Mechanical and Aerospace System Analysis
Midterm #2 Solution

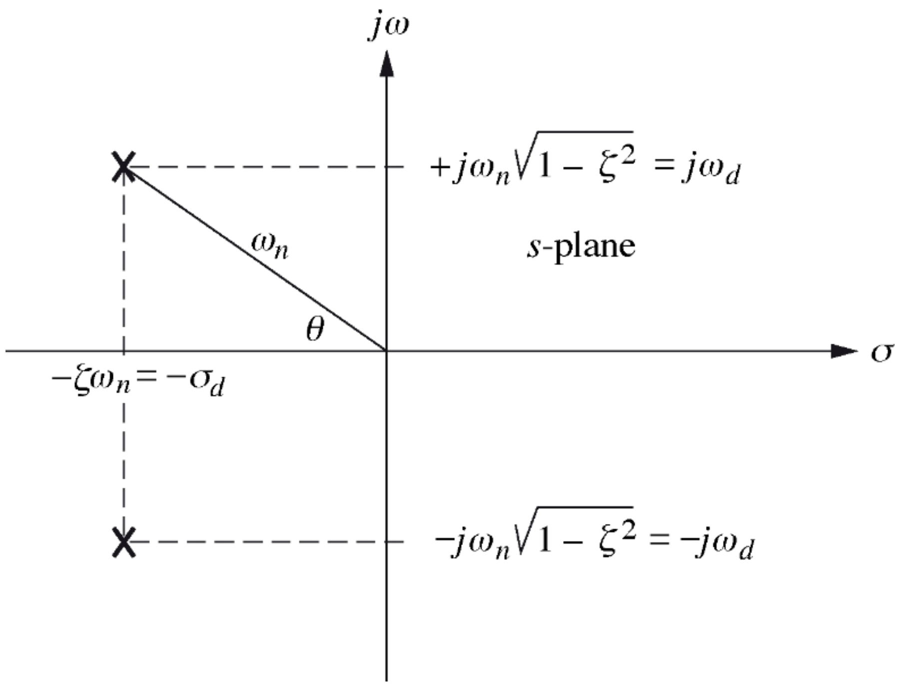
May. 14. 2009

1. Briefly answer following questions.**(40점)**
   A. Explain the golden rules of OP-amp.**(10점)**

Sol)

- No current will flow into the inputs**(5점)**
- The input voltage will be nearly equal**(5점)**
- (as a consequence of the second rule, the input impedance of the two inputs will be nearly infinite. That is, even if the open-loop impedance between the two inputs is low, the closed-loop input impedance will be high because the inputs will be held at nearly the same voltage)
  (**임피던스가 증폭기 앞에서 무한대, 뒤에서 무한소인 경우는 전류가 흐르지 않음을 의미하는 것으로 간주, 전압과는 무관, 따라서 전류에 해당하는 값 5점 인정**)
  (**그 외 0점**)

   B. Plot a pole placement graph for an under damped second order system.**(10점)**



      i. On the graph, describe the values of the pole's real and imaginary value using the damping ratio and the natural frequency.**(5점)**

Sol)

$$s_{1,2} = \sigma + \omega_d = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

(그림 온전히 맞으며 값들을 부호와 문자가 일치할 경우 5점)

(그림에서 pole 또는 문자를 누락한 경우 -1점)

(그림 개형이 완전히 틀린 경우와 위의 항 외의 경우 0점)

ii. What is the relationship between the angle of the line that intersects the origin and the pole, with the damping ratio?**(5점)**

Sol)

$$\cos\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta \qquad \therefore \theta = \cos^{-1}\zeta$$

(탄젠트로 표기한 경우 동일 만점 5점)

(그림으로 제타값의 변화에 따라 기울기가 바뀜을 보인 그림과 설명 2점)

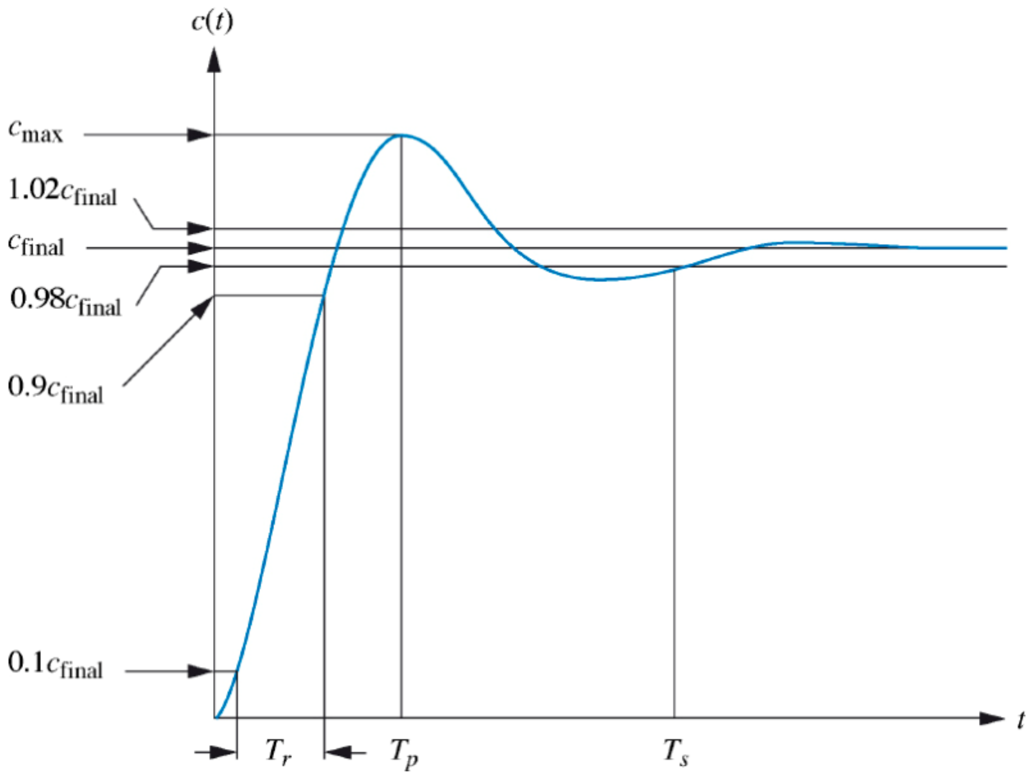
(그 외 0점)

C. Derive the %OS of a 2nd order system with C(s)**(10점)**

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)}$$

Sol)

It is assumed that ζ<1



$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)}$$

$$\%OS = \frac{C_{max} - C_{final}}{C_{final}} \times 100$$

C_{max} is found by evaluating c(t)

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s+\zeta\omega_n) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

$$C_{max} = c(T_p) = 1 - e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi\right) = 1 + e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}$$

For the unit step used for c(t), C_{final}=1

$$\therefore \%OS = e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} \times 100$$

(%OS 정의 식 2점)

(y_{ss}값 유도 1점)

(최종 %OS 답 2점)

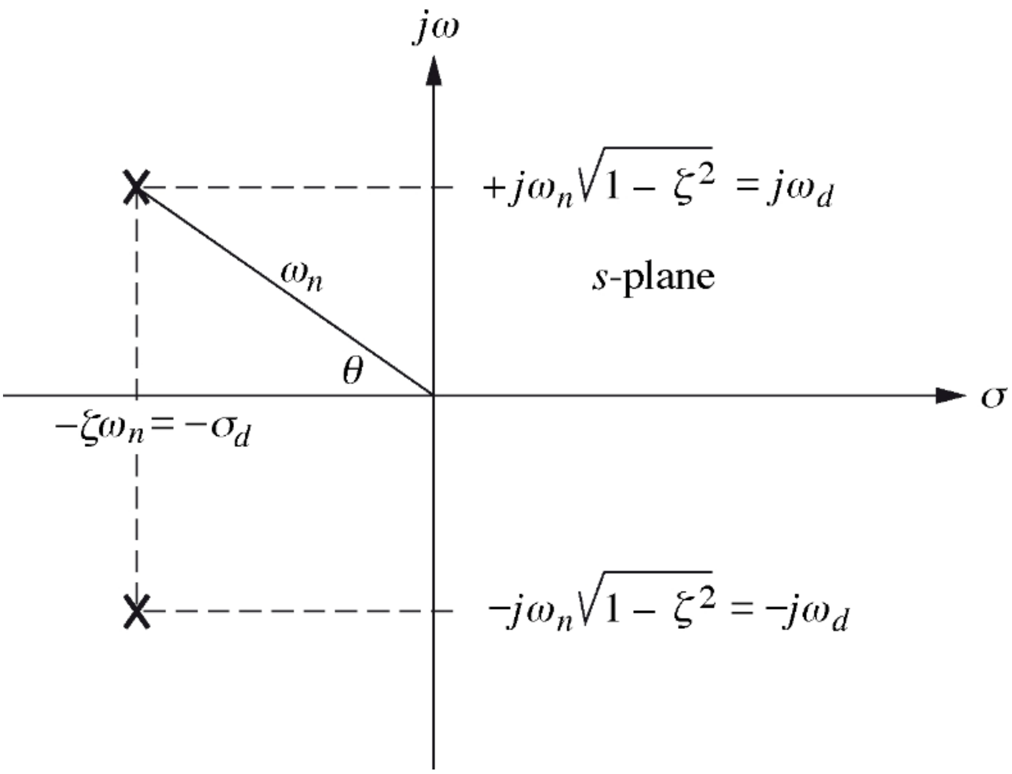
(중간 유도 과정 5점)

(중간 유도 과정 실수 전체 -2점)

(최종 %OS 유도에서 y_{ss}값 명시 없으면 -2점)

(그 외 0점)

D. Answer the following for a system with poles shown in the graph below.(10점)



i. What is the settling time(2%) and the peak time of a system with the poles shown in the pole placement graph below?**(5점)**

Sol)

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm \omega_d = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

- Settling time, T_s. The time required for the transient's damped oscillations to reach and stay within ±2% of the steady-state value.
- Peak time, T_p. The time required to reach the first, of maximum, peak.

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} = 2$$
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

(T_s만 맞을 경우 2점)
(T_p만 맞을 경우 2점)
(둘 다 맞을 경우 5점)
(그 외 0점)

ii. Describe what is needed in order to reduce the settling time to 1/2 of the current value, without changing the % overshoot?**(5점)**

Sol)

$$\%OS = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

So, don't handle the damping ratio, ζ.

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

To reduce 1/2 of the current settling time value, it should be twice increase the natural frequency.

$$\therefore \omega_n \Rightarrow 2\omega_n$$

(댐핑 비를 유지하며 고유진동수가 2배가 되어야 함을 명시하면 5점)
(그 외 0점)

2. (a) $Z_1(s) = R_1$, $Z_2(s) = \dfrac{1}{\frac{1}{R_f} + C_f s}$.

inverting OP-amp.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{R_1\left(\frac{1}{R_f} + C_f s\right)}$$ 5

(b) $E_m(s) = R_m I_m(s) + V_b(s)$, $V_b(s) = K_b W(s)$,

$T_m(s) = K_t I_m(s)$, $T_m(s) = J_a s W(s)$,

$$\Rightarrow R_m \frac{T_m(s)}{K_t} + K_b W(s) = E_m(s)$$ 5

$$\Rightarrow E_m(s) = \left(\frac{R_m J_a s}{K_t} + K_b\right) W(s)$$

$$\frac{W(s)}{E_m(s)} = \frac{1}{\frac{R_m J_a s}{K_t} + K_b}$$ 5

(c) $\boxed{G \cdot E_o = E_m}$ 5

$$\frac{W(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} \times \frac{E_m(s)}{E_o(s)} \times \frac{W(s)}{E_m(s)} = -\frac{\frac{G K_t R_f}{R_1}}{C_f R_f J_a R_m s^2 + (J_a R_m + C_f R_f K_b K_t)s + K_b K_t}$$

(d) $$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{8}{\frac{K_t K_b}{R_m J_a} + \frac{1}{C_f R_f}}$$ (2) 5

(e)

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\cdot \omega_n}$$ (2)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\left[\frac{K_t K_b}{C_f R_m J_a R_f} - \frac{1}{4}\left(\frac{K_t K_b}{R_m J_a} + \frac{1}{C_f R_f}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$ 5

(f) overdamped case. 5

the peak time doesn't exist!!

(g) $\%OS = 100\exp\left(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)$ (2)

overdamped case.

% OS is meaningless. 5

$\Rightarrow$ total 40

ζ, ω_n 을 정의하였을 경우 d, e 정답 처리 하였음.

e의 경우 overdamped case 이므로 존재하지 않는다고 한 경우 정답 처리 하려고 하였으나, 한 명도 없었음.

f, g의 경우 T_p, %OS 를 줄이기 위한 일반적인 방법 제시하였을 경우 부분점수!!

3.

A. 5점

P_1, P_2 또는 P_1-P_2

B. 20점

$R = \frac{P}{Q_m}$으로 계산 했을 때

$$q_{m1} = \frac{1}{R_1}(P_1 + P_a - P_3)$$
$$q_{m2} = \frac{1}{R_2}(P_4 - P_2 - P_a)$$

위의 두개 맞으면 5점 (유량의 방향은 달라도 맞게 해줌)

비압축성 유체 이므로

$$q_{m1} = q_{m2} = \rho A\dot{x}$$

위의 식 맞으면 5점

q_{m1}, q_{m2}를 더하면

$$P_4 - P_3 = P_2 - P_1 + (R_1 + R_2)\rho A\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = A(P_3 - P_4) \quad 3점$$

$$m\ddot{x} + (R_1 + R_2)\rho A^2\dot{x} + kx = A(P_1 - P_2) \quad 2점$$

$$\mathrm{TF} = \frac{\mathrm{X(s)}}{P_1(s)} = \frac{A}{ms^2 + (R_1 + R_2)\rho A^2 s + k}$$
$$TF = \frac{X(s)}{P_2(s)} = -\frac{A}{ms^2 + (R_1 + R_2)\rho A^2 s + k}$$

5점

C. 5점

$$2\zeta w_n = \frac{(R_1 + R_2)\rho A^2}{m}$$
$$T_s = \frac{4}{\zeta w_n} = \frac{8m}{(R_1 + R_2)\rho A^2}$$

D. 5 점

$$\mathrm{w_n^2} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}$$
$$\zeta^2 w_n^2 = \left(\frac{(R_1 + R_2)\rho A^2}{2m}\right)^2$$
$$\mathrm{w_n}\sqrt{(1 - \zeta^2)} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{(R_1 + R_2)\rho A^2}{2m}\right)^2}$$

$$T_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{(R_1+R_2)\rho A^2}{2m}\right)^2}}$$

E. 5 점

%overshoot = $100exp\,(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})$ 따라서 %overshoot 을 줄이려면 ζ가 늘어나야 한다

따라서 R_1을 크게 한다.

CDE

식 쓰면 2 점

B 의 식에 맞는 상수를 넣어 풀면 3 점

답까지 맞으면 5 점

4.

A. 10점

$R = \frac{P}{Q_m}$으로 계산 했을 때

$$q_{m1} = \frac{h_1 - h_2}{R_1} = -\rho A_1 \frac{dh_1}{dt}$$
$$q_{mo} = \frac{h_2}{R_2}$$
$$\rho A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_{mi} + q_{m1} - q_{mo}$$

$$\rho A_1 \frac{dh_1}{dt} = -\frac{h_1 - h_2}{R_1}$$
$$\rho A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_{mi} + \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

아래 두 식 하나당 5점

ρ안쓰면 -2점

B. 5점

조건에 의해 위의 식은

$$\rho A \frac{dh_1}{dt} = -\frac{h_1 - h_2}{R}$$
$$\rho 3A \frac{dh_2}{dt} = q_{mi} + \frac{h_1 - h_2}{R} - \frac{h_2}{R}$$

라플라스변환 하면(zero initial condition)

$$\rho A H_1 s = -\frac{H_1 - H_2}{R}$$
$$(\rho A R s + 1)H_1 - H_2 = 0$$

$$3\rho A H_2 s = Q_{mi} + \frac{H_1 - H_2}{R} - \frac{H_2}{R}$$
$$-H_1 + (3\rho A R s + 2)H_2 = R Q_{mi}$$

정리하면

$$TF = \frac{H_1}{Q_{mi}} = \frac{R}{3(\rho A R s)^2 + 5\rho A R s + 1}$$

1번 답 틀리면 0점

답 맞으면 5점 (ρ안써도 5점)

C. 5점

Step input $Q_{mi}(s) = 1/s$ 를 넣고 최종값 정리를 사용하면

h_1=R

최종값 정리를 적용하면 3점

Inverse LT 적용하고, 답까지 맞으면 5점

D. 5점

Steady state response의 0.1~0.9의 값이 되는데 걸리는 시간 이라는 개념이나, 그래프 등이 포함되어있으면 정답

$T_r\omega_n = f(\zeta)$ 의 식이 있어 이를 이용하면 된다고 하면 정답.

2.2/Time constant 라고 쓰면 오답.

E. 5점

ζ>1 : poles are real and distinct (over damped) 경우 이므로 진동 하지 않는다.

또는 특성방정식의 판별식이 양수이므로 진동하지 않는다.

F. 5점

$$TF = \frac{H_1}{Q_{mi}} = \frac{R}{3(\rho ARs)^2 + 5\rho ARs + 1}$$

$$\frac{H_2}{H_1} = (\rho ARs + 1)$$

$$\frac{H_2}{Q_{mi}} = \frac{R(\rho ARs + 1)}{3(\rho ARs)^2 + 5\rho ARs + 1}$$

$$\frac{Q_{mo}}{H_2} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{Q_o}{Q_{mi}} = \frac{(\rho ARs + 1)}{3(\rho ARs)^2 + 5\rho ARs + 1}$$

$$\frac{Q_o}{Q_{mi}} = \frac{Bs + 1}{3B^2s^2 + 5Bs + 1}$$

$\frac{Q_o}{Q_{mi}} = \frac{H_1}{Q_{mi}}\frac{H_2}{H_1}\frac{Q_{mo}}{H_2}$를 이용함을 명시하면 2점

$\frac{H_2}{H_1}\frac{Q_{mo}}{H_2}$의 값을 구체적으로 명시하면 5점

답 맞으면 5점

G. 5점

최종값 정리를 적용하면 1. (input 이 1 이므로 당연히 1일수 밖에 없음)

최종값 정리를 적용하면 3점

Inverse LT 적용하고, 답까지 맞으면 5점