 위상이 정확히 일치할수록 더 좋아진다.
- (3) 집광성(고휘도): 좁은 면적에 많은 에너지가 모여 전달된다.
- (4) 지향성 : 자연광에 비해 직진성이 강하다.

채점기준:

원리 (10점)

- 유도방출의 원리[①]에 대한 설명: 4점
- Pumping을 통한 다수 원자의 여기 상태(Population inversion)[②]에 대한 언급: 2점
- 거울 사이에 이득매질을 배치함으로써 빛을 증폭시키는 과정[③]에 대한 설명: 3점
- [③]에서 경계조건에 대한 언급이 존재하는 경우: 1점

특징 (5점) – 위에서 언급한 4개의 특징 이외에도 타당한 특징이라면 인정 가능

- (1), (2)를 포함하여 특징을 3개 이상 기술한 경우: 5점
- (1), (2)중 빠진 것이 있으면서 3개 이상 기술한 경우: 3점
- (1), (2)만 기술: 3점
- 3개 미만이면서 (1), (2)중 빠진 것이 있을 경우: 2점
- 3개 미만이면서 (1), (2)가 모두 없을 경우: 1점

특징 부분에서 (1), (2)에 점수 비중을 크게 둔 이유는 (1)과 (2)가 Laser의 성질 중 특히 크게 중요한 특징이기 때문.

3. (20점) $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ 에 존재하는 infinite-barrier potential well에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) 에너지 준위 E_n 와 이에 해당하는 파동함수 $\Psi_n(x, t)$ 를 Schrödinger 방정식을 풀어 구하시오. ($0 < x < L$ 의 potential well 에 대해 푼 후 좌표이동 할 수 있으나, 그렇게 하지 말고, Schrödinger 방정식을 처음부터 이 영역에 대해 푸시오) (12점)

주어진 구조에 대한 time-dependent Schrödinger 방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad (\text{for } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Psi(-\frac{L}{2}, t) = 0, \quad \Psi(\frac{L}{2}, t) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①은 서로 변수가 독립적으로 편미분 방정식이므로, 변수분리 ($\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$) 을 통해 시간과 공간에 대한 상미분 방정식으로 나누면, 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \phi(t) = E\phi(t) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (\text{for } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}) \quad \dots \textcircled{4}$$

이제 이들을 풀도록 한다. ③번 방정식으로부터는 즉각적으로 다음의 해를 얻는다.

$$\phi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad \dots \textcircled{5}$$

④번 방정식은, 주어진 경계조건이 even symmetry를 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서 주어진 방정식의 해는 symmetric harmonic function와 anti-symmetric harmonic function 인 ‘cosine 함수’와 ‘sine 함수’가 된다.

$$\psi_{sym}(x) = A \cos k_{sym}x, \quad \psi_{anti-sym}(x) = A \sin k_{asym}x \quad \dots \textcircled{6}$$

이 때 경계조건 ②를 적용시키면, 각각의 함수의 값이 0이 되는 조건으로부터,

$$k_{sym} = \frac{\pi}{L}(2n-1) \quad k_{asym} = \frac{2m\pi}{L} \quad (\text{where } n \text{ and } m \text{ are natural number}) \quad \dots \textcircled{7}$$

이어야 한다는 것을 알 수 있다. 마지막으로 ⑥을 정규화(normalize)시킨 뒤 최종적으로 정리하면, 주어진 구조에서의 time-dependent Schrödinger 방정식의 해는 다음과 같이 나타나게 된다. (Symmetric과 anti-symmetric solution을 함께 합쳐서 씀)

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)\phi(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} & \text{when } n \text{ is odd natural \#} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} & \text{when } n \text{ is even natural \#} \end{cases} \quad \dots \textcircled{8}$$

그리고 이 때의 에너지 고유값은 n의 홀수/짝수 여부에 관계없이 다음과 같다.

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad \dots \textcircled{9}$$

- (b) 정육면체의 3차원 infinite-barrier potential well ($-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, -\frac{L}{2} < y < \frac{L}{2}, -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}$)의 에너지 준위를 구하시오. 제일 낮은 에너지로부터 두 번째 에너지 준위에 대해 degeneracy는 얼마인가? (8점)

3차원 infinite-barrier potential well에 대한 Schrödinger 방정식의 해 $\Psi(x, y, z, t)$ 는 (a)에서 했던 것과 같은 방식으로 변수분리를 하면 각 공간과 시간에 대한 파동함수의 곱으로 풀면 구해진다. 이를 직접 풀 수도 있으나, 방정식을 직접 푸는 것이 목적이 아니므로 해를 곧바로 다음과 같이 쓰도록 한다. (아래 ①이 해가 됨은 변수분리와 주어진 포텐셜 구조 상 자명하다.)

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)\phi(t) \cdots \textcircled{1}$$

이를 다시 Schrödinger 방정식

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x, y, z) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, z) \cdots \textcircled{2}$$

에 대입하여 E 항에 대해 정리하면, 양자화된 에너지 준위는

$$E = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \cdots \textcircled{3}$$

으로 주어진다. 이 때 n_x, n_y, n_z 는 모두 자연수이다.

Degeneracy는 일종의 중복도로, ‘어떤 에너지 준위를 가지는 모든 상태의 수’를 일컫는다. 따라서 아래에서부터 두 번째 에너지 준위는 ③에 의해 n_x, n_y, n_z 중 하나가 1이고 나머지 두 개가 2인 상태에서 나타나므로, 이에 대한 degeneracy는 (2, 2, 1)를 배열하는 가짓수인 3이 된다.

채점기준:

(a)

- 중간 풀이 과정: ①~② 까지 2점
③~⑦ 까지 4점
(만약 중간에 step이 생략되었다 하더라도 그 이후 단계와 정답이 맞으면 인정)
- 해($\Psi_n(x, t)$)의 완전한 표현(⑧): 3점
- 에너지 준위(E_n)에 대한 완전한 표현(⑨): 3점
- Odd/Even solution 둘 중 하나만 푼 경우: ③~⑦에서 -2점, ⑧, ⑨에서 각각 -2점씩
- Time-independent solution only: -2점 / 기타 계산 실수: 항목당 -2점씩

(b)

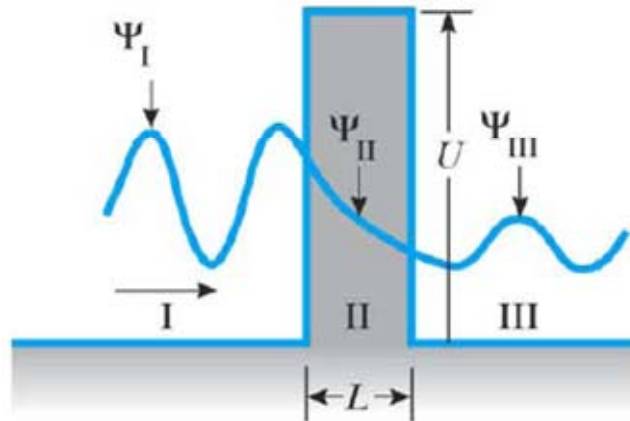
- 양자화된 에너지 준위에 대한 올바른 결과 (③): 4점
- Degeneracy=3: 4점
- 아래에서부터 두 번째 에너지 준위를 (1,1,2)인 상태로 놓고 푼 경우도 정답 인정

- Odd 또는 Even에 대한 에너지 준위만 가지고 구한 경우는 ③번에서 -2점
- 두 번째 에너지 준위 3개를 다 구해서 써 놓고도 degeneracy를 안 쓴 경우 -1점

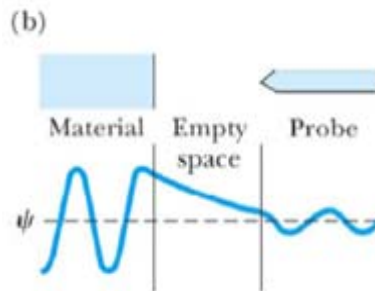
4. (15점) Scanning tunneling microscope에 대해 다음을 설명하시오.\

(a) Key idea (물리적 설명. 그림을 사용할 수 있음) (9점)

STM을 만드는 데 key idea를 제공하게 된 현상은 바로 ‘터널링’이다.

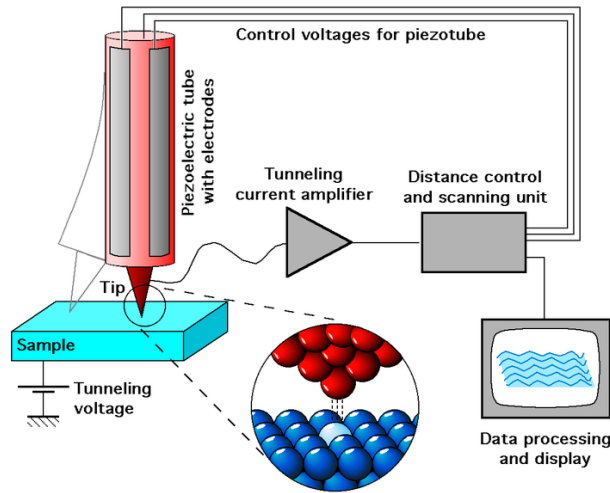


터널링 현상이란, 위의 그림과 같이 영역 I에서 포텐셜 장벽의 높이보다 낮은 에너지($E < U$)를 가지고 있는 입자가 포텐셜 장벽(영역 II)을 ‘통과하여’ 건너편의 영역 III으로 넘어가는 현상을 말한다. 고전적으로 입자가 자신의 총 역학적 에너지보다 큰 포텐셜 장벽을 넘어가는 것은 불가능하지만, 양자역학적으로는 그림과 같이 파동함수가 영역 II에서 완전히 소멸되지 않고 영역 III까지 다다를 수 있고, 따라서 영역 III에서 존재할 수 있는 확률이 0이 아니므로 가능하게 된다.



STM은 바로 이 점을 이용한다. 일반적으로 시료와 탐침 사이에는 물질의 일함수로 부터 말미암은 포텐셜 장벽이 존재한다. 이 때 **그림과 같이 금속 탐침을 놓고 장벽보다 ‘낮은 크기’의 전압을 걸어주게 되면, 전자들이 탐침으로 터널링 되어 전류를 발생[①]시킨다.** 이 전류의 크기는 탐침-시료간 거리(L)와 **지수함수적으로** 변하는 관계를 가지므로($\sim e^{-L}$), 거리가 약간만 변해도 터널링 전류는 매우 크게 변한다. 따라서 이 전류를 모니터링하여 거리의 미세한 변화를 측정[②]할 수 있다.

(b) 구현 방법 (5줄 이내의 글과 1개 이하의 그림 사용) (6점)



그림과 같이 Piezoelectric tube로 된 Scanning unit에 atomic tip을 부착한다. 이후 tip에서 검출되는 터널링 전류를 측정하면서 tip을 여러 방향으로 미세하게 움직여가며 표면을 ‘스캔’한다. 이 때 스캔을 위한 tip의 움직임은 Scanning unit의 PZT(Piezoelectric Transducer) tube 수직방향으로 sectionize한 뒤, 전압을 필요에 따라 선택적으로 걸어줌으로써 컨트롤한다. 이는 다음과 같다: 모든 section에 동일한 전압을 가해준 경우에는 tip이 상하로 움직이고, section들에 전압이 같지 않도록 가해준 경우에는 PZT tube가 휘고, 이에 따라 tip이 옆으로 이동한다(그림 참조).

채점기준:

(a)

- 탐침과 시료간에 터널링 현상에 의해 전류가 흐를 것을 설명(①): 3점
 - ① 대신에 터널링 현상 자체에 대해서 서술한 경우: -1점
 - (①이 명시적으로 없어도 “터널링 전류”에 대해 잘 알고 설명했다면 점수 인정)
- 탐침-시료간 거리와 터널링 전류와의 크기에 대한 관계와, 이를 응용하여 시료 표면의 굴곡을 측정한다는 설명(②): 6점
 - 탐침-시료간 거리/터널링 전류의 크기 관계가 명확하게 서술되지 않은 경우: -2점
 - (예: 전류는 거리에 (의존/민감)하므로 이를 이용하여 측정한다..... 등)
 - 올바른 답안이나 물리적으로 틀린 설명이 섞인 경우: -2점
 - 중간까지는 맞으나 완전히 틀린 결론을 내는 경우/기타 불명확한 설명: -4점

(b)

- PZT tube에 전압을 걸어서 tip을 움직이는 동작에 대한 설명: 6점 (만점)
- 모범답안 대신에 Constant current mode/Constant height mode에 대해 언급한 경우: 4점
 - 둘 중 하나에 대해서 설명한 경우: 2점
- PZT를 활용한다는 언급만 있는 경우: 3점
- 간략한 schematic만 있거나 (a)에서 언급되어야 할 만한 사항만 언급된 경우: 1점
- 분량 초과(글 5줄, 그림 1개): -1점

5. (30점) 다음은 전자의 tunneling 시뮬레이션의 예이다. 다음 물음에 답하라.

(a) 이 시뮬레이션에서 장벽의 폭(width)은 실제보다 매우 작게 가정되었다. 그 이유는 무엇일까? (5점)

장벽이 실제처럼 넓은 경우에는 파동함수가 장벽 내에서 지수적으로 감소하는 구간이 길고, 따라서 투과계수도 작게 된다. 이러한 경우 장벽을 통과한 이후의 **투과파(또는 터널링 현상 자체)를 잘 관찰하기 어렵기 때문에, 관찰의 편의를 위해 장벽의 폭을 실제보다 매우 작게 가정하였다.**

(b) Wave packet이 장벽 근처에 왔을 때, packet 모양에 심한 왜곡이 생기는데, 그 이유는 무엇인가? (5점)

포텐셜 장벽에 wave packet이 입사되면 장벽을 넘어 투과되는 성분과 장벽에서 반사되는 성분이 각각 발생하게 된다. 이 때, **장벽에서 반사되는 성분이 다시 되돌아가면서 장벽으로 들어오는 packet의 나머지 성분들과 간섭현상을 일으키기 때문에 이와 같은 심한 왜곡이 발생하게 되는 것이다.** 그림에서는 파동함수의 absolute-square value의 envelope을 가지고 보았기 때문에 다소 이상해 보일 수도 있지만, 실제로 파동함수 자체를 가지고 동일한 시뮬레이션을 해 보면 packet이 가지고 있는 위상으로 인해 상쇄/보강 간섭이 일어나서 이와 같은 peak가 나타나는 현상을 자연스럽게 볼 수 있다.

(c) 시간이 지나면 두 개의 wave packet이 생기는 데, 이는 전자가 둘로 쪼개진다는 뜻인가? 이에 대해 설명하시오. (5점)

그렇지 않다. 양자역학의 표준적인 해석에 의하면, 파동함수의 absolute-square value $|\Psi_n(x, t)|^2$ 는 ‘측정을 실시했을 때 그 지점에서 전자가 발견될 확률’을 의미한다. 따라서 **두 개의 wave packet은 전자가 쪼개진다는 뜻이 아니라 전자가 발견될 수 있는 확률의 분포가 두 군데로 나누어진다는 것을 의미한다.** 즉, 이들 두 개의 packet은 각각 전자의 터널링 / 반사되는 현상에 대한 확률을 의미하는 것으로 생각할 수 있다.

채점기준:

(a), (b), (c)는 모두 다음과 같은 채점기준을 적용.

- 모범 답안 내의 핵심 문장(Red & Bold로 표시된 문장)과 일치하는 서술: 5점
- 모범 답안과 일치하나 틀린 설명이 섞여 있는 경우: 3점
- 핵심 문장에 비해 다소 서술이 모자라거나 불명확한 경우: 2점
- 그 외 틀린 경우: 0점

(d) 그림과 같은 Gaussian wave packet을 주는 파동함수 형태를 구체적으로 수식으로 표현하시오. (시간에 관한 항도 넣을 것). (15점)

Gaussian wave packet은 spatial domain 뿐만 아니라 momentum(또는 wavenumber) domain에서도 그 분포가 Gaussian을 이루고 있다. 이 점을 이용하여 Gaussian wave packet을 수식으로 표현한다. 우선 공간상에서($t = 0$) 정의된 임의의 Gaussian wave packet을 다음과 같이 쓰도록 하자.

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2}$$

적분을 통해 위 packet을 정규화 하면,

$$\psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2} \dots \textcircled{1}$$

를 얻는다. 이제 이를 momentum domain으로 변환하면(Fourier transform) 다음을 얻는다.

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a} = \frac{1}{(2\pi a)^{1/4}} e^{-k^2/4a}$$

이 때 이 packet은 momentum의 평균이 0이라 움직이지 않으므로, k_0 만큼 평행이동을 하여 움직이는 packet으로 바꿔주도록 하자.

$$\phi(k) = \frac{1}{(2\pi a)^{1/4}} e^{-(k-k_0)^2/4a} \dots \textcircled{2}$$

②에서 나타나듯이 이 wave packet은 여러 파장의 파들이 중첩되어 만들어져 있다. 그런데 물질파는 파장에 따라 에너지가 각각 다르고, 그에 따라 파장이 움직이는 속력도 달라진다. 따라서 wave packet의 시간적인 변화를 올바르게 보기 위해서는 이러한 각각의 개별파동에 대하여 시간에 관한 항을 모두 각각 따진 다음에 다시 합쳐주어야 한다. 즉, packet의 시간적 진행을 수식적으로 표현하기 위해서는 단순히 ①의 식에 $\exp(-iEt/\hbar)$ 를 곱해주는 것이 아니라, 다음과 같이 해야 한다는 것을 의미한다. (숙제 2의 모범답안에 포함된 참고자료 참조)

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (\text{where } \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}) \dots \textcircled{3}$$

이에 따라 ②를 ③에 대입하고 정리하면, 다음과 같이 time-evolving Gaussian wave packet을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(2\pi a)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/4a} e^{i(kx - \hbar k^2 t / 2m)} dk \dots \textcircled{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi a)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4a} + i\hbar t / 2m}} e^{(-ax^2 + ik_0 x - \frac{\hbar k_0^2 t}{2m}) / (1 + 2i\hbar a t / m)} \\ &= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{\frac{a(x^2 - \frac{ik_0}{a}x + \frac{\hbar k_0^2 t}{2m})}{(1 + 2i\hbar a t / m)}}}{\sqrt{1 + 2i\hbar a t / m}} \end{aligned}$$

채점기준:

(d)

- 중간과정: ①~④에 대하여 각각 3점씩
 - ①에서 정규화를 하지 않은 경우: -1점
 - ②에서 움직이지 않는 packet(momentum space에서 k_0 만큼 평행이동 하지 않은 packet)을 가지고 식을 전개한 경우: -1점
- 최종 답안(시간에 관한 항도 포함된 Gaussian wave packet): 3점