102.1

BLUE BOOK

학 과	원자핵공학과
이 름	이 원 재
학 번	2003-12491
과 목	수치해석기초
날 짜	2008. 10. 7.

※ 학칙을 위반하거나 학생의 본분에 어긋난 행위를 하였을 때에는 징계될 수 있습니다.

7 Pages

+1 추가페이지

College of Engineering
Seoul National University

1. a. $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

2 | . |

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

/ 0

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$ ✓

$$E = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2$$

b. $$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \; ; \; m=3 \rightarrow P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j x^j$$

$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0$ 조건으로부터

$$\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & S_{02} & S_{03} \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{20} & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{30} & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$Ra = f$

$R^T R a = R^T f$

$a = (R^T R)^{-1} R^T f$ ✓

$$S_{jk} = \sum_{i=1}^{N} x_i^{j+k} \; , \quad F_j = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i^j$$ ✓

/ 0

c.

x_0	x_1	...	x_N
f_0	f_1	...	f_N
f'_0	f'_1	...	f'_N

이와 같이 데이터 포인트들이 주어졌을때
N+1 개 포인트에서 함수값 결과 조건과
내부 N개 포인트에서 미분값 조건으로 인하여

$$H_{2m+1}(x) = \sum_{i=0}^{N} f_i H_i(x) + \sum_{i=1}^{N} f_i' \hat{H}_i(x)$$ ✓

Constraints.

① $H_i(x_j) = \delta_{ij}$
② $\hat{H}_i(x_j) = 0$
③ $\hat{H}_i'(x_j) = \delta_{ij}$
④ $H_i'(x_j) = 0$

//

②, ③ 조건으로부터.

$$\hat{H}_i(x) = C(x-x_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}(x-x_k)^2$$

$$\hat{H}_i'(x) = C\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}(x-x_k)^2 + C(x-x_i)\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}(x-x_k)^2\right)'$$

③조건으로부터 $x=x_i$

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}(x_i-x_k)^2}$$

$$\therefore \hat{H}_i(x) = (x-x_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}\frac{(x-x_k)^2}{(x_i-x_k)^2} = (x-x_i)L_i^2(x)$$

let

$$H_i(x) = (ax+b)L_i^2(x) = (ax+b)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N}\frac{(x-x_k)^2}{(x_i-x_k)^2}$$

①, ④ 조건사용.

$$H_i(x_i)=1 = (ax_i+b)\cdot 1 \qquad \because L_i(x_j)=\delta_{ij}$$

$$H_i'(x) = aL_i^2(x) + (ax+b)\cdot 2L_i(x)L_i'(x)$$

$$H_i'(x_i)=0 = aL_i^2(x_i) + (ax_i+b)\cdot 2L_i(x_i)L_i'(x_i)$$

$$\Rightarrow 0 = a + 2L_i'(x_i) \qquad \therefore a = -2L_i'(x_i)$$

$$ax+b = ax+1-ax_i = 1+a(x-x_i) = 1-2L_i'(x_i)(x-x_i)$$

$$\therefore H_i(x) = \left(1-2L_i'(x_i)(x-x_i)\right)L_i'(x) \quad +1$$

$$\therefore H_{2N+1}(x) = \sum_{i=0}^{N} f_i\left(1-2L_i'(x_i)(x-x_i)\right)L_i'(x) + \sum_{i=1}^{N} f_i'(x-x_i)L_i^2(x)$$

d. 먼저 b. 번과 같은 original least square fitting을 썼을때 R^TR 행렬이 ill-condition일 가능성이 크다. 또한 m차로 구할경우 총 2m+1 개의 S_{JK}를 구해야하는 문제점이 있다,

그런데 $P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\phi_k(x)$ 로 두고 풀면 a_j는 오차의 최소가되는 조건으로 부터 $a_j = \frac{\langle f, \phi_j\rangle}{\langle \phi_j, \phi_j\rangle}$ 로 구할수 있고 ϕ_k는 ~~Gram-Schmidt~~ 법이나 recurrence relation을 이용하면 쉽게 구할수 있다,

Gram-Shmidt 법은 QR factorization $A = QR$

$$[v_1 \cdots v_k] = [q_1 \cdots q_k]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ & r_{22} & & \vdots \\ & & & \\ & & & r_{kk} \end{bmatrix}$$ 를 사용한 것으로서.

$\phi_k = x^k - \sum_{l=0}^{k-1} a_{kl}\phi_l$ 에서 $a_{kl} = -\frac{\langle x^k, \phi_l \rangle}{\langle \phi_l, \phi_l \rangle}$ 로 쉽게 구해볼수 있다.

+1

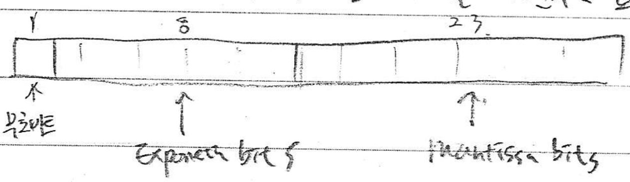
recurrance relation 은 $\phi_{J+1} = x\phi_J - \alpha_{J+1}\phi_J - \beta_{J+1}\phi_{J-1}$ 의 관계에서
ϕ_{J+1} 이 ϕ_J 와 ϕ_{J-1} 과 orthogonal 하다는 조건으로 부터
계수 α_{J+1}, β_{J+1} 을 구할수 있으며 $\phi_{-1} = 0$ $\phi_1(x) = 1$ 에서 시작하여
쉽게 ϕ_J 를 원하는 차수 까지 구해 볼수 있는 장점이 있다.
요약하면 orthogonal polynomial 을 사용하면 ill-condition 이 되기쉬운
R^TR 매트릭스를 풀지 않아도 된다는 장점과, 차수를 올리기 쉽다는 장점이 있다.

36. a. $X = 0.40625$ $X = (0.01101)_2$

$= (0.1101)_2 \times 2^{-1}$

$$\begin{array}{r} 0.40625 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{0}.81250 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{1}.62500 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{1}.25000 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{0}.50000 \\ \times \quad 2 \\ \hline \boxed{1}.00000 \end{array}$$

실제 컴퓨터 에서는 $E = -1$ 을 2진수로 표기하여
exponent 자리.



로 나타낸다.

10

b. $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdots + a_5(x-x_0)\cdots(x-x_4)$

$a_0 = f[x_0]$

$a_1 = f[x_0, x_1]$

$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$a_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

$x_0 = 0 \; ; \; 0 = f[x_0]$

$f[x_0, x_1]$

$x_1 = 1 \; ; \; 2 = f[x_1]$

$f[x_0, x_1, x_2]$

$f[x_1, x_2]$

$x_2 = 2 \; ; \; 3 = f[x_2]$

$f[x_2, x_3]$

$x_3 = 3 \; ; \; 5 = f[x_3]$

$f[x_3, x_4]$

$x_4 = 4 \; ; \; 10 = f[x_4]$

$-\frac{4}{2} + \frac{3}{2}$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

10

$$= \frac{0}{-1\cdot(-2)} + \frac{2}{1\cdot(-1)} + \frac{3}{2\cdot 1} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

c. $\theta = \frac{-\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{m+1}$ $\quad k = 0, \dots m-1$ $\quad T_{m+1} = \cos((m+1)\theta) = \cos((m+1)\cos^{-1}x)$

$m=2$

$x_k = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} - k\pi}{3}\right)$ $\quad k = 0, 1, 2$ $\quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_0 = 0.8660 \to \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad T_0 = \frac{1}{2}(x_0+1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.4655$

$x_1 = 0$ $\quad \tau_1 = \frac{1}{2}(x_1+1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.785398$

$x_2 = -0.8660$ $\quad \tau_2 = \frac{1}{2}(x_2+1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.105243$

x: $[-1 \;\; 1]$

τ: $[a \;\; b]$

10

$(x_i+1) : 2 = (\tau - a) : b-a$

$2(\tau - a) = (x_i+1)(b-a)$

$\tau_i = a + \frac{(x_i+1)(b-a)}{2}$

d. $f(x) = e^x$

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

$n=1 \quad m=3$

$$\sum_{j=0}^{i} c_{i-j} b_j - a_j = 0 \qquad i = 0 \sim n$$

$$\sum_{j=0}^{i} c_{i-j} b_j = 0 \qquad i = n+1 \sim m+n$$

$j > m$ or n, $b_j = 0$

$e^x = 1 + e^x + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{3!} e^x + \frac{1}{4!} e^x$

$c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$

$i=0$: $c_0 b_0 - a_0 = 0$

$i=1$: $c_1 b_0 + c_0 b_1 - a_1 = 0$

$i=2$: $c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = 0$

$i=3$: $c_3 b_0 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 = 0$

$i=4$: $c_4 b_0 + c_3 b_1 + c_2 b_2 + c_1 b_3 = 0$

$c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{6}$, $c_4 = \frac{1}{24}$

$\frac{4 \times 3 \times 2}{6}$ $\qquad$ $4 \times 3 \times 2 \times 1$

$b_0 = 1$

$$\begin{cases} -a_0 = -1 \\ b_1 - a_1 = -1 \\ b_1 + b_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} b_1 + b_2 + b_3 = -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} b_1 + \frac{1}{2} b_2 + b_3 = -\frac{1}{24} \end{cases}$$

$\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$-\frac{1 \times 4}{6 \times 4} - \frac{1}{24} \qquad -\frac{5}{24}$

$b_3 = -\frac{1}{24} - \frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{6} b_1 \qquad -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}$

$= -\frac{1}{24} - \frac{3}{24} + \frac{3}{24}$

$\frac{1}{3} b_1 + \frac{1}{2} b_2 = -\frac{1}{8}$

$+ \quad -\frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 = +\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{2}{6} \qquad -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} \quad -\frac{1}{6}$

$-\frac{1}{6} b_1 = \frac{1}{8}$ $\qquad \boxed{b_1 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}}$

$\boxed{b_2 = -\frac{1}{2} - b_1 = -\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}}$

$b_3 = -\frac{1}{6} - b_2 - \frac{1}{2} b_1$

$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{10}{24} + \frac{9}{24} = -\frac{1}{24}$

$\boxed{a_1 = b_1 + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}}$

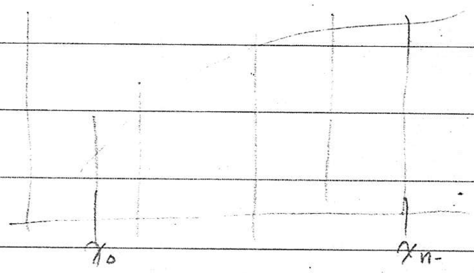
10

+1

$$\therefore g(x) = \frac{1 + \frac{1}{4}x}{1 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^3}$$

3.a. $P_i(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3$, $x_{i-1} \le x \le x_i$; $h_i = x_i - x_{i-1}$,

20.0



$P_i'(x) = b_i + 2c_i(x-x_{i-1}) + 3d_i(x-x_{i-1})^2$

$P_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x-x_{i-1})$

$c_i + 3d_ih_i - c_{i+1} = \ldots$

① $y_{i-1} = P_i(x_{i-1}) = a_i$

$y_i = P_i(x_i) = y_{i-1} + b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3$,

$\therefore\ b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3 = y_i - y_{i-1}$ $(i=1 \sim n)$

② $P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i)$

$b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1}$ $(i = 1 \sim n-1)$.

$b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 - b_{i+1} = 0$

③ $P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i)$

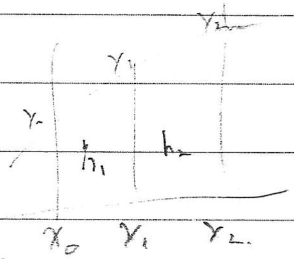
$c_i + 3d_ih_i - c_{i+1} = 0$ $(i = 1 \sim n-1)$

양쪽 경계에서 기울기

④ $P_1'(x_0) = b_1 = \hat{y}_0'$

⑤ $P_n'(x_n) = b_n + 2c_nh_n + 3d_nh_n^2 = \hat{y}_n'$

여기서 $\hat{y}_0'$, $\hat{y}_n'$ 은 세점을 이용하여 추정할 수 있다.



$$P(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$p'(x) = y_0\frac{x-x_2+x-x_1}{h_1(h_1+h_2)} - y_1\frac{x-x_2+x-x_0}{h_1h_2} + y_2\frac{x-x_1+x-x_0}{h_2(h_1+h_2)}$$

$$p'(x_0) = y_0\frac{-h_1-h_2-h_1}{h_1(h_1+h_2)} + y_1\frac{h_1+h_2}{h_1h_2} + y_2\frac{-h_1}{h_2(h_1+h_2)}$$

$\gamma = \frac{h_2}{h_1}$

$$= \frac{1}{h_1+h_2}\left[-y_0(2+\gamma) + y_1\left(2+\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) - y_2\frac{1}{\gamma}\right] = \hat{y}_0'$$

마찬가지로 하면,

$y_0 \to x_{n-2}$

$y_1 \to y_{n-1}$

$y_2 \to y_n$

$$p'(x_2) = \frac{1}{h_1+h_2}\left[y_0(2+\gamma) - y_1\left(2+\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) + y_2\frac{1}{\gamma}\right] ;\ \gamma = \frac{h_1}{h_2}$$

변환 ↳ $$= \frac{1}{h_{n-1}+h_n}\left[y_{n-2}(2+\gamma) - y_{n-1}\left(2+\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) + y_n\frac{1}{\gamma}\right] = \hat{y}_n'$$

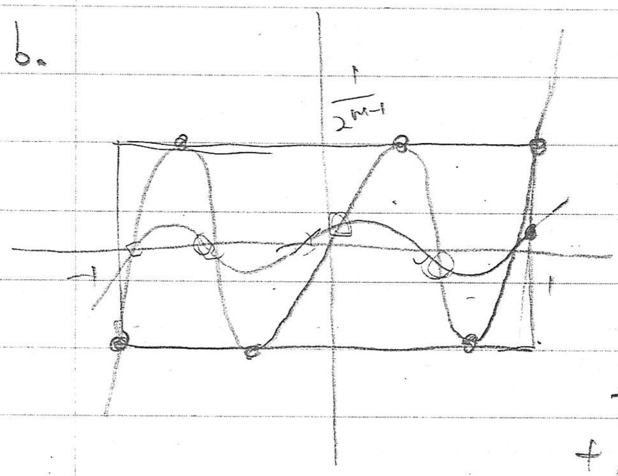
$h_1 = h_2 = h$ $\rightarrow \gamma = 1$ 이면.

$$\hat{y}_0' = \frac{3}{2}\left(\frac{y_1 - y_0}{h}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_2 - y_1}{h}\right)$$

$$\hat{y}_n' = \frac{3}{2}\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h}\right)$$

//

b.



normalized 된 연속함수 $P_m(x)$ 가
구간 $[-1, 1]$ 에서 최소의 최대값(절대)을 가진다고
가정 할때
$E(x) = \Phi_m^T(x) - P_m(x)$ 는
$(m-1)$차 다항식이다. $\Phi_m^T(x)$의 extreme에서
그런데 오른쪽에서부터 $E(x)$의 부호를 살펴보면
$+, -, +, -, +, -,$ 로 $m+1$개의 교차되는 부호가 나오고
$E(x)$는 연속인 함수이므로 근이 m개가 나오게되어
$E(x)$가 $m-1$차 다항식이라는 조건에 위배 된다. 따라서
$\Phi_m^T(x)$가 최소의 최대값을 가진다. □. 10

4. a. $$\Phi_n'' = \frac{1}{h}\left(\phi_R' - \phi_L'\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{0 - \phi_n}{\frac{h}{2}} - \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{h}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\phi_{n-1} - 3\phi_n\right)$$ //

15.0 10

b. (x_{n-1}, ϕ_{n-1}), (x_n, ϕ_n), $(x_{n+\frac{1}{2}}, 0)$

$$P(x) = \phi_{n-1}\frac{(x - x_n)(x - x_{n+\frac{1}{2}})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n+\frac{1}{2}})} + \phi_n\frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n+\frac{1}{2}})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+\frac{1}{2}})} + 0 \cdot \frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-1})(x_{n+\frac{1}{2}} - x_n)}$$

$$= \phi_{n-1}\frac{(x - x_n)(x - x_{n+\frac{1}{2}})}{(-h)(-\frac{3}{2}h)} + \phi_n\frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n+\frac{1}{2}})}{(h)\cdot(-\frac{h}{2})}$$

$$P'(x) = \phi_{n-1}\frac{x - x_{n+\frac{1}{2}} + x - x_n}{\frac{3}{2}h^2} + \phi_n\frac{x - x_{n+\frac{1}{2}} + x - x_{n-1}}{-\frac{1}{2}h^2}$$

$$\phi_n'' = P''(x) = \phi_{n-1}\frac{2}{\frac{3}{2}h^2} + \phi_n\frac{2}{-\frac{1}{2}h^2} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{4}{3}\phi_{n-1} - 4\phi_n\right)$$ // 10

c. Lagrange Interpolation을 이용한 것이 더 정확하다. 왜냐하면 a)에서는 두개의 slope를 단순히 변화율을 구했는데, 두 구간 간격차에 따른 weighting은 되지않았다. 반면에 Lagrange Interp. 을 미분해서 얻은 식은 애초에 간격차이를 세개의 점에 해당하는 다항식으로부터 구했기 때문에 간격에 따라 weighting이 되어 나온다

2003-12491 이원재

5. 10.0

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x) = P_n(x)$$

$$a_i = \frac{\langle f, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle} = \frac{\int_a^b f(x)\phi_i(x)\,dx}{\int_a^b \phi_i(x)\phi_i(x)\,dx}$$

$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$ if $(i \neq j)$.

let

$$\delta_i = P_n(x_i) - f_i$$

$$\delta_i = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x_i) - f_i$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2$$

연속인 함수로 다시 쓰면

$$\delta(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) - f(x)$$

$$E = \int_a^b \delta^2(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x) - f(x)\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x) - f(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_j}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x) - f(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_a^b 2\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x) - f(x)\right)\cdot\phi_j(x)\,dx$$

$= 0.$ ← 최소제곱법

$$\Rightarrow \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x)\right)\phi_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\phi_j(x)\,dx$$

$\phi_k(x)$ 과 $\phi_j(x)$는 orthogonal 하므로.

k가 j일때만 살아남음.

$$\Rightarrow \int_a^b a_j\phi_j(x)\phi_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\phi_j(x)\,dx$$

$$\therefore a_j = \frac{\int_a^b f(x)\phi_j(x)\,dx}{\int_a^b \phi_j(x)\phi_j(x)\,dx} = \frac{\langle f, \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle}$$

답.

즉, Least square method를 통해 나오는 조건과 같다.

10