Naval Architecture & Ocean Engineering

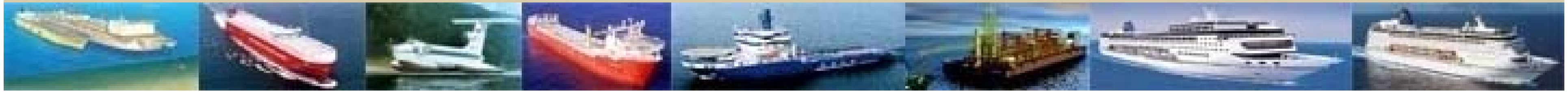
2008년도

공학수학 2

교수 李奎列

서울대학교 공과대학 조선해양공학과

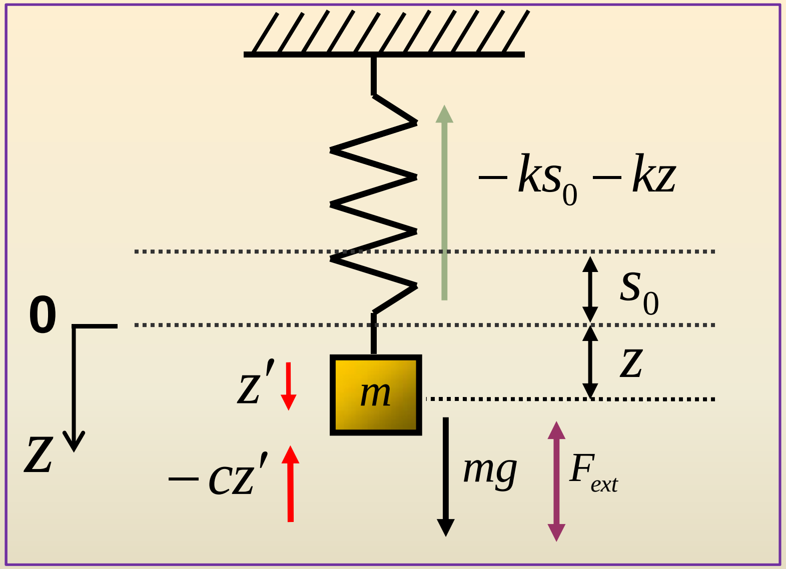
[중간고사] 2008.10.22 (수)



풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 $1.2\dot{z}$ N 을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

문1) Mass-Spring 시스템을 그림으로 표시하고, Newton's Second Law 로 부터 이 물체의 운동방정식을 유도하시오.(유도 과정과 항들에 대한 설명 포함) (10점)

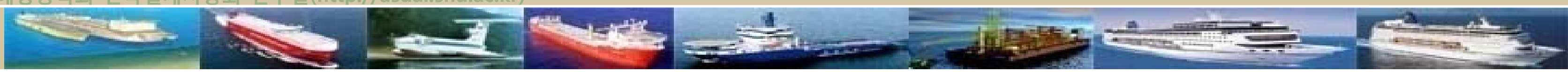


물체의 질량을 m, 중력가속도를 g, 스프링 상수를 k라고 하자.

스프링에 물체가 가만히 매달려 중립(equilibrium)상태일 때 늘어난 변위를 S_0 라고 하면 이때 스프링에 의한 복원력은 물체에 작용하는 중력과 같다.

여기에 추가적인 변위 z를 가지고 물체가 운동을 할 때, 물체에 작용하는 힘은 추가적인 변위에 따른 스프링에 의한 복원력(kx), 외력(F_{ext})그리고 공기에 의한 마찰력이 추가된다.

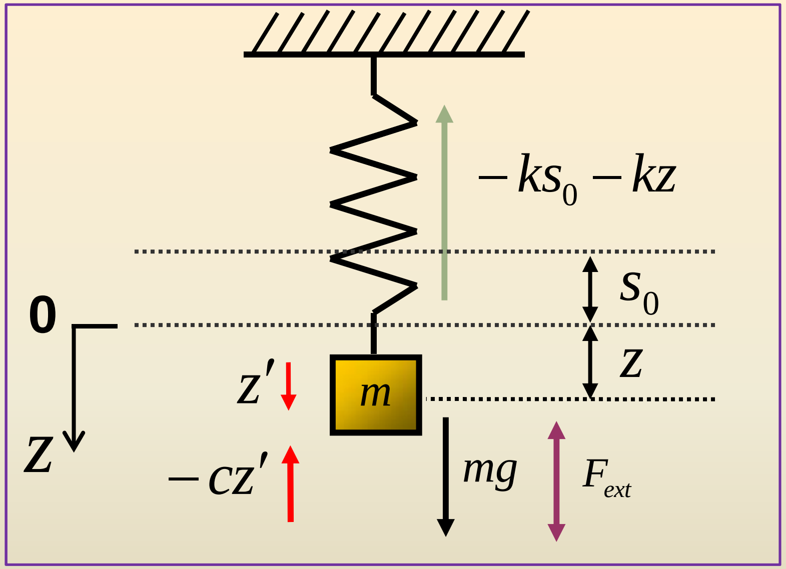
복원력은 변위에 대해 반대방향으로 작용하고, 공기에 의한 '저항'은 문제에서 주어진 것과 같이 속도에 비례하지만 저항이므로 반대 방향으로 작용하여 –부호를 갖는다.
따라서 Newton's Second Law의 우변에 작용하는 힘을 모두 더하면 다음과 같다.



풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

문1) Mass-Spring 시스템을 그림으로 표시하고, Newton's Second Law 로 부터 이 물체의 운동방정식을 유도하시오.(유도 과정과 항들에 대한 설명 포함) (10점)



$$mz'' = \sum F$$

$$= mg \;-ks_0 - kz - cz' \;+F_{ext}$$

이 식에서 중립(equilibrium)상태에서 평형을 이루는 두 힘은 상쇄되므로 다음과 같이 정리된다.

$$mz'' = -kz - cz' + F_{ext}$$

외력만 우변에 남기고 나머지 항을 좌변으로 옮긴다.

$$mz'' + cz' + kz = F_{ext}$$

문제에서 주어진 값을 대입하면 시스템의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(1) Homogeneous Solution

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 0$$

$$z'' + 6z' + 10z = 0$$

$$z = e^{\lambda t}$$

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = 3 \pm i \ (= \alpha + \beta i)$$

λ 허근을 가지므로 homogeneous solution은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$z_h = e^{-\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

$$\therefore z_h = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(2) Particular Solution

$$z'' + 6z' + 10z = 25\cos 4t$$

해를 외력의 형태를 고려하여 다음과 같이 가정하고 식에 대입하여 미정 계수법을 적용한다.

$$z_p = A\cos 4t + B\sin 4t$$

$$z_p' = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t$$

$$z_p'' = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(2) Particular Solution

$$z'' + 6z' + 10z = 25\cos 4t$$

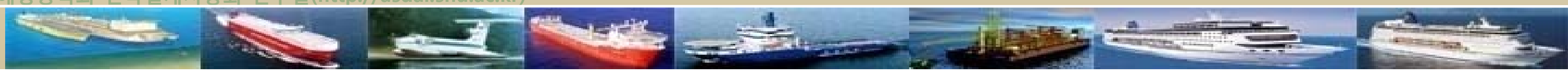
L.H.S: $z'' + 6z' + 10z$

$$= -16A\cos 4t - 16B\sin 4t + 6[-4A\sin 4t + 4B\cos 4t] + 10[A\cos 4t + B\sin 4t]$$

$$= (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\sin 4t$$

R.H.S: $25\cos 4t$

$$\therefore \quad \begin{aligned} -6A + 24B &= 25 \\ -24A - 6B &= 0 \end{aligned} \qquad \therefore \quad A = -\frac{25}{102},\ B = \frac{50}{51}$$



풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 $1.2\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(2) Particular Solution

$$z'' + 6z' + 10z = 25\cos 4t$$

$$\therefore z_p = -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(3) 초기조건

$$z = z_h + z_p = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

$$z(0) = 1(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) - \frac{25}{102} \cdot 1 + \frac{50}{51} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore c_1 = \frac{38}{51}$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(3) 초기조건

$$z = z_h + z_p = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

$$c_1 = \frac{38}{51}$$

$$z'(t) = (-3)e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + e^{-3t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t) - \frac{25}{102}\cdot(-4)\cdot\sin 4t + \frac{50}{51}\cdot(4)\cdot\cos t$$

$$z'(0) = (-3)\cdot 1\cdot(\frac{38}{51}\cdot 1 + c_2\cdot 0) + 1(-c_1\cdot 0 + c_2\cdot 1) - \frac{25}{102}\cdot(-4)\cdot 0 + \frac{50}{51}\cdot(4)\cdot 1$$

$$\therefore c_2 = -\frac{86}{51}$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 $1.2\dot{z}\,\mathrm{N}$을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

2) 이 운동의 일반 해를 구하시오. (계산시 분수를 소수로 바꾸지 마시오.) (20점)

$$0.2z'' + 1.2z' + 2z = 5\cos 4t$$

(4) General Solution

$$\therefore\ z = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

풀이 (문제 1,2,3*)

0.2kg 의 질량을 가진 물체가 스프링 상수 2 N/m 인 스프링에 매달려 있다. 이 물체가 중립 (equilibrium) 위치에서 0.5m 위쪽 지점으로부터 초기 속도 없이 외부에서 가해지는 힘 F(t)=5cos4t 에 의해 운동을 한다. 물체가 공기에 의한 저항 1.2$\dot{z}$ N을 받는 다고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단 좌표축은 위쪽을 z의 양의 방향을 한다.)

문3) 시간이 지남에 따라 이 물체의 운동이 어떻게 되는지 2)에서 구한 해를 가지고 설명하시오. (10점)

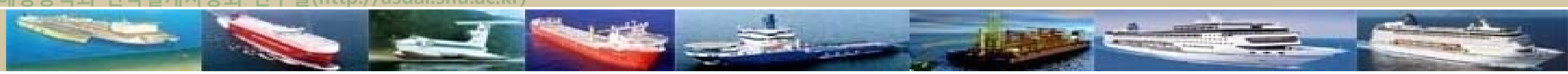
$$\therefore z = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

Homogeneous solution 항 $\quad e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right)$

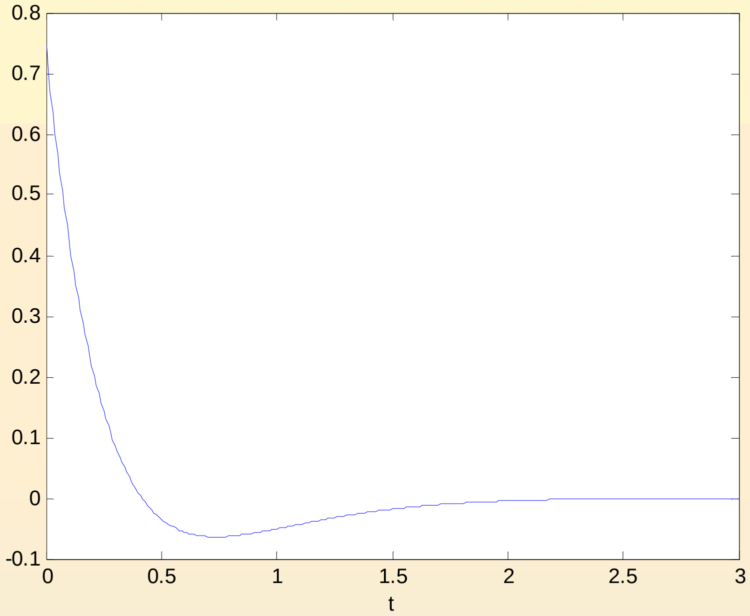
Particular solution 항 $\quad -\frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$

운동 초기에는 homogeneous solution 항에 의한 영향으로 transient 구간이 나타나고

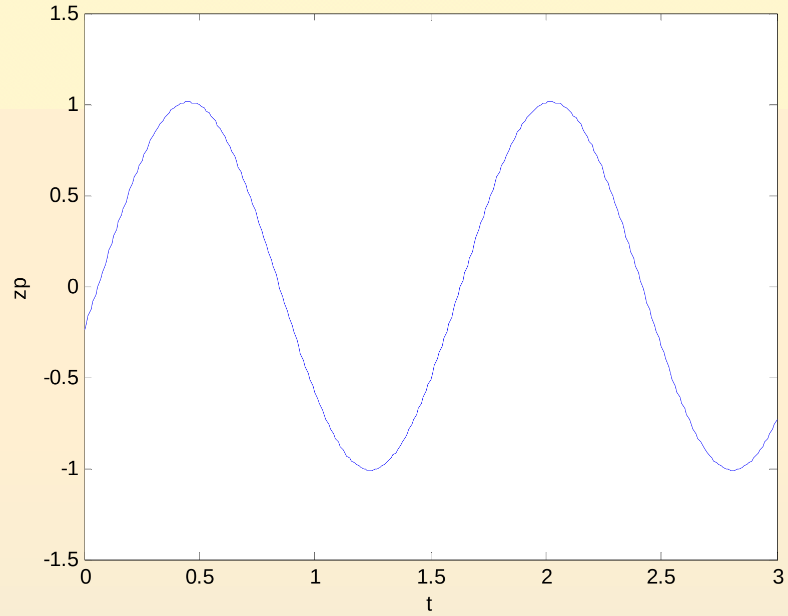
시간이 충분히 지난 후에는 homogeneous solution 항이 exponential 에 의해 decay 되어 particular solution의 항과 같은 주기적인 운동을 한다. 이러한 상태를 steady-state라고 한다.



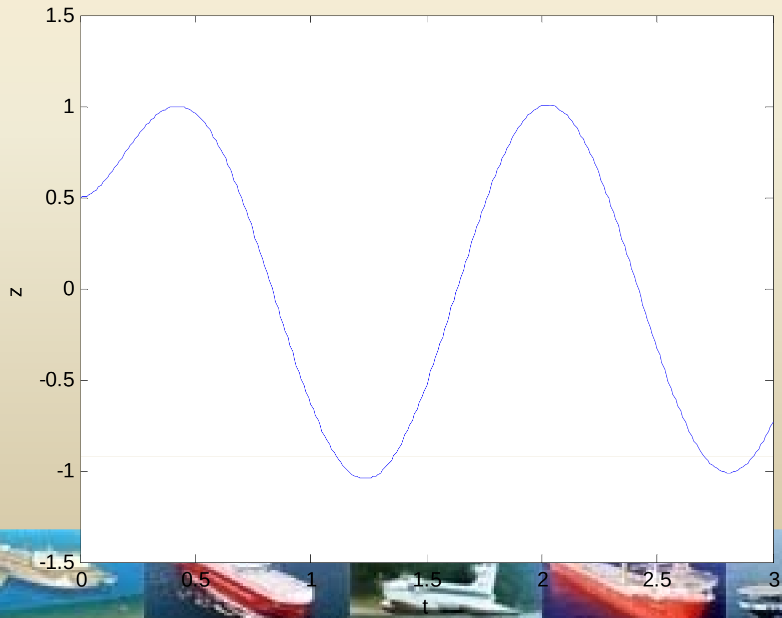
Homogeneous solution



particular solution



general solution



$$z = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\sin t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\sin 4t$$

풀이 (문제 4,5*)

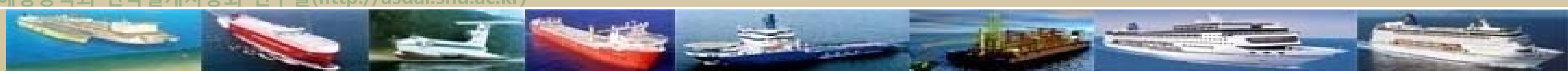
$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + (b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2})y = 0,\ p \ge 0,\ b > 0 \cdots (1)$$

$$z = bx^c,\ y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z) \cdots (2)$$

$$z^2\frac{d^2w(z)}{dz^2} + z\frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \cdots (3)$$

$$y = x^a\left[c_1J_p(bx^c) + c_2J_{-p}(bx^c)\right] \cdots (4)$$

식 (1)의 꼴의 방정식의 경우 (2)의 관계식을 이용하여 (3)과 같은 Bessel Equation 형식으로 바꿀 수 있다. 식 (3)에서 구한 Bessel Function을 이용하여 원래 식(1)의 해를 구하면 식 (4)와 같다. 이 과정을 이용하여 $4x^2y'' - 4xy' + (16x^2 + 3)y = 0$ **의 해를 찾으려고 한다.**



풀이 (문제 4,5*)

$$y'' + \frac{1-2a}{x} y' + (b^2 c^2 x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2}) y = 0,\ p \ge 0,\ b > 0 \cdots (1)$$

$$z = bx^c,\ y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z) \cdots (2)$$

$$z^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + z \frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0 \cdots (3)$$

$$y = x^a \left[c_1 J_p(bx^c) + c_2 J_{-p}(bx^c) \right] \cdots (4)$$

식 (1)의 꼴의 방정식의 경우 (2)의 관계식을 이용하여 (3)과 같은 Bessel Equation 형식으로 바꿀 수 있다.
식 (3)에서 구한 Bessel Function을 이용하여 원래 식(1)의 해를 구하면 식 (4)와 같다.

이 과정을 이용하여 $4x^2 y'' - 4xy' + (16x^2 + 3) y = 0$ 의 해를 찾으려고 한다.

문제 4) a,b,c,p에 해당하는 값을 각각 구하시오. (10점)

주어진 문제를 식 (1)과 같이 변형하고 비교한다.

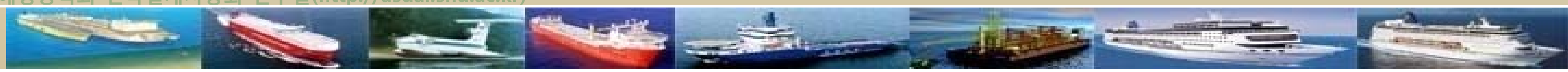
$$y'' + \left(-\frac{1}{x}\right) y' + (4 + \frac{3/4}{x^2}) y = 0$$

$$1 - 2a = -1 \rightarrow a = 1$$

$$2c - 2 = 0 \quad \rightarrow c = 1$$

$$b^2 c^2 = 4 \quad \rightarrow b = 2$$

$$a^2 - p^2 c^2 = \frac{3}{4} \rightarrow p = \frac{1}{2}$$



풀이 (문제 4,5*)

$$y'' + \frac{1-2a}{x} y' + (b^2 c^2 x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2}) y = 0,\ p \ge 0,\ b > 0 \cdots (1)$$

$$z = bx^c,\ y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z) \cdots (2)$$

$$z^2 \frac{d^2 w(z)}{dz^2} + z \frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0 \cdots (3)$$

$$y = x^a \left[c_1 J_p(bx^c) + c_2 J_{-p}(bx^c) \right] \cdots (4)$$

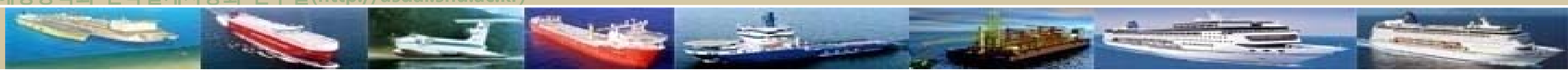
식 (1)의 꼴의 방정식의 경우 (2)의 관계식을 이용하여 (3)과 같은 Bessel Equation 형식으로 바꿀 수 있다. 식 (3)에서 구한 Bessel Function을 이용하여 원래 식(1)의 해를 구하면 식 (4)와 같다.

이 과정을 이용하여 $4x^2 y'' - 4xy' + (16x^2 + 3) y = 0$ **의 해를 찾으려고 한다.**

문제 5) 해를 구하되 해가 sine, cosine, x의 거듭 제곱 등과 같은 elementary function의 형태로 구하시오. (20점)

$a = 1, c = 1, b = 2, p = \frac{1}{2}$ **이므로 식(4)의 해의 형태는 다음과 같다.**

$$y = x[c_1 J_{1/2}(2x) + c_1 J_{-1/2}(2x)]$$



풀이 (문제 4,5*)

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + (b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2})y = 0,\ p \ge 0,\ b > 0 \cdots (1)$$

$$z = bx^c,\ y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z) \cdots (2)$$

$$z^2 \frac{d^2w(z)}{dz^2} + z\frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \cdots (3)$$

$$y = x^a\left[c_1 J_p(bx^c) + c_2 J_{-p}(bx^c)\right] \cdots (4)$$

식 (1)의 꼴의 방정식의 경우 (2)의 관계식을 이용하여 (3)과 같은 Bessel Equation 형식으로 바꿀 수 있다. 식 (3)에서 구한 Bessel Function을 이용하여 원래 식(1)의 해를 구하면 식 (4)와 같다.

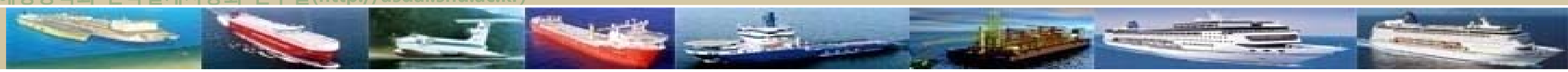
이 과정을 이용하여 $4x^2y'' - 4xy' + (16x^2 + 3)y = 0$ 의 해를 찾으려고 한다.

문제 5) 해를 구하되 해가 sine, cosine, x의 거듭 제곱 등과 같은 elementary function의 형태로 구하시오. (20점)

$J_{1/2}$ 을 구하면 $$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\frac{1}{2}+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{x}}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{x}}x^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\sin x$$



풀이 (문제 4,5*)

$$y''+\frac{1-2a}{x}y'+(b^2c^2x^{2c-2}+\frac{a^2-p^2c^2}{x^2})y=0,\ p\ge 0,\ b>0\cdots(1)$$

$$z=bx^c,\ y(x)=\left(\frac{z}{b}\right)^{a/c}w(z)\cdots(2)$$

$$z^2\frac{d^2w(z)}{dz^2}+z\frac{dw(z)}{dz}+(z^2-p^2)w=0\cdots(3)$$

$$y=x^a\left[c_1J_p(bx^c)+c_2J_{-p}(bx^c)\right]\cdots(4)$$

식 (1)의 꼴의 방정식의 경우 (2)의 관계식을 이용하여 (3)과 같은 Bessel Equation 형식으로 바꿀 수 있다.
식 (3)에서 구한 Bessel Function을 이용하여 원래 식(1)의 해를 구하면 식 (4)와 같다.

이 과정을 이용하여 $4x^2y''-4xy'+(16x^2+3)y=0$ 의 해를 찾으려고 한다.

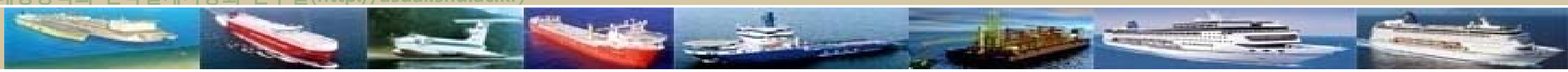
문제 5) 해를 구하되 해가 sine, cosine, x의 거듭 제곱 등과 같은 elementary function의 형태로 구하시오. (20점)

$J_{1/2}$ 을 구하면

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

$$J_{-1/2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\frac{1}{2}+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{2n(2n-1)!\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{x}}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{x}}x^{2n}=\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos x$$



풀이 (문제 4,5*)

$$y'' + \frac{1-2a}{x} y' + (b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}) y = 0,\ p \ge 0,\ b > 0 \cdots (1)$$

$$z = bx^c,\ y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{a/c} w(z) \cdots (2)$$

$$z^2 \frac{d^2w(z)}{dz^2} + z\frac{dw(z)}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \cdots (3)$$

$$y = x^a \left[c_1 J_p(bx^c) + c_2 J_{-p}(bx^c)\right] \cdots (4)$$

식 (1)의 꼴의 방정식의 경우 (2)의 관계식을 이용하여 (3)과 같은 Bessel Equation 형식으로 바꿀 수 있다. 식 (3)에서 구한 Bessel Function을 이용하여 원래 식(1)의 해를 구하면 식 (4)와 같다.

이 과정을 이용하여 $4x^2y'' - 4xy' + (16x^2 + 3)y = 0$ 의 해를 찾으려고 한다.

문제 5) 해를 구하되 해가 sine, cosine, x의 거듭 제곱 등과 같은 elementary function의 형태로 구하시오. (20점)

$$\therefore y = x[c_1 J_{1/2}(2x) + c_1 J_{-1/2}(2x)]$$

$$= x\left[c_1\sqrt{\frac{2}{2x\pi}}\sin(2x) + c_2\sqrt{\frac{2}{2x\pi}}\cos(2x)\right]$$

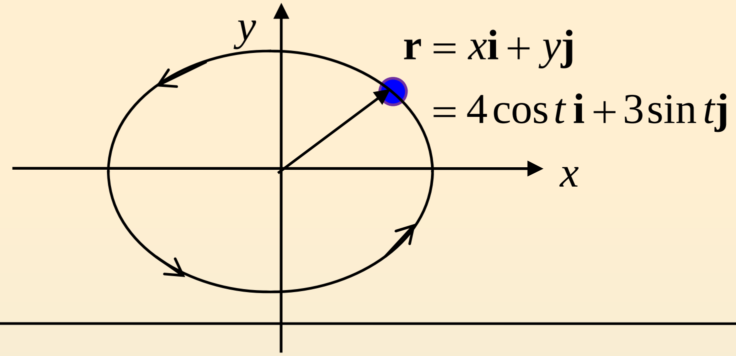
$$= \sqrt{x}\left[c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)\right]$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\sin x,\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos x$$

전개 과정과 답이 맞으면 5점
답이 틀리면 (최종)-2점
전개 과정 없으면 -3점

풀이 (문제 6*)

Force Field가 $\mathbf{F}=(3x-4y+2z)\mathbf{i}+(4x+2y-3z^2)\mathbf{j}+(2xz-4y^2+z^3)\mathbf{k}$ 로 주어져 있다. 그림과 같이 xy 평면상의 타원의 경로로 움직이는 물체에 대해 Force가 한 일을 구하시오.(15점)



xy 평면상의 경로이므로 z=0 이고 dz =0 이다.

$$\mathbf{F}=(3x-4y)\mathbf{i}+(4x+2y)\mathbf{j}+(-4y^2)\mathbf{k}$$

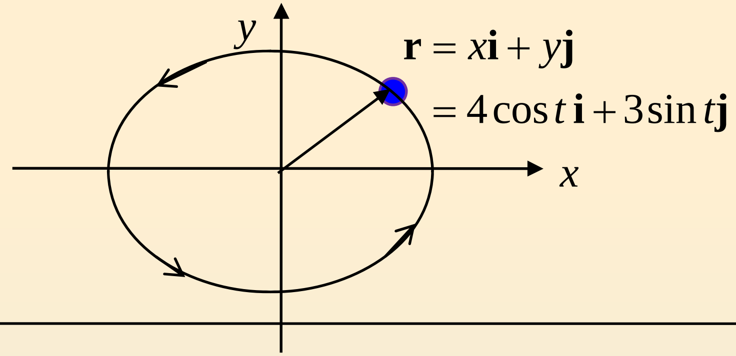
$$d\mathbf{r}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$$

$$\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\oint\left[(3x-4y)\mathbf{i}+(4x+2y)\mathbf{j}+(-4y^2)\mathbf{k}\right]\bullet(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j})$$

$$=\oint(3x-4y)dx+(4x+2y)dy$$

풀이 (문제 6*)

Force Field가 $\mathbf{F} = (3x - 4y + 2z)\mathbf{i} + (4x + 2y - 3z^2)\mathbf{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\mathbf{k}$ 로 주어져 있다. 그림과 같이 xy 평면상의 타원의 경로로 움직이는 물체에 대해 Force가 한 일을 구하시오.(15점)



$$\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint (3x - 4y)dx + (4x + 2y)dy$$

타원의 매개변수 방정식을 $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ 로 두면

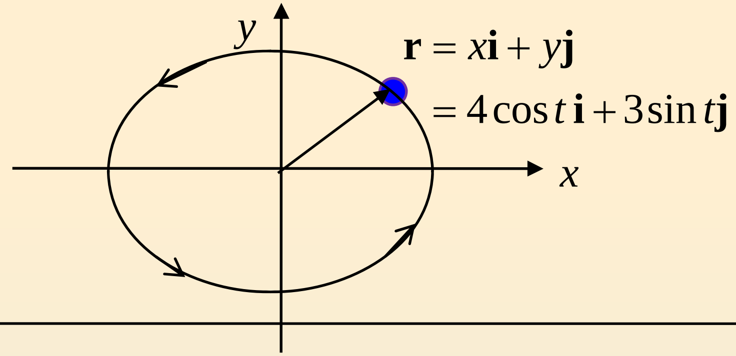
$$dx = -4\sin t\,dt,\ dy = 3\cos t\,dt$$

$$\therefore \oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (3\cdot 4\cos t - 4\cdot 3\sin t)(-4\sin t)dt + (4\cdot 4\cos t + 2\cdot 3\sin t)(3\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (48 - 30\sin t\cos t)dt$$

풀이 (문제 6*)

Force Field가 $\mathbf{F} = (3x - 4y + 2z)\mathbf{i} + (4x + 2y - 3z^2)\mathbf{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\mathbf{k}$ **로 주어져 있다. 그림과 같이 xy 평면상의 타원의 경로로 움직이는 물체에 대해 Force가 한 일을 구하시오.(15점)**



$$\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint (3x - 4y)dx + (4x + 2y)dy$$

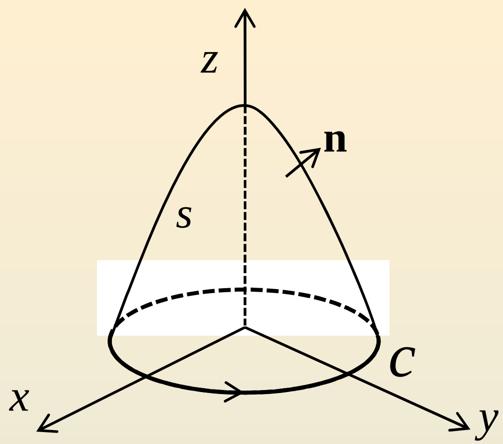
$$\therefore \oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (48 - 30\sin t\cos t)dt = \int_0^{2\pi} (48 - 15\sin 2t)dt = \left[48t + \frac{15}{2}\cos 2t \right]_0^{2\pi}$$

$$= 96\pi$$

풀이 (문제 7*)

$\mathbf{F}=[y,z,x]$ 로 주어진 벡터장과 그림과 같이 주어진 curve에 대한 선적분 $\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ 의 값을 Stokes' Theorem을 이용하여 구하시오. Surface는 $z=f(x,y)=1-(x^2+y^2),(z\geq 0)$ 로 정의된다. (15점)

$$\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{s} = \iint (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, ds$$



$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$$surface\ \ g(x,y,z): z-1+x^2+y^2$$

$$\mathbf{N}=\nabla g = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+\mathbf{k} = [2x, 2y, 1]$$

풀이 (문제 7*)

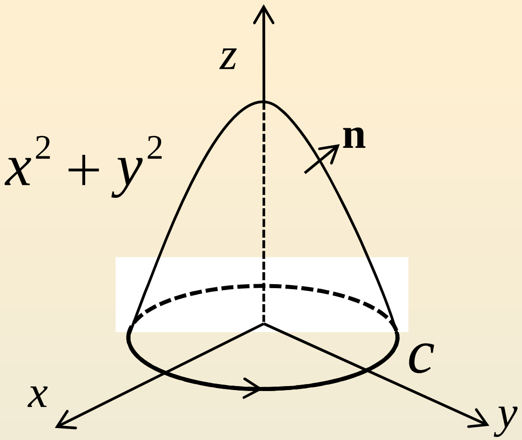
$\mathbf{F}=[y,z,x]$ 로 주어진 벡터장과 그림과 같이 주어진 curve에 대한 선적분 $\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ 의 값을 Stokes' Theorem을 이용하여 구하시오. Surface는 $z=f(x,y)=1-(x^2+y^2),(z\geq 0)$ 로 정의된다. (15점)

$$\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{s}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,ds$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=[-1,-1,-1]$$

$$\mathbf{N}=\nabla g=[2x,2y,1]$$

$$g: z-1+x^2+y^2$$



$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

$$\therefore \oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,ds=\iint(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}ds$$

Stokes' theorem 적용 5점

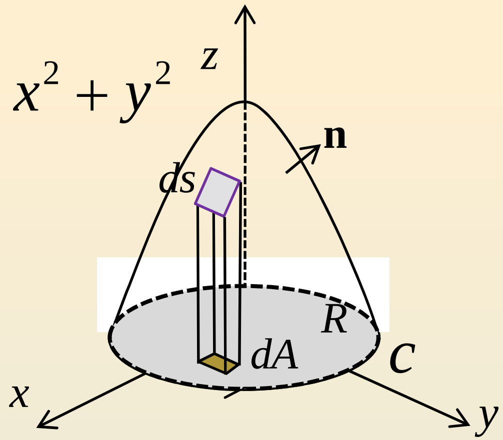
풀이 (문제 7*)

$\mathbf{F}=[y,z,x]$ 로 주어진 벡터장과 그림과 같이 주어진 curve에 대한 선적분 $\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ 의 값을 Stokes' Theorem을 이용하여 구하시오. Surface는 $z=f(x,y)=1-(x^2+y^2),(z\geq 0)$ 로 정의된다. (15점)

$$\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{s}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}ds$$

$$g: z-1+x^2+y^2$$

$$\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{s}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}ds$$



여기서 z=f(x,y)로 주어진 surface 상의 면적 dS와 xy평면 상에 투영된 면적 dA과의 관계는 다음과 같으므로

$$ds=\sqrt{1+f_x(x,y)+f_y(x,y)}dA=|\nabla g|dA=|\mathbf{N}|dA$$

$$\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}ds=\iint_s(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}ds=\iint_R(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|dA=\iint_R(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}dA$$

$$\therefore \oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_R(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}dxdy$$

풀이 (문제 7*)

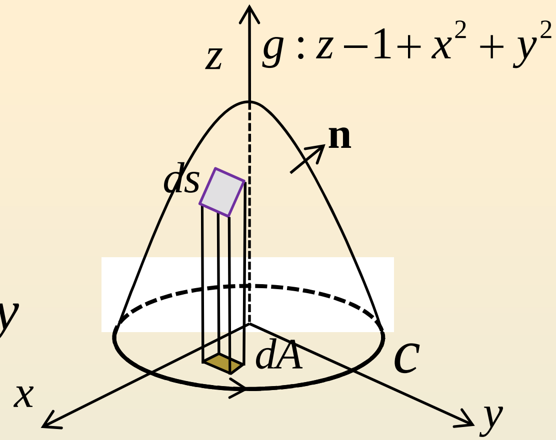
$\mathbf{F}=[y,z,x]$ 로 주어진 벡터장과 그림과 같이 주어진 curve에 대한 선적분 $\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ 의 값을 Stokes' Theorem을 이용하여 구하시오. Surface는 $z=f(x,y)=1-(x^2+y^2),(z\ge 0)$ 로 정의된다. (15점)

$$\therefore \oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$

$$=\iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}dxdy$$

$$\begin{cases}\nabla\times\mathbf{F}=[-1,-1,-1] \\ \mathbf{N}=\nabla g=[2x,2y,1]\end{cases}$$

$$=\iint_R [-1,-1,-1]\bullet[2x,2y,1]dxdy=\iint_R (-2x-2y-1)dxdy$$



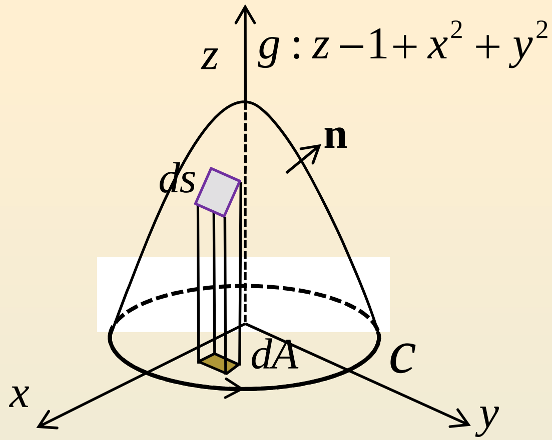
좌표계를 polar coordinates를 바꾸면

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ dxdy=rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(-2r\cos\theta-2r\sin\theta-1)rdrd\theta$$

풀이 (문제 7*)

$\mathbf{F}=[y,z,x]$ 로 주어진 벡터장과 그림과 같이 주어진 curve에 대한 선적분 $\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ 의 값을 Stokes' Theorem을 이용하여 구하시오. Surface는 $z=f(x,y)=1-(x^2+y^2),(z\geq 0)$ 로 정의된다. (15점)



$$\oint \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\iint_s (\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{s}=\iint_s (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,ds$$

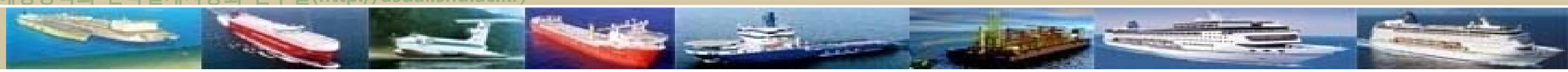
$$=\iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r\cos\theta-2r\sin\theta-1)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}r^3(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{1}{2}\right)d\theta$$

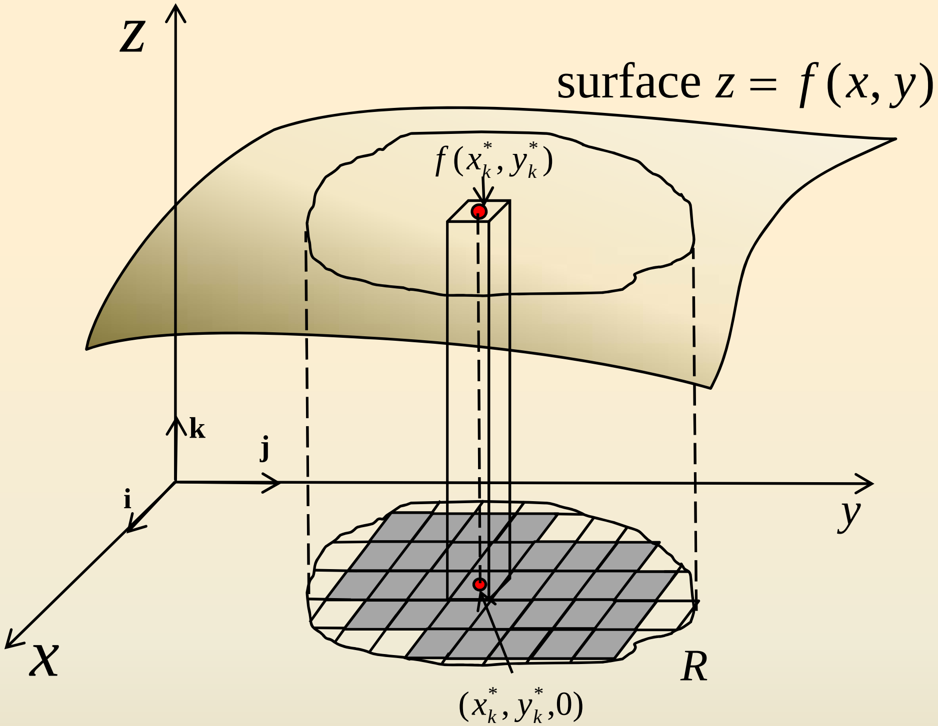
$$=\left[-\frac{2}{3}(\sin\theta-\cos\theta)-\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi}=-\pi$$



참고자료

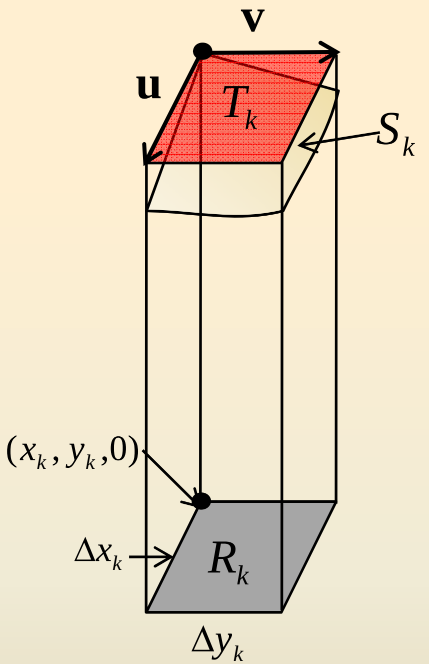
Surface Integrals

Surface Area



$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \mathbf{k}$$

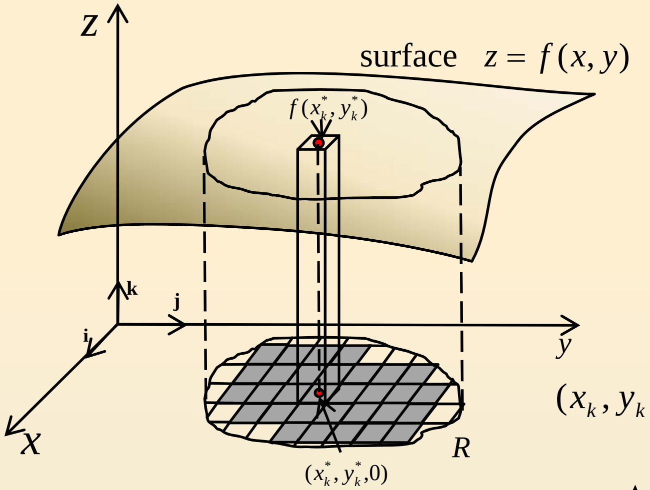


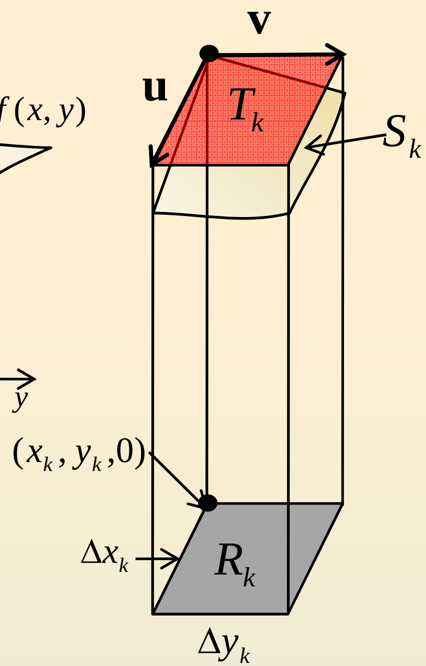
If R_k is small, $\Delta T_k \approx \Delta S_k$ $\quad (\Delta T_k, \Delta S_k : \text{Area of } T_k, S_k)$

$$\Delta T_k = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| \quad , \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \end{vmatrix} = [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta x_k \Delta y_k$$

Surface Integrals

Surface Area





$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \mathbf{k}$$

If R_k is small, $\Delta T_k \approx \Delta S_k$

$(\Delta T_k, \Delta S_k$: Area of $T_k, S_k)$

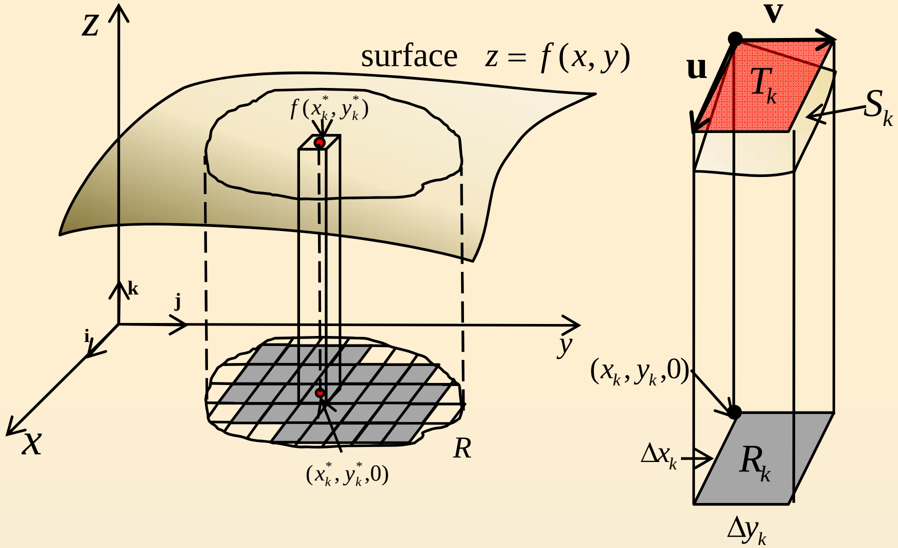
$$\Delta T_k = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta x_k \Delta y_k$$

$$\Delta T_k = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\ \Delta x_k \Delta y_k$$

$$\text{Area of surface} \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\ \Delta x_k \Delta y_k$$

Surface Integrals



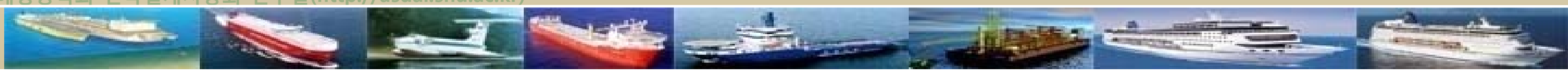
$$\text{Area of surface} \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\ \Delta x_k \Delta y_k$$

Definition 9.11

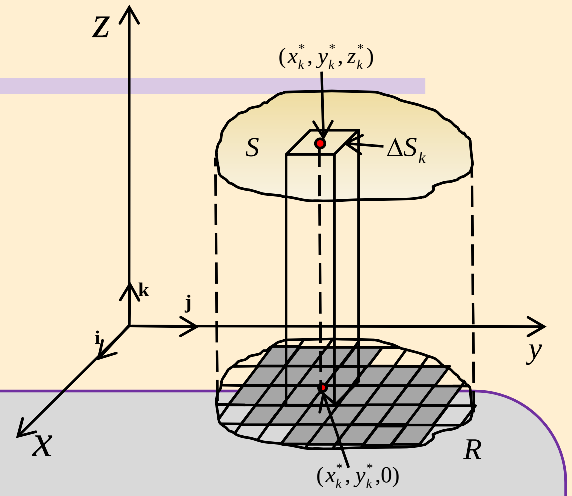
Surface Area

Let f be a function for the first partial derivatives f_x and f_y are continuous on a closed region *R*. Then the area of the surface over ***R*** is given by

$$A(s) = \iint_R \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\ dA \cdots (2)$$



Surface Integrals



Differential of Surface Area

$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\; dA$$

$w = G(x, y, z)$

1. Let G be defined in a region of 3-space that contains a surface *S,* which is the graph of a function $z = f(x, y)$. Let the projection *R* of the surface onto the xy-plane be either a Type I or Type II region
2. Divide the surface into n pieces of areas ΔS_k corresponding to a partition *P* of *R* into n rectangles R_k of area ΔA_k
3. Let $\| P \|$ be the **norm** of the partition or the length of the longest diagonal of the R_k
4. Choose a point (x_k^*, y_k^*, z_k^*) in each element of surface area
5. Form the sum $\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$

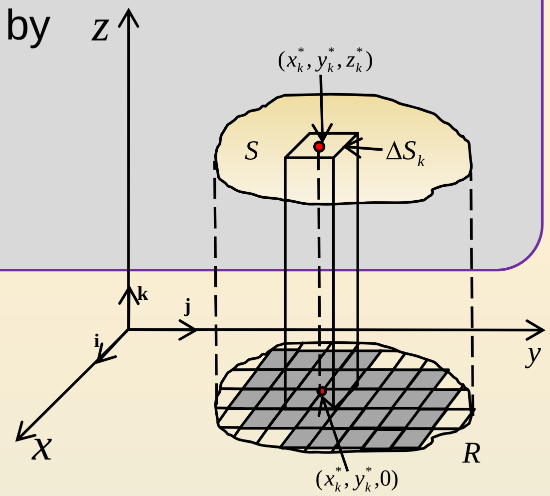
Surface Integrals

Definition 9.12

Surface Integral

Let G be a function of three variables defined over a region of space containing the surface *S*. then the **surface integral of *G* over *S*** is given by

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k \cdots (4)$$



Method of Evaluation

If G, f, f_x *and* f_y are continuous throughout a region containing *S*, we can evaluate (4) by means of a double integral

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,y,f(x,y))\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA \cdots (5)$$

when $G=1$, (5) reduces to formula (2) for surface area

Surface Integrals

Projection of S into Other Planes

If $y = g(x,z)$ is the equation of a surface *S* that projects onto a region *R* of the xz-plane, then

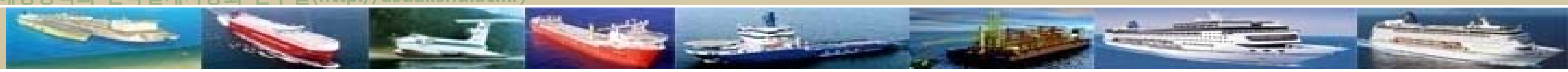
$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,g(x,z),z)\sqrt{1+[g_x(x,z)]^2+[g_z(x,z)]^2}\,dA$$

If $x = h(y,z)$ is the equation of a surface *S* that projects onto a region *R* of the yz-plane, then

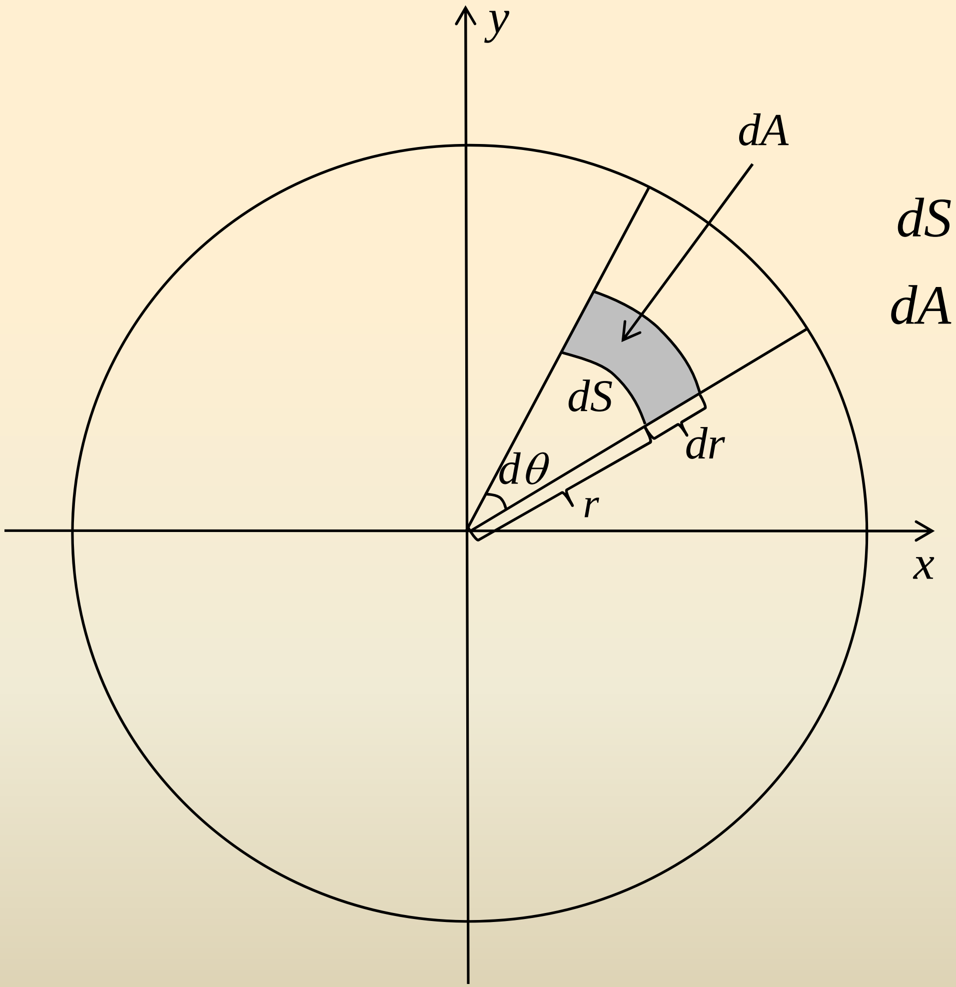
$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(h(y,z),y,z)\sqrt{1+[h_y(y,z)]^2+[h_z(y,z)]^2}\,dA$$

Mass of a Surface

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,dS$$



Double Integrals in Polar Coordinates



$$dS = r\,d\theta$$

$$dA = dS\,dr$$

$$= r\,d\theta\,dr$$